【115】

氏　　　　名	三輪哲二（みわてつじ）
学位の種類	理学博士
学位記番号	論理博第723号
学位授与の日付	昭和56年3月23日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文題目	Clifford operators and Riemann's monodromy problem （クリフォード演算子とリーマンのモノドロミー問題）
論文調査委員	（主査）教授 佐藤幹夫　教授 松浦重武　教授 一松　信

論文内容の要旨

1976年前後に，それまでまったく無関係と思われたいくつかの概念（ある種の量子場のオペレーター，クリフォード群，線型微分方程式の変形理論）の間に，新しい重要な関連の存在することが明らかになった。その理論は，申請者の参考論文（〔7〕～〔24〕）において，申請者と佐藤幹夫・神保道夫を中心とする共同研究として展開されて来た。本論文は，この発展を踏まえた上で，線型常微分方程式系のモノドロミーに関する，拡張された意味でのリーマンの問題を記述するホロノーム量子場（クリフォード演算子）を，任意数の確定および不確定型特異点の分布をもつ場合に構成し，その性質を解明した。これは，これまでに参考論文において，特別な場合または個々の物理的問題に必要な場合について個別に解決されて来たところの基本問題を，最も一般的な場合に一挙に解決した画期的な論文である。

この一連の論文の背景にあるのは次の諸問題である。

(1)　モノドロミーに関するリーマンの問題とパンルヴェの超越函数。

前世紀すでにリーマンはモノドロミー群の重要性に注目し，これによって微分方程式および解析函数をとらえるべきことを強調した。一方，今世紀初めパンルヴェは，楕円函数が‘動く分岐点’をもたぬ1階非線型常微分方程式によって特徴づけられることに着目して，同様な2階の方程式の研究に挑戦し，最終点に6種類の全く新しい函数（パンルヴェ超越函数，Ⅰ型～Ⅵ型）に帰着することを発見した。その直後，ガルニエ，シュレジンガーらは，リーマンの思想を実行に移して，モノドロミー保存的変形を研究し，そのような変形が非線型微分方程式によって記述できること，とくに2階単独方程式の変形の場合にはそれがパンルヴェの発見した6種類の方程式に帰着できることを明らかにし，パンルヴェ超越函数の背景にリーマンの問題が横たわっていることを示したのであった。

これらは今世紀初期の解析学における重要な達成であったが，難解な深い理論として敬遠され，半世紀に及ぶ長い間，半ば忘れられていた。

(2)　統計力学における2次元イジング模型。

強磁性の最も簡単なモデルである2次元イジング模型は，L．オンサーガーによってその自由エネルギ

一の厳密解がつとに与えられていたが，その相関函数の厳密解は1970年代中ごろにＴ．Ｔ．ウー，Ｂ．マッコイらのグループによって初めて成し遂げられた。彼らは２点相関函数の厳密解を，多重積分の無限級数の形で正しく求め，さらにそれがオンサーガー理論で与えられている臨界温度の近傍でのいわゆるスケール極限において，上記に述べたパンルヴェ超越函数の一つ（Ⅲ型）によって閉じた形に表わされることを見出した。これは２次元イジング模型について，オンサーガー以後30年ぶりに得られた決定的な結果であって，申請者らの研究の出発点となったものである。

申請者は，共同研究者佐藤および神保とともに，ウーらの結果にパンルヴェ函数が現われた著しい事実の根拠を省察し，結局その事実の背後には場の量子論とモノドロミー理論の間の予期されなかった一般的関係の存在することを見出すに至って，これをホロノーム量子場の理論として体系づけたものである。その応用として，ウーらの結果を拡張して２次元イジング模型のｎ点相関函数を厳密に求めたほか，場の量子論における２次元のフェダーブッシュ模型のｎ点グリーン函数，１次元不透過ボーズガスのｎ粒子密度行列，等がいずれもモノドロミー保存変形理論にもとづき拡張された意味のパンルヴェ型多変数超越函数として厳密にかつ閉じた形で求められた。（参考論文〔7〕～〔15〕，〔18〕）

このように変形理論によって解かれる諸例に現われる相関函数，或いはグリーン函数等を抽象化して，一般のモノドロミー保存的変形の場合にそれに相当する量（タウ函数）を構成することが出来る。そのような一般論は，申請者と神保，上野との共同研究として，〔19〕～〔22〕においてなされ，シュレジンガーらの古典的結果を任意の不確定特異点をふくむ最も一般の場合に拡張する問題もそこで完全に解決している。

以上の基礎の上に立って，主論文においては，上に述べたような任意数の確定および不確定特異点の分布をもつ最も一般な線型常微分方程式系のモノドロミー保存変形に対し，これを表現するホロノーム量子場のオペレーター（クリフォード演算子）の構成に完全に成功したものである。これよりとくに，前記参考論文で数学的に導入された一般のタウ函数が，これまでに得られているイジング模型やその他いくつかの物理的模型の場合と同様に，場のオペレーターの積の真空期待値になることが示されるに至った。

