氏　　　名	谷口雅彦（たにぐちまさひこ）
学位の種類	理学博士
学位記番号	論理博第666号
学位授与の日付	昭和54年11月24日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文題目	Abelian differentials whose squares have closed trajectories on compact Riemann surfaces （閉リーマン面上の二乗が閉軌道をもつ一次微分）
論文調査委員	（主査）教授 楠　幸男　　教授 溝畑　茂　　教授 池部晃生

論 文 内 容 の 要 旨

閉リーマン面上の2次微分 $\varphi(z)dz^2$ が面上の曲線 c に沿って正であるとき，c をその2次微分の軌道 (trajectory) という。Teichmüller 以来 Jenkins, Strebel 等によって2次微分の軌道は等角写像或いは擬等角写像の極値問題と密接な関係があることが分ってきた。とくに Strebel は，閉軌道をもつ2次微分，すなわち正則な軌道がすべて閉曲線になる2次微分について考察し重要な結果をえた。これに対して申請者は，アーベル微分を2乗してえられる2次微分が閉軌道をもつものについて研究し以下のように新しい諸結果をえた。

種数 $g(>1)$ の Teichmüller 空間 T_g 上の一点 R_0（閉リーマン面）上の正則なアーベル微分 θ_0 の2乗 θ^2_0 が閉軌道 γ をもつとし，R_0 の T_g における ε 近傍の点R上の正則アーベル微分 θ が次の条件をみたすとする；

1) $\left|\int_{A_i}\theta_0-\int_{A_i}\theta\right|<\varepsilon$　$(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ g)$

2) $\int_{\gamma}\theta$ は実数

ただし $\{A_i,\ B_i\}_{i=1}^{g}$ は R_0 及び R_0 から導かれるR上の標準ホモロジー基底である。このとき θ^2 は γ と free homotopic な閉軌道をもつ（定理1）。これは閉軌道をもつという幾何学的性質をアーベル微分の周期条件からとらえたものといえる。

申請者は既に参考論文において正則周期再生微分の2乗が閉軌道をもつことを示したが，本論文ではそれが面の擬等角変形に対してどのように変化するかを解析的及び幾何的見地から調べた。例えば次のような結果をえている。T_g の点R上の閉曲線Cに関する正則周期再生微分を $\theta_{C,R}$ とする。すなわち $(w,\ \mathrm{Re}\theta_{C,R})=\int_C w$ が任意の調和微分wに対して成り立つ。このとき $\theta^2_{C,R}$ は閉軌道をもち，その適当な軌道によって面Rは有限個の2重連結領域 $\{W_{i,R}\}_{i=1}^{n}$ にわけられる (Strebel 分解)。$W_{i,R}$ の modulus を $m_{i,R}$ と表わす。このとき $R_0\varepsilon T_g$ に収束する点列 $\{R_k\}$ に対して $\lim_{k\to\infty} m_{i,R_k}=m_{i,R_0}$ $(i=1,2,\cdots\cdots n)$ となる（定

理2)。すなわち Strebel 分解の解析的連続性を示している。

主論文の後半では，閉リーマン面上で極をもつ2次微分で閉軌道をもつものについて研究している。まずそのような2次微分がどれ位あるかという問題に対して次のような解答を与えた。面R上に与えられた有限個の点 $\{Q_j\}$ で $(a_j/z^2+\cdots)\,dz^2$, $(a_j\leqq 0)$ なる高々2位の極をもつ2次微分の空間をSとし，$\{Q_j\}$ で高々2位の極をもち閉軌道をもつ2次微分の空間を S' とするとき S' は S の中で稠密である。すなわち任意の $\theta\varepsilon S$ と正数 ε に対して $\|\theta-\theta'\|<\varepsilon$ となる $\theta'\varepsilon S'$ が存在する。

次に面R上の二点 p, q において1位の極をもつ第3種基本微分 $\phi_{p,q}$ を考え，$-\phi^2_{p,q}$ が閉軌道をもつこと，更にその軌道の構造が本質的には正則周期再生微分の性質から分ることを示している。この目的のために申請者は，面上の単一閉曲線Cに対して定まる τ_g 上のある開集合 s_c から積空間 $T_{g-1,2}\times$ (上半平面) への同相写像を構成している。但し $T_{g-1,2}$ は種数が g-1 で2点を指定した Teichmüller 空間である。この事実は Teichmüller 空間の境界の研究にも役立つ興味あるものである。

参考論文は主論文の先駆的な仕事及び主論文に関連した結果やその新しい応用を含んでいる。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

種数gの閉リーマン面上の正則2次微分の全体は 3g-3次元空間をなし閉リーマン面の等角同値類と密接な関係があることは古くから知られていたが，Teichmüller が極値擬等角写像と2次微分の軌道との関係を指摘して以来，Schiffer, Jenkins や Strebel 等によって2次微分の軌道が等角写像論にも重要な役割を果たすことが認識されてきた。

主論文は，閉軌道をもつ2次微分をアーベル微分から研究したものである。閉リーマン面上の2次微分は非常に深い性質を内蔵しているがその正体がはっきりしない点が多い。これに対して申請者はよく性質の分っている正則周期再生微分や第3種基本微分の2乗が閉軌道をもつことを見出し，そしてそれらの2次微分の閉軌道に関連した定性的定量的性質を，主として面の擬等角変形すなわち，Teichmuller 空間上の変動という見地から研究を行い論文内容の要旨で述べたような興味ある諸結果をえた。これらの結果はこの方面に新しい知見をつけ加えるとともに，Teichmüller 空間論にも寄与するところ少くない。

とくに，2次微分の空間の中で閉軌道をもつものが稠密であるという結果をえたが，これは懸案の問題への一つの解答を与えたもので注目に値する結果である。

以上要するに本論文は極めて独創的で，この方面の重要課題に貴重な貢献を与えたものとして高く評価される。

参考論文は，主論文の基礎をなした研究のほか，閉リーマンの automorphism の位数に関するもの，主論文の方法を用いたリーマン面の変形理論に関連した研究等であり，いずれも興味深い。

よって，本論文は理学博士の学位論文として価値があるものと認める。