

氏 名 梶 谷 邦 彦  
かじ たに くに ひこ  
 学位の種類 理 学 博 士  
 学位記番号 論 理 博 第 503 号  
 学位授与の日付 昭 和 50 年 11 月 25 日  
 学位授与の要件 学 位 規 則 第 5 条 第 2 項 該 当  
 学位論文題目 **Strongly Hyperbolic Systems with Variable Coefficients**  
 (変係数強双曲型方程式系)

論文調査委員 (主 査)  
 教 授 溝 畑 茂 教 授 楠 幸 男 教 授 渡 辺 信 三

論 文 内 容 の 要 旨

$IR^p_x[0, T]$  で定義された 1 階偏微分方程式系

$$L[u] = \frac{\partial}{\partial t} u - \sum_{k=1}^p A_k(x, t) \frac{\partial}{\partial x_k} u - B(x, t) u = f(x, t) \quad \dots\dots\dots(1)$$

を考える。ここで  $A_k, B$  はともに order  $m$  の行列であり、 $u, f$  は  $m$  成分をもつベクトル値関数である。任意の初期時刻  $t_0 \in [0, T]$  を指定し、なめらかな初期データ  $u_0(x)$ 、ならびに右辺  $f(x, t)$  を与えたとき、なめらかな解  $u(x, t)$  が  $(x, t) \in IR^p_x[t_0, T]$  で一意的に存在するとき Cauchy 問題は一樣に適切 (well-posed) であるとよばれている。さらに双曲型偏微分方程式の 1 つの特徴的な性質であるところの、有限伝播の性質を要請する。

$$L_0 = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{k=1}^p A_k \frac{\partial}{\partial x_k} \quad \dots\dots\dots(2)$$

が強双曲型であるとは、 $L_0$  のみならず任意の  $B(x, t)$  を  $L_0$  に付け加えたもの、すなわち(1)が上記の意味で一樣に適切であるときをいう。

主論文の目的は、 $L_0$  が強双曲型であるための具体的な形の必要十分条件を求めることにある。

歴史的には、この方向の研究は Petrowsky に始まる (1938)。ついで  $A_k$  がすべて定数の場合、山口一笠原が 1960 年につぎの結果をえている：(2)が強双曲型であるための必要十分条件は  $\sum_{k=1}^p A_k \xi_k$  が任意の  $\xi$  (実ベクトル) に対して対角化可能であり、かつある定数  $\delta$  があって、

$$N(\xi) \sum A_k \xi_k = D(\xi) N(\xi) \quad (D(\xi) \text{ は対角行列})$$

をみたす  $N(\xi)$  が  $|\det N(\xi)|, |\det N(\xi)^{-1}| \leq \delta$  をみたすようにとれることである。

この論文では  $A \cdot \xi (= \sum A_k \xi_k)$  の固有値の重複度が一定であると仮定する。すなわち、

$$\det(\lambda I - A(x, t) \cdot \xi) = \prod_j (\lambda - \lambda_j(x, t; \xi))^{m_j} (\lambda_i \neq \lambda_j)$$

とする。得られた結果はつぎのものである： $L_0$  が強双曲型であるための必要十分条件は、 $A \cdot \xi$  が任意の  $(x, t, \xi)$  に対して対角化可能であることである。

ところでこの結果の十分性はすでに知られていた（溝畑，1959年）。しかしそれが同時に必要条件でもあることは，その予測が困難であったこともあって，未解決のままになっていた。

申請者は特性根の重複度が一定でなければ，対角化可能という条件は，もはや必要条件にも十分条件にもなり得ないことを例をあげて説明している。ついで対角化可能でない場合（特性根の重複度は一定とする）局所的に  $A \cdot \xi$  を Jordan の標準形に変換する滑らかな  $N(x, t; \xi)$  の存在を示し，これを通じて適当な  $B$  を見出している。最後に巧みな方法によって漸近解を構成することにより，Cauchy 問題の適切性が成り立っていないことを示している。