なお参考論文のうち〔1〕～〔5〕，および〔6〕，〔25〕は申請者の初期の研究であって，前者は，線型偏微分方程式を，また後者は場の量子論におけるファインマン積分のランダウ特異点の構造を，それぞれ主として近年急速に発展した超局所解析の方法によって研究したものである。

論文審査の結果の要旨

申請者の論文は，1976年ごろより申請者と佐藤幹夫・神保道夫との共同研究により進められてきた“ホロノーム量子場の理論”（参考論文〔7〕～〔18〕，〔23〕）の発展であり，より直接には，1979―1980年に申請者が神保道夫・上野喜三雄と共に進めて来た“モノドロミー保存変形の一般理論”（参考論文〔19〕～〔22〕，〔24〕）の延長上に位置する。

ホロノーム量子場の理論において，申請者らのグループは，２次元イジング模型の２点相関函数の厳密解をはじめて求めたＴ．Ｔ．ウー，Ｂ．マッコイらのグループによる画期的な仕事を，モノドロミー理論と結びつけて解釈しなおすことにより一般的理論を構築し，その応用として２次元イジング模型の多点相関函数のほか，フェーダーブッシュ模型の多点グリーン函数，１次元不透過ボーズ気体の簡約密度行列等が

いずれも，モノドロミー保存変形の理論により得られる非線型微分方程式系の解として，即ち，広義のパンルヴェ型超越函数として，閉じた形に求められることを示した。この一連の仕事は発表直後からいち早く統計物理学および素粒子物理学の研究者の関心を集め，たびたび国際会議においてとり上げられ，また現在ソ連邦科学アカデミーによるロシア語訳が進められている。

この研究の背景は，数学の側においては第一に，リーマンに由来する古典的なモノドロミーの問題であって，今世紀初めころパンルヴェによって発見された新しい超越函数を特徴づける非線型微分方程式（パンルヴェ方程式）が実はモノドロミー保存的変形の理論から自然に導かれるものであることも，1910年代にガルニエ，シュレジンガーの深い研究を通じて明らかにされていた。そしてこれらは全く新しい解析学の萌芽を暗示するものであったが，不幸にして歴史は直ちにそのように進まず，彼等の仕事は敬遠され，およそ50年の間，僅かの研究を除きほとんどかえりみられなかった。それが，物理学側のT．T．ウー，B．マッコイらによる上記の仕事を契機として，申請者のグループによる広汎な研究に発展し，他方数学の側においても，ガードナー・グリーン・クラスカル・ミウラらに始まる数学的ソリトン理論と逆散乱法の急激な発展の中で，アブロヴィッツらの研究が発端となり，ソリトン理論におけるスペクトル保存変形理論と，パンルヴェ超越函数・モノドロミー保存変形理論との間に密接な関係のあることが次第に明らかにされ，かくて両者あいまって，上述の古典的なモノドロミー理論は再び熱い関心の対象となるに至っているのが現状である。

申請者はさらに理論の数学的側面の整備に目を転じ，神保・上野と共に〔9〕～〔22〕においてモノドロミー保存的変形の一般論を建設した。これにより，特殊な場合を論じていたガルニエ，シュレジンガーの先駆的な仕事は数十年の時間を経て，最も一般の場合にまで完全に拡張された。さらに，相関函数，グリーン函数等を一般化して数学的タウ函数の定義も一般的に与えられ，これが古典的な楕円函数およびアーベル函数の理論におけるテータ函数の“非アーベル的”拡張に相当する重要な意義をもつものであることを，その詳しい性質とともに論じている。

これらを踏まえて，主論文において申請者が示した結果は決定的である。即ちそこで申請者は，上記の最も一般なモノドロミー保存変形理論が，これまでの特殊な場合（イジング模型等の）と全く平行に，ホロノーム量子場のオペレーター（クリフォード作用素）によって完全に記述され，一般の数学的タウ函数もそれら場のオペレーターの積の真空期待値に一致することを確立した。さらに主論文以後に発表された続篇において，このような一般の変形理論から得られる‘パンルヴェ型多変数超越函数’はすべて動く分岐点をもたぬこと，タウ函数は動く分岐点も動く極ももたぬことを全く一般に証明したのである。パンルヴェ以後，彼の結果を拡張することは絶望的に困難と考えられ，最も簡単な，1変数で3階単独方程式の場合すら全く手がついていなかった事を想えば，この世紀の難問がかくも一般的にかつ明晰な強い形で肯定的に解決されたことは驚嘆すべき事である。これは新しい方法の勝利であり，とりわけ申請者により主論文中に展開されたクリフォード演算子の一般論の有効性とみのり豊かさを如実に示すものである。明らかにこれらの結果は，数学と数理物理学の今後の発展に著しく貢献するものである。

申請者は，従来の著しい業績によりすでに国際的に高い評価を得ている研究者であるが，この主論文をふくむ最近の仕事は，申請者が卓越した実力をもち，独立の研究者として一級であることを改めて確証す

るものである。
初期の論文（〔1〕～〔5〕；〔6〕，〔25〕）は超局所解析学に関するものであり，申請者の才能をよく示すものである。
よって，本申請論文は理学博士の学位論文として価値あるものと認める。