数理解析研究所講究録
第 1902 巻 2014 年 137-154

分散型方程式の平滑化評価式に関する最近の研究

杉本 充 (MITSURU SUGIMOTO) *

シュレディンガー方程式に代表される「分散型」方程式には「平滑化作用」と呼ばれるある共通の現象が成立しており，その多くは「平滑化評価式」とよばれる時空間評価式を用いて表現される．この評価式はこれまでスペクトル解析や調和解析などの高度な手法により導出されてきたが，著者と Michael Ruzhansky 氏 (Imperial College London) との最近の共同研究により，これは実は単純な事実の別表現にすぎないことなどがわかってきている．その際に用いられた「比較原理」＋「正準変換」という新しい考え方は，調べたい方程式の評価式を既に評価式が詳しく調べられている別の方程式から導くという素朴なアイデアに由来するものであるが，それなりに汎用性を備えており，他の幅広い問題への応用も期待されている．本稿では，この新しい方法論を用いて如何に平滑化評価式が導かれるかを説明するとともに，最近の Neal Bez 氏 (埼玉大)，Matania Ben-Artzi 氏 (Hebrew University) らとの共同研究にもとづく関連する話題についても紹介したい．なお以下に於て，第 1〜9 節は [15, 18]，第 10 節は [19]，第 11 節は [14]，第 12 節は [16]，第 13 節は [2, 3, 17]，第 14 節は [1] の内容にそれぞれもとづいている．

1. シュレディンガー方程式の平滑化作用

まずは，シュレディンガー方程式

$$\begin{cases} (i\partial_t - \triangle_x)\, u(t,x) = 0 \\ \qquad\qquad u(0,x) = \varphi(x) \in L^2(\mathbf{R}^n) \end{cases}$$

の平滑化作用について簡単に説明しておく．F および F^{-1} をそれぞれフーリエ変換，逆フーリエ変換とすれば，この方程式の解は

$$\begin{aligned} u(t,x) &= e^{-it\Delta_x}\varphi(x) \\ &= F^{-1}e^{it|\xi|^2}F\varphi(x) \end{aligned}$$

と表される．これに対して Plancherel の定理を用いれば，時刻 t を固定するごとに

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbf{R}^n_x)} = \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$$

が成立することが容易にわかる．実際 $u(t,x)$ は，時刻 t における自由粒子の存在確率の密度関数を表しており，$E \subset \mathbf{R}^n$ における自由粒子の存在確率は

$$\int_E |u(t,x)|^2\,dx$$

で与えられることを考えれば，このことは物理的には自明である．

一方，($n = 1$ の場合に) 位置 x を固定して時間に関して積分すれば

$$\left\| |D_x|^{1/2} u(\cdot, x) \right\|_{L^2(\mathbf{R}_t)} \le \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R})}$$

* 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 (Graduate School of Mathematics, Nagoya University).

が得られる．このことも簡単な変数変換と Plancherel の定理とにより容易に示すことができる．この評価式は，時刻 t に関して積分することにより空間変数 x に関し 1/2 の滑らかさの増大が観測されることを意味しており，このような現象は**平滑化作用**とよばれている．また，これより $s>1/2$ に対して

$$\left\|\langle x\rangle^{-s}|D_x|^{1/2}u(t,x)\right\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}_x)}\lesssim\|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R})}.$$

となるが，このように 解 $u(t,x)$ を時間 t と空間 x 両方について積分した評価式は**時空間評価式**とよばれている．

このような平滑化作用の物理的な解釈として，ポテンシャルを持たない自由なシュレディンガー方程式の解の特異性は古典軌道

$$(x,\xi)\mapsto(x+t\xi,\xi)$$

に沿って速度無限大で伝播しており，初期値の特異性は次の瞬間には遠方へ飛び去って解がなめらかになるのだと理解することもできる．ただし初期値の遠方での特異性の影響が完全に無くなるわけではないので，全体としては 1/2 程度の滑らかさの増大にとどまるというわけである．

実は，平滑化作用はシュレディンガー方程式に限らず多くの方程式に見られる共通の現象で，歴史的には以下の KdV 方程式に関する結果が先に知られていた：

$$\begin{cases}\partial_t u+\partial_x^3 u+u\partial_x u=0,\\ u(0,x)=\varphi(x)\in L^2(\mathbf{R}).\end{cases}$$

この方程式の解は $u=u(t,x)$ $(t,x\in\mathbf{R})$ は先験的評価式として

$$\int_{-T}^{T}\int_{-R}^{R}|\partial_x u(x,t)|^2\,dxdt\le c(T,R,\|\varphi\|_{L^2})$$

