【 62 】

氏　名	**柳　生　等　和**（やぎゅう　とし　まさ）
学位の種類	理　学　博　士
学位記番号	論 理 博 第 387 号
学位授与の日付	昭和 47 年 5 月 23 日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文題目	**Deformations of G-structures and infinitesimal automorphisms** （G-構造の変形と無限小自己同型）
論文調査委員	（主 査） 教 授 戸田　宏　教 授 島田信夫　教 授 吉沢尚明

論 文 内 容 の 要 旨

可微分多様体 M 上の推移的 G-構造の間の局所同値の概念と大域的同値の概念を関係づけるものの一つとして変形の理論があるが，これに大域的な性質としての無限小自己同型の同値性がどの様に関連するかということが，申請論文の主題であると考えられる。

$\mathfrak{G}_0$ をM上の一つの推移的な G-構造とするとき，これはM上のフレームバンドルに同伴する $GL(n)/G$ バンドルにおける一つの断面と考えられる。このような断面全体すなわち G-構造全体はバナッハ多様体 $\mathfrak{G}$ をなす。$\mathfrak{G}$ において，$\mathfrak{G}_0$ と局所同値な G-構造全体の作る $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{G}_0$ と大域的に同値な G-構造全体の作る $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{G}_0$ と同値な無限小自己同型をもつ G-構造全体の作る $\mathfrak{J}$，等の部分空間を考える。このとき，たとえば $\mathfrak{G}_0$ の一つの変形は曲線に外ならないことが申請者によって示されている。

$P: \widetilde{M} \to M$ をMの普遍被覆多様体とするとき，$\mathfrak{G}_0$ は $\widetilde{M}$上の G-構造 $\widetilde{\mathfrak{G}}_0$ にリフトされる。$\widetilde{\mathfrak{G}}_0$ の無限小自己同型の芽の層を $\mathfrak{A}(\widetilde{\mathfrak{G}}_0)$ とするとき $\mathfrak{A}(\widetilde{\mathfrak{G}}_0)$ の大域的断面全体の作るリー環が，$\widetilde{\mathfrak{G}}_0$ の自己同型群 $A(\widetilde{\mathfrak{G}}_0)$ のリー環と一致すると仮定する。このとき，$\widetilde{\mathfrak{G}}_0$ の変形で $\widetilde{\mathfrak{G}}_0$ と同じ無限小自己同型をもつものは，自明な変形となる。また $\mathfrak{A}(\widetilde{\mathfrak{G}}_0)$ をそれ自身に写す $\widetilde{M}$ の変換全体はリー群 $N(\widetilde{\mathfrak{G}}_0)$ を作り，その変換によって $\widetilde{\mathfrak{G}}_0$ から引き起される $\widetilde{M}$ 上の G-構造は，M上の G-構造のリフトとなる。このようにしてえられる，$N(\widetilde{\mathfrak{G}}_0)$ から $\mathfrak{G}$ への対応は可微分写像で，その像 $\mathfrak{S}$ は，$\mathfrak{G}_0$ と局所同値かつ $\mathfrak{G}_0$ と同じ無限小自己同型をもつ G-構造全体と一致する。さらに $\mathfrak{G}_0$ の自己同型群を $A(\mathfrak{G}_0)$, $\mathfrak{G}_0$ の無限小自己同型の芽の層を $\mathfrak{A}(\mathfrak{G}_0)$, $\mathfrak{A}(\mathfrak{G}_0)$ をそれ自身へ写すMの変換全体の作るリー群を $N(\mathfrak{G}_0)$ とし，$N(\mathfrak{G}_0)$ の $\mathfrak{S}$ の変換群として働きによる軌道空間Uを考えるとき，Uは可微分多様体となり，その次元は

$$\dim U = \dim N(\widetilde{\mathfrak{G}}_0) - \dim A(\widetilde{\mathfrak{G}}_0) - \dim N(\mathfrak{G}_0) + \dim A(\mathfrak{G}_0)$$

で与えられる。このとき，$\mathfrak{G}_0$ と同じ無限小自己同型をもつ $\mathfrak{G}_0$ の変形は，U内の曲線で一意的にあらわされる。

一方，$[\mathfrak{A}(\mathfrak{G}_0) \times t]$ を $\mathfrak{G}_0$ の局所自己同型の1径数族の芽の層，$[N(\mathfrak{G}_0) \times t]$ を $\mathfrak{A}(\mathfrak{G}_0)$ を自身に写す局

所変換の1径数族の芽の層とするとき，自然な対応

$$\Omega: H^1(M, [\mathfrak{A}(\mathfrak{G}_0)\times t])\to H^1(M, [N(\mathfrak{G}_0)\times t])$$

の核に属するコホモロジー類は，$\mathfrak{G}_0$ と同値な無限小自己同型をもつ $\mathfrak{G}_0$ の変形の同値類であり，Uにおける曲線の芽として一意的に表現される。

