【114】

氏　　　名	寺　尾　宏　明 てら　お　ひろ　あき
学位の種類	理　学　博　士
学位記番号	論　理　博　第722号
学位授与の日付	昭和56年3月23日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文題目	Generalized exponents of a free arrangement of hyperplanes and Shepherd–Todd–Brieskorn formula （超平面の自由配置の一般化された指数とシェファード・トッド・ブリースコーンの公式）
論文調査委員	（主査）教授 中野茂男　教授 島田信夫　教授 佐藤幹夫

論文内容の要旨

主論文において，申請者は次の対象を考察する：Xは，複素ユークリッド空間 C^{n+1} 内で原点をとおる超平面有限個から成る族であり，（これをn次元超平面の配置—n-arrangement—という。）$|X|$によって，C^{n+1} 内の解析的部分集合としてのこれら超平面の和集合を表わす。$M=C^{n+1}-|X|$ とおく。考察の対象はMの位相とXの性質との関係である。

ユークリッド空間内の超平面有限個の族と言うと，数学では一見甚だ簡単な対象のように見えるが，少し詳しい性質を研究しようとすると実は簡単どころではなく，数学的に興味深くかつ困難な解析を要する研究課題であることが，先行する諸研究によって示されており，申請者の研究は Shepherd–Todd–Brieskorn の定理（STB 定理）の一般化に関するものである。

考察の背景には，複素多様体Yの上に因子Dがある時，Dに対数的な極をもつ一次微分形式芽の層 $\Omega^1{}_Y(\log D)$ の考察がある。これは申請者の指導者であった斎藤恭司が導入し，有用性が認められているものであるが，申請者は上記 C^{n+1} とXの場合について，これに双対的な概念を用いる。すなわち（原点 o における芽だけに注目して）

$$D(X)=\{\theta|\theta \text{ は原点 o での正則ベクトル場の芽で，} \theta Q\in Q\mathcal{O}\}$$

とおく。ここにQは $|X|$ の定義多項式，$\mathcal{O}$は原点での正則函数芽の環である。$D(X)$ は $\mathcal{O}$-係数の加群であるが，これが自由加群の時Xは自由な配置であるという。この時は $D(X)$ は $\mathcal{O}$上に $(n+1)$ 個の元から成る基底 $\{\theta_0, \theta_1\cdots\cdots, \theta_n\}$ をもつ。そこで θ_i の次数を d_i とおき，$(d_0, d_1\cdots\cdots, d_n)$ を，Xの一般斉次化された指数とよぶ。本論文の主要結果は次の定理である。

定理：Xが自由なn次元配置である時，Mのポアンカレ多項式 $P_M(t)$ は，$P_M(t)=\prod_{i=0}^{n}(1+d_it)$ で与えられる。

この結果は，実鏡映群の C^{n+1} への作用における鏡映面から成る配置Xに対して証明された STB 定理の，一般化であるのみならず，最近 Orlik–Solomon によって与えられた STB 定理の拡張をも含むもの

である。

主定理の証明に当っては，次の4種のデータが互に他を決定することが示される：(a) X の一般化指数 $(d_0, d_1, \cdots\cdots d_n)$，(b) $\Sigma_{x\in L(X)}\ \mu(x)(-t)^{r(x)}$，ここに $L(X)$ は，Xに属する超平面の共通部分たちを元とする束（その元 $x=(j_1,\cdots\cdots,j_r)$ は $\bigcap_{l=0}^{r} Hj_l$ であり，$r(x)=\mathrm{codim}\, x$），$\mu(x)$ はメービウス函数と呼ばれる整数値函数である。(c) Mのポアンカレ多項式 $P_M(t)$，(d) $|X|$ の定義多項式Qの次数及び，Xのヤコビイデアル $J(X)$ に関するヒルベノト多項式 $H(\nu)=H(Q/J(X), \nu)$。

(b)，(d)を仲介として，それ等と(a)，(c)との関係を定めつつ，主定理の証明に到達するのが，申請者が苦心し創意を発揮した主要な点であると思われる。本論文においては，（先行する STB や Orlik-Solomon の場合と違って）全空間 C^{n+1} に作用する有限群を予想しないで配置Xが考察され，Xが自由配置であるという“解析的条件”から，Mの位相に関する著しい結論が導かれている点が，大きな特徴であって，注目に値する。

論文審査の結果の要旨

申請者がとり上げた問題，すなわち，複素ユークリッド空間内の超平面の配置Xの性質と，$|X|$ の補集合Mの位相との結びつきを研究するという問題は，Shepherd，Todd，Brieskorn 等以来，数学者の関心を惹いて来たもので，その背後には，複素多様体Y上に因子Dが与えられた時，D上に特異性をもつ解析的諸対象（函数・微分方程式等）の考察がある。従来の研究においては全空間 C^{n+1} に作用する有限群が予想されていたのに対し，本論文で，配置Xが自由であるとの解析的性質だけに基づいて，STB 型の定理を樹立したのは，この方面の研究に大きな寄与をなしたものである。超平面配置の問題は，YとDの対において $Y=C^{n+1}$，$D=|X|$ とおいた特殊の場合であるのみならず，局所化された問題，すなわち，Yの代りに，考える点の適当な近傍Uをとって，Uと$U\frown D$の対について考えた問題，について言えば，これは超平面配置の問題そのものであると，言ってもよい程である。こう考える際，全空間に作用する群を予想しない理論が数等強力であることは，言うまでもない。

主定理の証明に当って，申請者は，束 $L(X)$ 上の函数fに対し i-cumulative $(i=0, 1, \cdots\cdots, n)$ なる概念を導入することにより，在来知られている諸種の組合せ論的函数を，統一的に特徴づけることに成功した。一方空間Mの Betti 数などの位相幾何的な函数も，同じく cumulativity の条件を満たすことを示して，組合せ論的函数・位相幾何的函数そしてDに対数的極をもつ微分形式という解析的量の間の関連を示したもので，ここに申請者の独創性と力量が発揮されている。

参考論文〔1〕，〔2〕は，主論文における研究の背景をなす，対数的極をもつ微分形式に関するものであり，〔3〕，〔4〕は超平面の自由配置に関し主論文の先駆をなす研究である。〔5〕では，ユニタリ鏡映群より生ずる配置が自由配置であることが示され，申請者の結果が Orlik-Solomon のを含むことが明らかになる。これらの業積は，主論文と共に申請者の優れた研究能力を示す。

以上により，本論文は理学博士の学位論文たるに値すると認める。