を満たすことが示されており，さらにはこれを用いることにより方程式の弱解の存在も示されている（Kato [9]）．

2. 高次元の場合における平滑化評価式

ここまでは $n=1$ に限って話を進めてきたが，高次の空間次元 $n\ge 2$ においても，シュレディンガー方程式の平滑化作用を表現する様々な時空間評価式（**平滑化評価式**）

$$\left\|Te^{-it\Delta}\varphi(x)\right\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}_x^n)}\lesssim\|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}_x^n)}$$

が知られている．ただし T は次のいずれかのタイプである:

[A]	$T=\langle x\rangle^{-s}\|D_x\|^{1/2}$	$\cdots$	$s>1/2$,
[B]	$T=\|x\|^{a-1}\|D_x\|^{a}$	$\cdots$	$1-n/2<a<1/2$,
[C]	$T=\langle x\rangle^{-1}\langle D_x\rangle^{1/2}$	$\cdots$	$n>2$.

ここでタイプ[A] は Kenig, Ponce, &, Vega [11] による．タイプ[B] は Kato & Yajima [10] $(n\ge 3, 0\le\alpha<1/2)$, Sugimoto [22] $(n\ge 2, 1-n/2<\alpha<1/2)$ により，$\alpha=1/2$ では成立しないこと (Watanabe [26]) も知られている．タイプ[C] は Kato & Yajima [10] の結果であり，$\langle x\rangle^{-1}$ を $\langle x\rangle^{-s}$ $(s<1)$ に置き換えると成立しないこと，$n=2$ の場合には $\langle x\rangle^{-1}$ を $\langle x\rangle^{-s}$ $(s>1)$ に置き換えれば成立し，$s\le 1$ では成立しないこと (Walther [24]) なども知られている．これらの仕事は，Sjörin [21], Constantin & Saut [6], Vega [23] らにより独立に示された局所的な平滑化評価式 ($L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}_x^n)$ を $L^2_{loc}(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}_x^n)$ でおきかえたもの) が契機となっている事を付け加えておく．

なお，シュレディンガー方程式に関して以下は同値であり，上記の結果は，制限定理もしくは Resolvent 評価 を示すことにより証明されている：

- 平滑化評価
$$\left\| Te^{-it\Delta} f(x) \right\|_{L^2(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^n_x)} \lesssim \|f\|_{L^2(\mathbf{R}^n_x)}$$
- 制限定理
$$\left\| \widehat{T^* f}_{|S^{n-1}_\rho} \right\|_{L^2\left(S^{n-1}_\rho\right)} \lesssim \sqrt{\rho} \|f\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$$
ただし，$S^{n-1}_\rho = \{\xi;\, |\xi| = \rho\}$, $(\rho > 0)$.
- Resolvent 評価
$$\sup_{\operatorname{Im}\zeta > 0} |(R(\zeta) T^* f, T^* f)| \lesssim \|f\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n)}$$
ただし，$R(\zeta) = (-\Delta - \zeta)^{-1}$.

3. 方程式の一般化

ここでは，より一般の方程式
$$\begin{cases} (i\partial_t + a(D_x))\, u(t,x) = 0 \\ u(0,x) = \varphi(x) \end{cases}$$
$(t \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}^n)$ を考え，その解
$$\begin{aligned} u(t,x) &= e^{ita(D_x)} \varphi(x) \\ &= F^{-1} e^{ita(\xi)} F \varphi(x) \end{aligned}$$
に対する平滑化評価式
$$\left\| T e^{ita(D_x)} \varphi(x) \right\|_{L^2(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^n_x)} \lesssim \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}^n_x)}$$
を考察する．また，方程式
$$\begin{cases} \left(\partial_t^2 + a(D_x)^2\right) u(t,x) = 0 \\ u(0,x) = \varphi_0(x), \quad \partial_t u(0,x) = \varphi_1(x) \end{cases}$$
の解 $u(t,x)$ も
$$e^{\pm ita(D_x)} \varphi_0, \qquad \frac{e^{\pm ita(D_x)}}{a(D_x)} \varphi_1$$
の一次結合であるので，この方程式に対する平滑化評価式の問題ともみなすことができる．ここで $a(D_x) = F^{-1} a(\xi) F$ であり，$a(\xi) = |\xi|^2$ の場合がシュレディンガー方程式となる．また T は空間変数 x に関する擬微分作用素であり，シュレディンガー方程式の場合には $T = \langle x \rangle^{-s} |D_x|^{1/2}$ などいろいろなタイプものをとることができることはすでに述べたとおりである．

この平滑化評価式は，様々な物理的な問題において登場する方程式の基本評価式のひとつとなっている：

- $a(\xi) = |\xi|^2 \cdots$ Schrödinger 方程式
$$i\partial_t u - \Delta_x u = 0$$
- $a(\xi) = |\xi| \cdots$ 波動方程式
$$\partial_t^2 u - \Delta_x u = 0$$