更に無限小の考察を施し，$N(\mathfrak{G}_0)$ のリー環のすべての元のベクトル場の芽の層を $\mathfrak{N}(\widetilde{\mathfrak{G}_0})$ とし，Pによって引き起されるベクトル場の射影を P' とするとき，$P'\mathfrak{N}(\widetilde{\mathfrak{G}_0})$ は $\mathfrak{A}(\mathfrak{G}_0)$ を部分層とするM上の層となる。自然な準同型

$$\omega: H^1(M, \mathfrak{A}(\mathfrak{G}_0))\to H^1(M, P'\mathfrak{N}(\widetilde{\mathfrak{G}_0}))$$

において，$\dim(\mathrm{Ker}\,\omega)=\dim U$ であり，$\mathrm{Ker}\,\omega$ の元は $\mathfrak{G}_0$ に同値な無限小自己同型をもつ無限小変形の類をあらわす。このような無限小変形は，$\mathfrak{G}_0$ の同様な変形に延長出来る。特に $\mathrm{Ker}\,\omega=0$ ならば，$\mathfrak{G}_0$ と同値な無限小自己同位型をもつ変形はすべて自明な変形となる。

申請者は以上の様な諸結果を，微分幾何学的な精密な検討の下に証明した。

論文審査の結果の要旨

申請者は主論文において，可微分多様体Mの上の推移的G–構造に対する，局所的同値性と大域的同値性の関係を，無限小自己同型と変形理論との相関において論じている。

M上の一つの推移的G–構造 $\mathfrak{G}_0$ に対して，$\mathfrak{G}_0$ と局所同値なG–構造全体を $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{G}_0$ と大域的に同値なG–構造全体を $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{G}_0$ と同値な無限小自己同型をもつG–構造全体を $\mathfrak{I}$ とするとき，変形理論をもとにして，$\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ および $\mathfrak{I}\cap\mathfrak{D}$ の関係が考察されている。とくに，$\mathfrak{G}_0$ の変形は $\mathfrak{D}$ の曲線に外ならないことが示されている。

申請者はMの普遍被覆多様体 $P: \widetilde{M}\to M$ を考え，$\mathfrak{G}_0$ のこれによる M へのリフトを $\mathfrak{G}_0$ としたときの，$\widetilde{\mathfrak{G}_0}$ の無限小自己同型の芽の層 $\mathfrak{A}(\widetilde{\mathfrak{G}_0})$ および $\mathfrak{A}(\widetilde{\mathfrak{G}_0})$ をそれ自身に写す $\widetilde{M}$ の変換全体の作るリー群 $N(\mathfrak{G}_0)$ を考えた。一定の条件の下に，$N(\mathfrak{G}_0)$ からその引き起こすM上のG–構造への対応は，$\mathfrak{D}$ への可微分写像でその像 $\mathfrak{S}$ は $\mathfrak{G}_0$ と局所同値かつ $\mathfrak{G}_0$ と同じ無限小自己同型をもつG–構造全体と一致することを示した。さらに，Mについて同様な層 $\mathfrak{A}(\mathfrak{G}_0)$ およびリー群 $N(\mathfrak{G}_0)$ を考えるとき，$\mathfrak{S}$ における $N(\mathfrak{G}_0)$ の軌道空間Uは可微分多様体となり，$\mathfrak{G}_0$ と同じ無限小自己同型をもつ $\mathfrak{G}_0$ の変形はUにおける曲線で一意的にあらわせることを示した。

申請者は $\mathfrak{I}\cap\mathfrak{D}$ での考察のために，$[\mathfrak{A}(\mathfrak{G}_0)\times t]$, $[N(\mathfrak{G}_0)\times t]$ 等の対応する1径数族の芽の層を係数とするMの一次元コホモロジー群を用いて，$\mathfrak{I}\cap\mathfrak{D}$ における変形の同値類をあらわし，それがUにおける曲線の芽で一意的にあらわされることを示した。さらに，$N(\widetilde{\mathfrak{G}_0})$ のリー環の層 $\mathfrak{N}(\widetilde{\mathfrak{G}_0})$ の射影Pによる像 $P'\mathfrak{N}(\widetilde{\mathfrak{G}_0})\supset\mathfrak{A}(\mathfrak{G}_0)$ に関して，自然な準同型

$$\omega: H^1(M, \mathfrak{A}(\mathfrak{G}_0))\to H^1(M, P'\mathfrak{N}(\widetilde{\mathfrak{G}_0}))$$

の核 $\mathrm{Ker}\,\omega$ は，$\dim(\mathrm{Ker}\,\omega)=\dim U$ を満し，かつその元は $\mathfrak{G}_0$ に同値な無限小自己同型をもつ無限小変形の類をあらわし，この様な無限小変形は $\mathfrak{G}_0$ の同様な変形に延長出来ることを証明した，応用として，$\mathrm{Ker}\,\omega=0$ ならば $\mathfrak{G}_0$ と同値な無限小自己同型をもつ変形はすべて自明な変形となることが示されている。

申請者は周到綿密な微分幾何学的準備の上に立って，以上の様な理論を展開しており，主論文は微分幾何学におけるこの方面の力作として，博士の学位を与えるに十分な内容を有するものと認められる。なお，参考論文は可微分ファイバーバンドルの断面の変形に関する論文であり，主論文と多少の関連はあるが，それ自身申請者の学識を十分に示すものということができる。

よって，本論文は理学博士の学位論文として価値あるものと認める。