【 99 】

氏　　　名	田(た) 端(ばた) 正(まさ) 久(ひさ)
学位の種類	理　学　博　士
学位記番号	論理博第 587 号
学位授与の日付	昭和 52 年 11 月 24 日
学位授与の要件	学位規則第 5 条第 2 項該当
学位論文題目	**Uniform Convergence of the Upwind Finite Element Approximation for Semilinear Parabolic Problems** (半線形放物型問題に対する上流有限要素近似の一様収束性)
論文調査委員	(主査)教授 山口昌哉　教授 溝畑　茂　教授 一松　信

論　文　内　容　の　要　旨

偏微分方程式の近似解法には差分法と有限要素法の2つがある。差分法も有限要素法も微分方程式が成立する空間を離散化して有限の算法とすることにおいては同様であるが，差分法は平行格子による離散化であり，有限要素法は単体分割を用い，基底関数の線形結合による近似であり，差分法とくらべて節点の位置の撰択にははるかに大きい自由度がある。このことは境界近似の良さを導き有限要素法が種々の境界値問題に広く実際家によって使用される理由となっている。一方理論的な問題，たとえば，離散化の際の節点間隔をちぢめた場合，近似解の厳密解へ収束，その精度，安定性に関しては二乗積分のノルムを用いたいわゆる L^2 理論が，楕円型問題および放物型問題についてかなり詳しく研究されている。このことは有限要素法を，基底関数として区分的多項式を用いる Ritz-Galerkin 法であるという見方からは自然であるが，実際に望まれるのはむしろ L^∞ ノルムを用いた収束性，安定性，収束精度である。また，問題が半線型である場合，本質的に必要である。主論文では有限要素法を不規則格子上の差分法ととらえることにより，方程式の性質に応じ正しい有限要素スキムを作ることによって，有限要素解の L^∞ 安定性，L^∞ 収束，およびその収束精度を論じることに成功している。すなわち，申請者は，Dを R^n の領域として半線型放物型方程式：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=\nabla u-(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)u+F(x,\ t,\ u) & (x,\ t)\varepsilon(D\times(o,\ T)) \\ u=g(x,\ t) & (x,\ t)\varepsilon(\partial D\times(o,\ T)) \\ u(x,\ o)=uo(x) & x\varepsilon D \end{cases}$$

という初期値境界値問題を考察している。ここで $\boldsymbol{b}\cdot\nabla=\sum_{i=1}^{n} b_i(x)\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ であり，非線型項には十分応用範囲のひろい条件が課せられている。申請者の研究は先ず移流項 $(\boldsymbol{b}\cdot\nabla u)$ u に対して参考論文「3」で申請者自身が考察した上流差分近似に対応する上流有限要素近似を用いる。この方法は近似解の微分をおこなう要素を各節点 Pi での移流の方向 $\boldsymbol{b}$ (Pi) にしたがって選ぶ方法である。さらに非線型項の近

似には，集中質量近似を用いて差分法的な考え方を有限要素法に一般化したものを用いる。このように構成されたスキムの L^∞ 安定性を保証する条件は EXPLICIT なスキムでは，τ を時間の刻み，k はすべての要素の最小垂線長 $\boldsymbol{b}$ $\|\boldsymbol{b}\|$ をのノルムとするとき，下の不等式であらわされる。

$$\tau \leqslant \frac{k^2}{(n+1)+\|\boldsymbol{b}\|k}$$

これは従来の有限要素近似では得られない良好な条件である。従来のもので $\|\boldsymbol{b}\|$ が大きいときには k は非常に小となり，潮流をふくむ拡散の問題などでは有限要素法の不利な点となっていた。

一般に有限要素近似は差分法の意味の Local Consistency を持たないことが，従来の手法によって L^∞ 収束性とか収束の精度を出すためには困難点となっていた。申請者はこの難点を克服するために次のように考えた。つまり，楕円型の同じ境界値問題に関連した有界線作用素に微小量を乗じたものを前述の有限要素近似作用等に加えることにより Local Consistency を回復するという工夫である。この独創的な工夫によって L^∞ 収束と収束精度が L^∞ ノルムについても証明されることになり，目的が達せられた。参考論文「1」は楕円型の問題で領域に角がある場合に，その部分にだけは楕円型の微分方程式のその領域の解を基底関数として用いることによって，従来証明できなかった有限要素解の厳密解への収束，収束精度等を厳密に証明したものである。

参考論文「2」では，楕円型のノイマン境界値問題についての高精度の有限要素近似に対する数学的研究であって，前述の参考論文「3」とともに申請者の数値解析の数学的理論についての独創的な研究である。

論文審査の結果の要旨

微分方程式の境界値問題についての数値解法の数学的理論は1928年 Courant-Friedrichs-Lewy の差分法の収束に関する論文がはじまりである。有限要素法についての数学的理論は1943年の Courant の論文をもって嚆矢とする。以後，電子計算機の発達とともに先ず差分法の数学的理論が多くの数学者によって研究され，更に少しおくれて1956年以後の技術者による有限要素法の再発見以来，科学技術計算にはすこぶる広範囲にこの方法が用いられた。これらの基礎づける数学的研究は1965年の Friedrich Keller の論文以後 Birkhoff, Bramble, Douglas-Dupont, Wheeler, 等によって主として楕円型，放物型の方程式の近似に関して進められた。その後，藤井宏によって双曲型方程式の初期値境界値問題についても有限要素近似の収束や安定性，収束精度などが求められた。しかし，これらの研究はすべて2乗積分のノルムの意味での収束，安定性，収束精度であって，有限要素法が Ritz-Calerkin 方法の拡張であることからはきわめて自然であるが，非線型問題への応用などからはむしろ L^∞ ノルムの意味の研究が望まれていた。これについては Ciarlet-Raviart の論文が1973年楕円型問題について解決をした。半線型放物型問題についての L^∞ 収束性のみは牛島照夫（1975年）によって半群の立場から解決されたが，収束精度及び安定性については未解決であった。申請者は卓抜なアイデイアで，新しい線型作用素をつけ加えることによって有限要素近似の Local Consistency を回復し，目的を達することができた。参考論文「3」は主論文に用いられた移流項の有限要素近似を提案している論文であって，これによって移流項をふくむ拡散の場合にも L^∞ の安定性が，従来より格段に良好なきざみ巾の条件のもとに証明でき

るようになり，主論文における非線型問題にも適用できたのである。参考論文「１」は角のある領域の処理に関する新しい研究であり，参考論文「２」は高次の近似をあたえる有限要素法の数学的研究である。

要するに申請者の研究は有限要素法による偏微分方程式の解の近似に関して，従来の有限要素法の研究方法にとらわれることなく，これを非均一なメッシュ上の差分法という新しい見方をとることによって，新しい重要な結果を得たわけであって，申請者の豊富な学識と研究能力を示している。

よって，本論文は理学博士の学位論文として価値あるものと認める。