- $a(\xi)=\sqrt{|\xi|^2+1}$ $\cdots$ 相対論的 Schrödinger
$$i\partial_t u+\sqrt{-\Delta_x+1}\,u=0$$
- $a(\xi)=\sqrt{|\xi|^2+1}$ $\cdots$ Klein-Gordon
$$\partial_t^2 u-\Delta_x u+u=0$$
- $a(\xi)=\xi^3 \quad (n=1)$ $\cdots$ Korteweg-de Vries
$$\partial_t u+\partial_x^3 u+u\partial_x u=0$$
の主部.（底が浅い水面波の方程式）
- $a(\xi)=|\xi|\xi \quad (n=1)$ $\cdots$ Benjamin-Ono
$$\partial_t u-\partial_x|D_x|u+u\partial_x u=0$$
の主部.（底が深い水面波の方程式）
- $a(\xi)=\xi_1^2-\xi_2^2 \quad (n=2)$ $\cdots$ Davey-Stewartson
$$\begin{cases} i\partial_t u-\partial_x^2 u+\partial_y^2 u=c_1|u|^2u+c_2u\partial_x v \\ \partial_x^2 v-\partial_y^2 v=\partial_x|u|^2 \end{cases}$$
（hyperbolic-hyperbolic）の主部.（底が浅い２次元水面波の方程式）
- $a(\xi)=$ ３次多項式 $\quad (n=2)$，例えば
$$\xi_1^3+\xi_2^3,\quad \xi_1^3+3\xi_2^2,\quad \xi_1^2+\xi_1\xi_2^2 \cdots \mathrm{Shrira}$$
（底が深い２次元水面波の方程式）
- $a(\xi)=$ ２次形式 $(n\geq 3)$ $\cdots$ Zakharov-Schulman （低振幅・高周波の波と音響波との相互作用）

これらの方程式の解に対する平滑化評価式は，例えばシュレディンガー方程式の場合などの平滑化作用などの現象を記述しているという側面のほか，非線形項の評価を主部の評価に吸収させるためのテクニックとしての側面も持つ．例えば，非線形方程式
$$\begin{cases} (i\partial_t+a(D_x))\,u(t,x)=F(D_xu(t,x)) \\ u(0,x)=\varphi(x) \end{cases}$$
を Duhamel の原理により
$$u(t,x)=e^{ita(D_x)}\varphi(x)+\frac{1}{i}\int_0^t e^{i(t-s)a(D_x)}F(D_xu(s,x))\,ds$$
と書きなおして逐次近似により解を求める場合，非線形項の中の微分を回復させる道具としてしばしば用いられる．

4. 本稿で述べたい事

さてこれらの方程式に対する平滑化評価式の導出方法であるが，本稿では，従来の方法（例えば制限定理や Resolvent 評価を経由する方法）とは全く異なる方法を紹介する．特に，以下の事柄について概観する：

- すべての方程式の平滑化評価式は，単純な方程式の単純な評価式から導かれる．
- 様々な方程式の平滑化評価式には，多くの同値関係がある．
- これらの考察から，既知の結果を統一的に，かつ簡単に証明することができる．
- 同じ方法で，未知の結果を数多く与えることができる．

基本的アイデアは，調べたい方程式の平滑化評価式を既に平滑化評価式が詳しく調べられている別の方程式から導くことであり，その際に以下を基本的な道具として用いる：

- 比較原理 ⋯ 二つの方程式のシンボルの比較から，それぞれの解に対する評価式を比較する（新しい手法）.
- 正準変換 ⋯ 方程式のシンボルの座標変換により方程式そのものを変換し，その変換された方程式に対する評価式からもとの方程式の評価式を導く（Egorov の定理に由来）.

5. 分散型方程式に対する平滑化評価式

まずは主結果について述べておこう．ただし簡単のため，ここでは最も単純な場合のみ扱うことにする．次の方程式を考える：

$$\begin{cases} (i\partial_t + a(D_x))\, u(t,x) = 0 \\ \qquad\qquad u(0,x) = \varphi(x) \in L^2(\mathbf{R}^n) \end{cases}$$

$a(\xi)$ は「主部」 $a_m(\xi)$ のみからなり，次の意味で**分散型**であるとする：

$$a(\xi) = a_m(\xi), \quad \nabla a_m(\xi) \neq 0 \quad (\xi \neq 0).$$

ただし

$$a_m(\xi) \in C^\infty(\mathbf{R}^n \setminus 0),\ \text{real-valued}, \qquad a_m(\lambda\xi) = \lambda^m a_m(\xi) \quad (\lambda > 0, \xi \neq 0)$$

とする．もちろんシュレディンガー方程式は分散型である．この分散型の仮定は，古典軌道すなわち常微分方程式

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (\nabla a)(\xi(t)), \quad \dot{\xi}(t) = 0 \\ x(0) = 0, \quad \xi(0) = k, \end{cases}$$

