【53】

氏　　　名	宮　武　貞　夫（みや　たけ　さだ　お）
学位の種類	理　学　博　士
学位記番号	論理博第472号
学位授与の日付	昭和49年7月23日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文題目	**Mixed problem for hyperbolic equation of second order** （二階双曲型方程式に対する混合問題）
論文調査委員	（主査）教授 溝畑　茂　教授 山口昌哉　教授 松浦重武

論文内容の要旨

双曲型方程式に対する初期-境界値問題は最近急速に発展した微分方程式の一分野である。この種の問題の典型的な例は

$$(1)\quad \begin{cases} \square u(x,t)=f(x,t) \quad (x\in\Omega, t\geqslant 0) \\ u|S=g \\ u(x,0)=u_0(x), \dfrac{\partial}{\partial t}u(x,0)=u_1(x) \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \square u(x,t)=f(x,t) \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|S=g \\ u(x,0)=u_0(x), \dfrac{\partial}{\partial t}u(x,0)=u_1(x) \end{cases}$$

で与えられる。S は R^n の領域 Ω の境界であり，$\square=\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-\triangle_x$（波動作用素）である。(1)の場合（Dirichlet 条件）はその取り扱いが簡単であって，一般双曲型方程式に対しても，いわゆる “uniform Lopatinski condition” とよばれる条件のもとでの一般な境界条件にまで拡張された（Kreiss, Sakamoto の仕事がそれである)。ところで(2)の場合（Neumann 条件）は取り扱いが(1)の場合に比べて，はるかに困難である。したがって(2)の場合の一般化は現在の所，具体的な条件のもとでの比較的粗い考察が2，3行なわれているに過ぎない。

以上の状況のもとで，申請者の研究は2階の一般な regularly hyperbolic equation に対して L^2—空間，あるいは Sobolev 空間のわくの範囲で取り扱うことの出来る境界条件のクラスを特徴づけることを試み，これに成功している。

有限伝播速度の性質を証明しうる見通しのもとで，基本的な考察は半空間で行われている。すなわち領域 Ω は $R^n:(x,y_1,\cdots\cdots,y_{n-1})$ の半空間 $x>0$ であるとする。境界は $x=0$ である。P を二階の regularly hyperbolic operator, P_0 をその主要部とする。B を一階の境界微分作用素とする。問題はつぎのようになる。

$$(3)\quad \begin{cases} P_0(x,y,t,D_x,D_y,D_t)\,u\,(x,y,t)=f(x,y,t) \\ Bu|_{x=0}\equiv(D_x+\sum_{j=1}^{n-1}b_j(y,t)Dy_j-c(y,t)D_t)u|_{x=0}=g(y,t) \\ D_t{}^ju|_{t=0}=u_j(x,y)\quad(j=0,1) \end{cases}$$

ここで $D_x=i^{-1}\dfrac{\partial}{\partial x}$，他も同様であり，$b_j$，$c$ は実数値であるとする。$x=0$ は P_0 に対して非特性であるとする。P_0 を定数係数とみなし，P_0u に Fourie-Lapllce 変換をほどこしたもの として得られる P_0 の symbol を $P_0\ (x,\ y,\ t,\ \xi,\ \eta,\ \tau)$ とし，

$$P_0(0,y,t,\xi,\eta,\tau)=0,\ \ \tau=\sigma-i\gamma\ \ (\gamma>0)$$

の ξ に関する根で虚部で正のものを $\xi=\xi_+(y,t,\eta,\tau)$ とおく。境界作用素 B に関する条件として，γ (<0) が 0 に近づくとき，$|\eta|^2+|\tau|^2=1$ の条件のもとで，

$$(*)\quad |B(y,t,\xi_+(y,t,\eta,\tau),\eta,\tau)|\geqslant C_0\gamma^{\frac{1}{2}}$$

をおく。ここで C_0 はある正の定数である。なお右辺を単に C_0 でおきかえた場合が uniform Lopatinski 条件である。

ついで申請者は Neumann 条件の場合より示唆されて，Sobolev 空間でのエネルギー不等式 ($t\geqslant0$ として)

$$(\mathrm{E})\quad \|u'(t)\|_0+\|u(t)\|_1\leqslant c\left[\int_0^t\|f(s)\|_0ds+\int_0^t\langle\wedge_y{}^{\frac{1}{2}}g(s)\rangle_0ds+\|u'(0)\|_0+\|u(0)\|_1\right]$$

を設けている。$\wedge_y{}^{\frac{1}{2}}g\ (y,s)$ は，y に関する $(1+|\eta|^{\frac{1}{2}}g\ (\eta,s)$ の Fourier 逆像であり，$\langle\ \ \rangle_0$ は境界での L^2-norm である。

申請者は，まず条件 (*) がなりたてば (E) がなりたつことを示している。この過程は複雑であるが，上記の問題の(3)の共役境界値問題 $\{P^*,B'\}$ を同時に考察し，解の存在も含めて (E) を示している。ついで (E) がなりたてば，条件 (*) がなりたつことが示されている。このことは，P_0,B を主要部とする混合問題を Sobolev 空間でとり扱う場合，条件 (*) が必要十分であることを示しており，よくまとまった結果である。

最後に，条件 (*) の仮定のもとで，有限伝播速度をもつことが示されている。くわしくいえば，その最大速度は Cauchy 問題の場合のそれと一致することが示されている，重要な結果である。

論文審査の結果の要旨

申請者の得た結果は，その手法と合わせて現在困難視されている一般的なとり扱いに1つの道を開いたものということができる。

推論の過程をみると，(E) の他に，エネルギー不等式

$$(\mathrm{E}_1)\quad |u|^2{}_{1,\gamma}+\sum_{j=0}^{1}<\wedge_{y,\gamma}{}^{-\frac{1}{2}}D_x{}^j u>^2{}_{1-j,\gamma}\leqslant\frac{C}{\gamma^2}\left\{|Pu|^2{}_{0,\gamma}+<\wedge^{\frac{1}{2}}{}_{y,\gamma}Bu>^2{}_{0,\gamma}\right\}$$

を設け，(*) がなりたてば (E_1) がなりたつことが示されている。そのさい条件 (*) と，境界条件にあらわれる b_j，と c が，$P=\square$ の場合には，

$$c\geq\left(\sum_{j=1}^{n-1}b_j{}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

を満足していることが同等であることが示されているが，この導出の過程は興味深い。申請者の苦心は (*) から (E_1) を導くことに集中されている。(E_1) の形の不等式を設けたことはこの論文の重要な点であり，申請者の洞察力の秀れていることを示しており，高く評価される。次の段階は (E_1) から (E) を導くことであるが，相当微細な考察を経て漸くなされており，この点にも申請者の創意工夫がうかがわれる。

さらに申請者は楕円型作用素に対する coercive の概念とほぼ同様な考えが今の双曲型の場合にも適用されることを見抜くことによって，(E_1) から (*) がしたがうことを結論しているが，その手法は基本的なものであり，興味深いものがある。

なお参考論文１，２，３は何れも双曲型方程式に対する初期-境界値問題を扱ったものとして先駆的なものであるが，とくに３は，特異積分作用素間の交換子の研究を通じて，従来とり扱われてきた問題を，特異積分作用素の立場から解決されることを明確に示したものであり，申請者の識見の秀れていることを示している。

よって，本論文は理学博士の学位論文として価値あるものと認める。