参考論文 1, 2, 3 はともに主論文と関連する課題を扱ったものであって，これらにおいて主論文の手法の相当な部分が開発されている。方程式(1)が任意の初期値  $u_0(x)$  ならびに右辺  $f(x, t)$  に対して

$$\|u(x, t)\|_{L^2} \leq C \left[ \|u_0(x)\|_{L^2} + \int_0^t \|f(x, s)\|_{L^2} ds \right]$$

をみたす一意的な解をもつとき，Cauchy 問題は  $L^2$  の意味で適切 (well-posed) であるという。参考論文 1 において，そのためには  $A(x, t) \cdot \xi$  が任意の  $(x, t, \xi)$  に対して対角化可能であることが必要であることが証明されている。ここでは特性根の重複度一定ということは仮定されていない。この論文において，エネルギー不等式とフーリエ解析の手法を巧みに組み合わせる方法が考案されている。

参考論文 2, 3 はともに双曲型方程式の初期-境界値問題の  $L^2$  の意味の適切性と Lopatinski の条件との関係を調べたものであって興味深いものであり，将来の発展が期待されるものである。

### 論文審査の結果の要旨

申請者の得た結果：強双曲型 ↔ 対角化可能，はよくまとまった美しい結果であり，今後この方面の研究の出発点となるものである。説明の方法は P. D. Lax の漸近解の構成法の本質を用いるものであるが，極めて創意に富んだものである。

証明の方法をやや詳しくのべれば，つぎのようになる。 $(x, t, \xi) = (0, 0, \xi^0)$  の近傍で  $A \cdot \xi$  が対角化可能でないとすると，局所的に  $N(x, t; \xi)$  があって

$$NA \cdot \xi = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & \bar{D} \end{bmatrix} N, \quad D_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1(x, t; \xi) & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & & 1 \\ & & & & \lambda_1(x, t; \xi) \end{bmatrix}$$

の形となる。 $D_1$  の order を  $m_1$  とし， $\lambda_1(x, t; \xi) = a(x, t; \xi)$  とおいて，eikonal equation

$$\varphi_t = a(x, t; \varphi_x)$$

の解  $\varphi$  で，初期条件  $\varphi(x, 0) = x \cdot \xi^0$  を満足するものを  $\lambda^0(x, t)$  とおく。 $N(x, t; \lambda^0_x) = N_0(x, t)$  として，

(1) を  $N_0$  で変換し， $N_0 u = v$  とおくと，(1) は

$$\tilde{L}[v] = \left( \frac{\partial}{\partial t} - \sum \tilde{A}_k \frac{\partial}{\partial x_k} + B_0 \right) v = N_0 f \quad \dots\dots\dots(3)$$

の形となる。ここで， $N_0 \left( \frac{\partial}{\partial t} - \sum A_k \frac{\partial}{\partial x_k} - B \right) N_0^{-1} = B_0$  であるが， $B$  として， $B_0$  が  $(m_1, 1)$  の element が 1 で他はすべて 0 になるもの（一意的に定まる）をとる。このとき  $\sum \tilde{A}_k \lambda^0 x_k$  の  $D_1$  に対応する部分は

$$\begin{bmatrix} a(x, t; \lambda_x^0) & 1 & 0 \\ 0 & & a(x, t; \lambda_x^0) \end{bmatrix}$$

となる。このことを考慮して、 $+\infty$  に近づけるべきパラメータ  $n$  を含む(3)の漸近解

$$v(x, t; n) \sim \exp \left[ i n \sum_{j \geq 0} (\lambda^0(x, t) + \sigma_j t) n^{-j/m_j} \right] \left( \sum_{j \geq 0} h_j n^{-j/m_j} \right)$$

を考えている。 $\sigma_j, h_j$  はともに定数（ベクトル）であり、順次定まるものである。

申請者の苦心はこの形の漸近解を見出すことに集中されている。創意に満ちたものであり、申請者が鋭い解析力と総合能力を持っていることを示している。

つぎに閉グラフ定理と漸近解の挙動とを関係づけるものとして、一つの関数拡張定理が補題の形で示されているが、これも興味深いものである。また参考論文はすべて主論文の基礎となったものであるが、これら自身秀れた手法の開発と興味ある結果が得られており、申請者の洞察力の秀れていることを示している。

よって、本論文は理学博士の学位論文として価値あるものと認める。