の解軌道が停留しない（よって特異性が無限遠まで分散する）ことを述べており，従って平滑化作用が期待される．実際，以下の諸結果が成立する：

定理 1 (タイプ [A]). $m > 0$ および $s > 1/2$ に対して

$$\left\| \langle x\rangle^{-s} |D_x|^{(m-1)/2} e^{ita(D_x)} \varphi(x) \right\|_{L^2(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^n_x)} \lesssim \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}^n_x)}.$$

定理 2 (タイプ [B]). $m > 0$, $(m-n+1)/2 < \alpha < (m-1)/2$ に対して（$a(\xi) \neq 0$ の時は $(m-n)/2 < \alpha < (m-1)/2$ でよい）

$$\left\| |x|^{\alpha - m/2} |D_x|^{\alpha} e^{ita(D_x)} \varphi(x) \right\|_{L^2(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^n_x)} \lesssim \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}^n_x)}.$$

定理 3 (タイプ [C]). $n - 1 > m > 1$ に対して（$a(\xi) \neq 0$ の時は $n > m > 1$ でよい）

$$\left\| \langle x\rangle^{-m/2} \langle D_x\rangle^{(m-1)/2} e^{ita(D_x)} \varphi(x) \right\|_{L^2(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^n_x)} \lesssim \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}^n_x)}.$$

これらの定理において $m = 2$ とした場合が，前述のシュレディンガー方程式の平滑化評価式となる．定理 1 の $m > 1$ の場合は Chihara [5]，定理 3 $a(\xi) = |\xi|^m$ で $n > m > 1$ の場合は（次数 $-m/2$, $(m-1)/2$ が最良であることも含めて）Walther [25] の結果である．

このように方程式の階数 m を一般化することにより，これら三つのタイプ [A]〜[C] の間の関係をいろいろと見てとることができる．実際，定理 3 は定理 1 と定理 2 に

含まれることがわかる．すなわちタイプ[A]とタイプ[C]の結果さえあれば，タイプ[C]の結果は不用ということになる．これを見るために $\chi(\xi)$ を原点の cut-off function とし，

$$\varphi_l = \chi(D_x)\varphi : \quad \text{低周波部分}, \qquad \varphi_h = (1-\chi(D_x))\varphi : \quad \text{高周波部分}$$

とおく．定理1より $s > 1/2$ に対して

$$\left\| \langle x\rangle^{-s} \langle D_x\rangle^{(m-1)/2} e^{ita(D_x)} \varphi_h(x) \right\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}_x^n)} \lesssim \|\varphi_h\|_{L^2(\mathbf{R}_x^n)},$$

定理2の $\alpha = 0$ の場合より

$$\left\| |x|^{-m/2} \langle D_x\rangle^{(m-1)/2} e^{ita(D_x)} \varphi_l(x) \right\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}_x^n)} \lesssim \|\varphi_l\|_{L^2(\mathbf{R}_x^n)}$$

をそれぞれ得るので，これらをあわせれば定理3となる．

6. 比較原理

さて，前節における結果を示すための強力な手段の一つである**比較原理**について解説しよう．それは初期値が同じである二つの異なる方程式

$$\begin{cases} (i\partial_t + f(D_x))\, u(t,x) = 0 \\ \qquad\qquad u(0,x) = \varphi(x) \end{cases}, \qquad \begin{cases} (i\partial_t + g(D_x))\, v(t,x) = 0 \\ \qquad\qquad v(0,x) = \varphi(x) \end{cases}$$

($t \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}^n$) の解

$$u(t,x) = e^{itf(D_x)}\varphi(x), \quad v(t,x) = e^{itg(D_x)}\varphi(x)$$

に関し，$f(\xi)$ と $g(\xi)$ が関係するある量の比較から不等式

$$\left\| w(x)\sigma(D_x) e^{itf(D_x)}\varphi(x) \right\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}_x^n)} \le \left\| w(x)\tau(D_x) e^{itg(D_x)}\varphi(x) \right\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}_x^n)}$$

を導く一般原理のことを意味している．具体的には，以下の定理の形で表現される．

定理 4 (1次元の比較原理). $f, g \in C^1(\mathbf{R})$ は *real-valued* でかつ *strictly monotone* とする．このとき，もし $\sigma, \tau \in C^0(\mathbf{R})$ が

$$\frac{|\sigma(\xi)|}{|f'(\xi)|^{1/2}} \le \frac{|\tau(\xi)|}{|g'(\xi)|^{1/2}}$$

をみたすならば，

$$\|\sigma(D_x) e^{itf(D_x)}\varphi(x)\|_{L^2(\mathbf{R}_t)} \le \|\tau(D_x) e^{itg(D_x)}\varphi(\tilde{x})\|_{L^2(\mathbf{R}_t)}$$

