

氏 名	河 野 明 こう の あきら
学位の種類	理 学 博 士
学位記番号	論 理 博 第 599 号
学位授与の日付	昭 和 53 年 3 月 23 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 5 条 第 2 項 該 当
学位論文題目	<b>Hopf algebra structure of simple Lie groups</b> (単純リー群のホップ代数構造)

論文調査委員 (主査) 教授 戸 田 宏 教授 永 田 雅 宜 教授 島 田 信 夫

### 論 文 内 容 の 要 旨

リー群は、回転群やユニタリ群を含む、数学における基礎的な概念であり、その位相的構造の解明は位相幾何学において重要な課題の一つである。多くの場合、リー群の位相的構造は、単純リー群のそれに帰着される。E. Cartan は単純リー群を、局所同型の意味で、古典型のものと例外型の  $G_2$ ,  $E_4$ ,  $E_6$ ,  $E_7$ ,  $E_8$  に分類した。この分類に従って、単純リー群  $G$  の  $\text{mod } p$  コホモロジー環

$$H^*(G; \mathbb{Z}_p)$$

の構造は、Borel, 荒木, 等によって順次決定されたのである。

一方、リー群はその積によって  $H$ -空間となり、その  $\text{mod } p$  コホモロジー環は Hopf 代数の構造をもつ。この Hopf 代数はその双対代数として、Pontrjagin 環をもち、また分類空間のコホモロジー類、即ち特性類とも密接な関連をもつものである。単純群  $G$  に対する Hopf 代数  $H^*(G; \mathbb{Z}_p)$  のうち、その構造が未決定のものとして、

$$H^*(E_8; \mathbb{Z}_5), \quad H^*(\text{Ad}E_6; \mathbb{Z}_3)$$

が残されていた。

申請者河野明は、この2つの Hopf 代数の構造を決定し、併せてコホモロジー作用素の作用も定めた。

例外群  $E_8$  は 5-torsion をもつ唯一の例外群であり、その  $\text{mod } 5$  コホモロジー環は

$$H^*(E_8; \mathbb{Z}_5) = \mathbb{Z}_5[x_{12}] / (x_{12}^5) \\ \otimes \wedge (x_3, x_{11}, x_{15}, x_{23}, x_{27}, x_{35}, x_{39}, x_{47})$$

で与えられる。2-torsion, 3-torsion に関する従来の方法では、この Hopf 代数の構造を決定するには不十分である。

申請者は  $H^*(E_8; \mathbb{Z}_5)$  の部分環に関する Cotor の構造、 $E_8$  の Weyl 群に関する不変形式、 $E_8$  の 3-結ファイバー空間の構造および対称空間  $\text{EVIII} = E_8/D_8$  に関する転入定理を論議し、これらを総合することによって、 $H^*(E_8; \mathbb{Z}_5)$  における Hopf 代数構造の決定に成功した。その結果を、簡約された

余積  $\bar{\phi}$  で表せば次のようになる。

$$\bar{\phi}(x_3) = \bar{\phi}(x_{11}) = \bar{\phi}(x_{12}) = 0,$$

$$\bar{\phi}(x_{12+i}) = x_{12} \otimes x_i,$$

$$\bar{\phi}(x_{24+i}) = 2x_{12} \otimes x_{12+i} + x_{12} \otimes x_i,$$

$$\bar{\phi}(x_{36+i}) = 3x_{12} \otimes x_{24+i} + 2x_{12} \otimes x_{12+i} + x_{12} \otimes x_i,$$

但し、 $i=3$  および  $i=11$  とする。

$H^*(\text{Ad}E_6; \mathbb{Z}_3)$  の Hopf 代数構造の決定は、 $H^*(E_6; \mathbb{Z}_3)$  における構造と対称空間  $E_{II} = E_6/A_5 \cdot A_1$  との関連においてなされる。

以上のような内容をもつ申請論文は、単純リー群の Hopf 代数構造の決定問題を最終的に解決したものと高く評価され、また申請者の卓抜した能力を十分に示しているものといえることができる。

### 論文審査の結果の要旨

リー群は数学の各方面に応用される重要な概念であり、その位相的構造の解明は近年急速になされてきた。リー群の位相的構造は、単純リー群のそれに帰着される。また、単純リー群は、局所同型の意味で古典型の  $A_l, B_l, C_l, D_l$ 、と例外型の  $G_2, F_4, E_6, E_7, E_8$ 、に分類される。

単純リー群  $G$  の mod  $p$  コホモロジー環  $H^*(G; \mathbb{Z}_p)$  の構造は Borel, 荒木, 等によって決定された。

ついで、特性類等と密接な関連をもつ、 $H^*(G; \mathbb{Z}_p)$  の Hopf 代数としての構造が問題となった。但し、 $H^*(G)$  が  $p$ -torsion をもたない場合には、 $H^*(G; \mathbb{Z}_p)$  は原始的な元で生成される外積代数であり、自明な場合と考えることができる。以下、自明でない、即ち  $p$ -torsion をもつ場合をのべる。

$G$  が古典型の場合には、後に申請者と石戸谷一戸田が定めた  $H^*(\text{Spin}(n); \mathbb{Z}_2)$ ,  $H^*(\text{Ss}(4m); \mathbb{Z}_2)$  を除けば、Baum-Browder が決定している。

$G$  が例外型の場合、 $G_2$  および  $F_4$  については Borel および荒木が Hopf 代数構造を決定しているが、残りの場合はすべて申請者またはその協力によって決定されたといえることができる。

特に主論文で決定された  $H^*(E_8; \mathbb{Z}_5)$  の場合は、それまでに用いられて来た方法が低次元にしか効力を発揮せず、最も難解なものとして残されていた。

申請者河野明は主論文において、残された2つの場合  $H^*(E_8; \mathbb{Z}_5)$  および  $H^*(\text{Ad}E_6; \mathbb{Z}_3)$  に精力的に取り組み、Cotor, Wey 群の不変形式、3一連結ファイバー空間および対称空間の議論を有効に組み合わせることによって、これらの Hopf 代数構造の決定に成功し、この種の問題の解決に終止符を打ったのである。

申請者の10編の参考論文は何れも、リー群またはその分類空間のコホモロジーに関する、優れた研究であり、極めて短期間の間にこれだけの成果を挙げたことは、申請者の卓抜した研究能力を示すものである。主論文はこれら一連の研究成果の頂点におくことができるであろう。

以上、申請者はリー群の位相的構造の研究に画期的成果を挙げ、その業績はこの方面の研究の発展に寄与する所多大である。

よって、本論文は理学博士の学位論文として価値あるものと認める。