がすべての $x, \tilde{x} \in \mathbf{R}$ に対して成立する．従って特に，任意の関数 $w(x)$ に対して

$$\|w(x)\sigma(D_x) e^{itf(D_x)}\varphi(x)\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}_x)} \le \|w(x)\tau(D_x) e^{itg(D_x)}\varphi(x)\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}_x)}$$

が成立する．

定理 5 (2次元の比較原理). $f, g \in C^1(\mathbf{R}^2)$ は *real-valued* で，$\eta \in \mathbf{R}$ を固定するごとに $f(\xi,\eta)$，$g(\xi,\eta)$ は $\xi \in \mathbf{R}$ に関して *strictly monotone* とする．このとき，もし $\sigma, \tau \in C^0(\mathbf{R}^2)$ が

$$\frac{|\sigma(\xi,\eta)|}{|\partial f/\partial\xi(\xi,\eta)|^{1/2}} \le \frac{|\tau(\xi,\eta)|}{|\partial g/\partial\xi(\xi,\eta)|^{1/2}}$$

をみたすならば，

$$\left\|\sigma(D_x,D_y) e^{itf(D_x,D_y)}\varphi(x,y)\right\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}_y)} \le \|\tau(D_x,D_y) e^{itg(D_x,D_y)}\varphi(\tilde{x},y)\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}_y)}$$

がすべての $x, \tilde{x} \in \mathbf{R}$ に対して成立する．従って特に，任意の関数 $w(x)$ に対して

$$\|w(x)\sigma(D_x, D_y)e^{itf(D_x,D_y)}\varphi(x,y)\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}^2_{x,y})} \le \|w(x)\tau(D_x, D_y)e^{itg(D_x,D_y)}\varphi(x,y)\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}^2_{x,y})}$$

が成立する．

定理 6 (球対称の場合の比較原理)． $f, g \in C^1(\mathbf{R}_+)$ は *real-valued* でかつ *strictly monotone* であるのもとする．このとき，もし $\sigma, \tau \in C^0(\mathbf{R}_+)$ が

$$\frac{|\sigma(\rho)|}{|f'(\rho)|^{1/2}} \le \frac{|\tau(\rho)|}{|g'(\rho)|^{1/2}}$$

をみたすならば，

$$\|\sigma(|D_x|)e^{itf(|D_x|)}\varphi(x)\|_{L^2(\mathbf{R}_t)} \le \|\tau(|D_x|)e^{itg(|D_x|)}\varphi(x)\|_{L^2(\mathbf{R}_t)}$$

がすべての $x \in \mathbf{R}^n$ に対して成立する．従って特に，任意の関数 $w(x)$ に対して

$$\|w(x)\sigma(|D_x|)e^{itf(|D_x|)}\varphi(x)\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}^n_x)} \le \|w(x)\tau(|D_x|)e^{itg(|D_x|)}\varphi(x)\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}^n_x)}$$

が成立する．

比較原理を用いることにより，異なった方程式に対する平滑化評価式が実は同値なものであることなどが示される．例えば，シュレディンガー方程式の平滑化評価式と相対論的シュレディンガー方程式の平滑化評価式は同値である．実際

$$f(\rho) = -\sqrt{1+\rho^2}, \qquad g(\rho) = \rho^2$$

は

$$\frac{1}{|f'(\rho)|^{1/2}} = \frac{|2f(\rho)|^{1/2}}{|g'(\rho)|^{1/2}}$$

をみたすので，球対称の場合の比較原理（定理 6）より

$$\|\langle x\rangle^{-1}e^{-it\sqrt{1-\Delta_x}}\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}^n_x)} = \sqrt{2}\|\langle x\rangle^{-1}\langle D_x\rangle^{1/2}e^{it\Delta_x}\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}^n_x)}$$

となる．したがって，シュレデインガー方程式に対するタイプ [C] の平滑化評価式と相対的シュレディンガー方程式に対する評価式

$$\|\langle x\rangle^{-1}e^{-it\sqrt{1-\Delta_x}}\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}^n_x)} \le C\|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}^n_x)}$$

は同値であることがわかる．同じ理由で，以下の波動方程式と相対的シュレディンガー方程式に対する平滑化評価式の関連性も導かれる：

$$\left\|\langle x\rangle^{-s}e^{\pm it\sqrt{-\Delta_x}}\varphi_l(x)\right\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}^n_x)} \sim \left\|\langle x\rangle^{-s}|D_x|^{1/2}e^{-it\sqrt{1-\Delta_x}}\varphi_l(x)\right\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}^n_x)}$$

$$\left\|\langle x\rangle^{-s}e^{\pm it\sqrt{-\Delta_x}}\varphi_h(x)\right\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}^n_x)} \sim \left\|\langle x\rangle^{-s}e^{-it\sqrt{1-\Delta_x}}\varphi_h(x)\right\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}^n_x)}$$

ここで φ_l, φ_h は，それぞれ φ の低周波部分，高周波部分である．

比較原理の証明は容易である．以下，1 次元の場合に証明を与えておく．$\xi=f^{-1}(\eta)$ と変換して

$$\begin{aligned}\sigma(D_x)e^{itf(D_x)}\varphi(x)=&\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}e^{itf(\xi)}e^{ix\xi}\sigma(\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi\\=&\frac{1}{2\pi}\int_{f(\mathbf{R})}e^{it\eta}e^{ixf^{-1}(\eta)}\sigma(f^{-1}(\eta))\hat{\varphi}(f^{-1}(\eta))|(f^{-1})'(\eta)|\,d\eta\end{aligned}$$

となるので，Plancherel の定理により

$$\begin{aligned}\|\sigma(D_x)e^{itf(D_x)}\varphi(x)\|^2_{L^2(\mathbf{R}_t)}=&\frac{1}{2\pi}\int_{f(\mathbf{R})}\left|\sigma(f^{-1}(\eta))\hat{\varphi}(f^{-1}(\eta))\right|^2\left|(f^{-1})'(\eta)\right|^2d\eta\\=&\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}|\sigma(\xi)\hat{\varphi}(\xi)|^2\left|(f^{-1})'(f(\xi))\right|^2|f'(\xi)|\,d\xi\\=&\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}|\hat{\varphi}(\xi)|^2\frac{|\sigma(\xi)|^2}{|f'(\xi)|}d\xi\end{aligned}$$

となることより定理 4 が示される．ここで変換 $\eta=f(\xi)$ と等式 $|(f^{-1})'(f(\xi))|=|f'(\xi)|^{-1}$ を用いた．

7. モデル評価式

比較原理を用いることにより，低次元における様々な平滑化評価式の同値性が示される．例えば 1 次元の時には $l,m>0$ として

$$(1)\qquad \left\||D_x|^{(m-1)/2}e^{it|D_x|^m}\varphi(x)\right\|_{L^2(\mathbf{R}_t)}=\sqrt{\frac{l}{m}}\left\||D_x|^{(l-1)/2}e^{it|D_x|^l}\varphi(\tilde{x})\right\|_{L^2(\mathbf{R}_t)}$$

がすべての $x,\tilde{x}\in\mathbf{R}$ に対し成立する．ただし $\operatorname{supp}\hat{\varphi}\subset[0,+\infty)$ または $(-\infty,0]$ とする．また，2 次元の時には $l,m>0$ として

$$\begin{aligned}(2)\quad &\left\||D_y|^{(m-1)/2}e^{itD_x|D_y|^{m-1}}\varphi(x,y)\right\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}_y)}\\&\qquad=\left\||D_y|^{(l-1)/2}e^{itD_x|D_y|^{l-1}}\varphi(\tilde{x},y)\right\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}_y)}\end{aligned}$$

がすべての $x,\tilde{x}\in\mathbf{R}$ に対し成立する．いずれも，それぞれ定理 4，定理 5 からの簡単な帰結である．

一方 1 次元の場合は

$$e^{itD_x}\varphi(x)=\varphi(x+t)$$

であるから，自明な等式

$$(*)\qquad \left\|e^{itD_x}\varphi(x)\right\|_{L^2(\mathbf{R}_t)}=\|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}_x)}$$

がすべての $x\in\mathbf{R}$ に対して成立する．$(*)$ を用いて (1) と (2) の右辺の $l=1$ の場合をそれぞれ評価すれば，$m>0$ に対してある定数 $C>0$ が定まり

- 1 次元の場合

$$\left\||D_x|^{(m-1)/2}e^{it|D_x|^m}\varphi(x)\right\|_{L^2(\mathbf{R}_t)}\le C\|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}_x)}$$

- 2次元の場合

$$\left\| |D_y|^{(m-1)/2} e^{itD_x|D_y|^{m-1}} \varphi(x,y) \right\|_{L^2(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_y)} \le C\|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}^2_{x,y})}$$

がすべての $x \in \mathbf{R}$ に対して成立する．これらの評価式は，$m=2$ の場合には Kenig, Ponce & Vega [11]（1次元の場合）および Linares & Ponce [12]（2次元の場合）により既に示されている．比較原理が当時から知られていたならば，この段階で自動的に一般の m の場合が得られていたことになる．しかしそれ以上に重要なことは，これらの評価式が自明な等式 $(*)$ からの単純な帰結に過ぎないという事実であろう．

またこれらの評価より，直ちに次のようなモデル評価式が得られる：

命題 1. $m>0$ かつ $s>1/2$ とする．このとき，$n \ge 1$ に対して

$$\left\| \langle x\rangle^{-s} |D_n|^{(m-1)/2} e^{it|D_n|^m} \varphi(x) \right\|_{L^2(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^n_x)} \lesssim \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}^n_x)}$$

$n \ge 2$ に対して

$$\left\| \langle x\rangle^{-s} |D_n|^{(m-1)/2} e^{itD_1|D_n|^{m-1}} \varphi(x) \right\|_{L^2(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^n_x)} \lesssim \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}^n_x)}$$

がそれぞれ成立する．ただし $D_x = (D_1, \ldots, D_n)$.

8. 正準変換

次に，本稿でのもうひとつの重要な柱である**正準変換**について説明しよう．擬微分作用素 $A(X, D_x)$ とフーリエ積分作用素 I を

$$A(X,D)u(x) = \int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\xi} A(x,\xi) u(y)\, dyd\xi,$$
$$Iu(x) = \int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n} e^{i\phi(x,y,\xi)} u(y)\, dyd\xi \quad (x \in \mathbf{R}^n).$$

により定める．また I の相関数 ϕ が定める Lagrange 多様体が，（局所的に）正準変換 χ のグラフとなっているものとする：

$$\begin{aligned} C_\phi &= \{(x, \phi_x, y, -\phi_y);\ \phi_\xi = 0\} \\ &= \{(x,\xi), \chi(x,\xi)\} \subset T^*\mathbf{R}^n \times T^*\mathbf{R}^n. \end{aligned}$$

このとき，次の Egorov の定理がなりたつ：

$$\begin{aligned} I \cdot A(X,D) &= B(X,D) \cdot I + (\text{誤差項}), \\ B(x,\xi) &= (A \circ \chi)(x,\xi). \end{aligned}$$

つまり，作用素 $B(X,D)$ の性質の考察は（phase function $\phi(x,y,\xi)$ をうまく選んで Egorov の定理を用いることにより）より簡単な作用素 $A(X,D)$ の考察に帰着されることになる．

ここでは，より単純な状況においてこのアイデアを用いることにする．1次斉次な座標変換 $\psi : \mathbf{R}^n \setminus 0 \to \mathbf{R}^n \setminus 0$ に対し

$$Iu(x) = F^{-1}[(Fu)(\psi(\xi))](x)$$
$$I^{-1}u(x) = F^{-1}[(Fu)(\psi^{-1}(\xi))](x)$$

とおく．これらは，次のようにフーリエ積分作用素の形に書くことも出来る．

$$Iu(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\iint e^{i(x\cdot\xi - y\cdot\psi(\xi))}u(y)\,dyd\xi$$

$$I^{-1}u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\iint e^{i\left(x\cdot\xi - y\cdot\psi^{-1}(\xi)\right)}u(y)\,dyd\xi$$

このとき，一般に関係式

$$(\sigma\circ\psi)(D_x)\cdot I = I\cdot\sigma(D_x),$$

が成立する．これより

$$I^{-1}\cdot(\sigma\circ\psi)(D_x) = \sigma(D_x)\cdot I^{-1}$$

も成立する．

一方重みつき空間 $L^2_k(\mathbf{R}^n)$ および $\dot{L}^2_k(\mathbf{R}^n)$ を，ノルム

$$\|f\|_{L^2_k(\mathbf{R}^n)} = \left(\int\left|\langle x\rangle^k f(x)\right|^2 dx\right)^{1/2}, \qquad \|f\|_{\dot{L}^2_k(\mathbf{R}^n)} = \left(\int\left||x|^k f(x)\right|^2 dx\right)^{1/2}$$

により定義するとき，次の有界性が成立する：

定理 7. I および I^{-1} は $|k| < n/2$ に対して $L^2_k(\mathbf{R}^n)$，$\dot{L}^2_k(\mathbf{R}^n)$-有界である．

以上のことより，分散型方程式の平滑化評価式は，$a(D)$ のかわりとして，ある $\psi:\mathbf{R}^n\setminus 0\to\mathbf{R}^n\setminus 0$ に対して

$$a(\xi) = (\sigma\circ\psi)(\xi)$$

を満たす（より単純な）$\sigma(D)$ を見つけ，それに置き換えて証明すればよいことがわかる．実際，例えばタイプ [A] の平滑化評価式（定理 1）を証明しようとするとき，$\sigma(D)$ に対する平滑化評価式

$$\left\|\langle x\rangle^{-s}|D_x|^{(m-1)/2}e^{it\sigma(D_x)}\varphi(x)\right\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}^n_x)} \lesssim \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}^n_x)}$$

が示されたとして，φ のかわりに $I^{-1}\varphi$ を代入して関係式

$$|D_x|^{(m-1)/2}e^{it\sigma(D_x)}\cdot I^{-1} = I^{-1}\cdot|\psi(D_x)|^{(m-1)/2}e^{ita(D_x)}$$

に注意すれば，

$$\left\|\langle x\rangle^{-s}I^{-1}\cdot|\psi(D_x)|^{(m-1)/2}e^{ita(D_x)}\varphi(x)\right\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}^n_x)} \lesssim \left\|I^{-1}\varphi\right\|_{L^2(\mathbf{R}^n_x)}$$

となる．また，定理 7 より I^{-1} は L^2-有界かつ I は L^2_k-有界 ($|k| < n/2$) であることがわかるので，$1/2 < s < n/2$ に対して

$$\left\|\langle x\rangle^{-s}|\psi(D_x)|^{(m-1)/2}e^{ita(D_x)}\varphi(x)\right\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}^n_x)} \lesssim \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}^n_x)}$$

となる．さらに $|\psi(D_x)|^{-(m-1)/2}|D_x|^{(m-1)/2}$ は L^2-有界であるから，

$$\left\|\langle x\rangle^{-s}|D_x|^{(m-1)/2}e^{ita(D_x)}\varphi(x)\right\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}^n_x)} \lesssim \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}^n_x)}$$

が示される．つまり，$a(D_x)$ に対しても同じ評価が得られることになる．

この議論は，1 次斉次な座標変換 $\psi:\Gamma\to\tilde{\Gamma}$（$\Gamma,\tilde{\Gamma}\subset\mathbf{R}^n\setminus 0$ は cone）に対しても正当化されることに注意しておく．さらに回転により，Γ を $e_n = (0,\ldots 0,1)$ の充分小なる conic neighborhood として，座標変換 $\psi:\Gamma\to\tilde{\Gamma}$ と $\sigma(\eta)$ を

$$a(\xi) = (\sigma\circ\psi)(\xi) \qquad (\xi\in\Gamma)$$

が成立するように選べばよい．

この考え方を用いることにより，タイプ [A] の平滑化評価式（定理 1）は，モデル評価式（命題 1）に帰着させて証明することができる．実際，まず Euler の恒等式

$$a(\xi) = a_m(\xi) = \frac{1}{m}\xi \cdot \nabla a(\xi)$$

に注意する．分散型の仮定 $\nabla a(\xi) \neq 0$ $(\xi \neq 0)$ より，特に $\nabla a(e_n) \neq 0$ である．この時，次の 2 通りの場合が考えられる．

(I): $\partial_n a(e_n) \neq 0$. この時 Euler の恒等式から $a(e_n) \neq 0$. 従って，例えば

$$a(\xi) > 0 \ (\xi \in \Gamma), \quad \partial_n a(e_n) \neq 0$$

(II): $\partial_n a(e_n) = 0$. この時仮定から，ある $j \neq n$ に関して $\partial_j a(e_n) \neq 0$. 従って，例えば

$$\partial_1 a(e_n) \neq 0$$

(I) は elliptic な場合，(II) は non-elliptic の場合にそれぞれ相当する．

- (I) の場合には

$$\sigma(\eta) = |\eta_n|^m, \quad \psi(\xi) = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, a(\xi)^{1/m})$$

とおけば $a(\xi) = (\sigma \circ \psi)(\xi)$ かつ

$$\begin{aligned}\det \partial\psi(e_n) &= \begin{vmatrix} E_{n-1} & 0 \\ * & \frac{1}{m}a(e_n)^{1/m-1}\partial_n a(e_n) \end{vmatrix} \\ &\neq 0 \quad (E_{n-1} \text{ は } n-1 \text{ 次単位行列}).\end{aligned}$$

よって，$\sigma(D_x) = D_n^m$ に対するモデル評価に帰着される．

- (II) の場合には

$$\sigma(\eta) = \eta_1|\eta_n|^{m-1}, \quad \psi(\xi) = \left(\frac{a(\xi)}{|\xi_n|^{m-1}}, \xi_2, \ldots, \xi_n\right)$$

とおけば $a(\xi) = (\sigma \circ \psi)(\xi)$ かつ

$$\begin{aligned}\det \partial\psi(e_n) &= \begin{vmatrix} \partial_1 a(e_n) & * \\ 0 & E_{n-1} \end{vmatrix} \\ &\neq 0 \quad (E_{n-1} \text{ は } n-1 \text{ 次単位行列}).\end{aligned}$$

よって，$\sigma(D_x) = D_1|D_n|^{m-1}$ に対するモデル評価に帰着される．

9. 分散型方程式の平滑化評価式についてのまとめ

ここまで，タイプ [A] の平滑化評価式（定理 1）を比較原理と正準変換を用いて証明してきたが，その内容をフローチャートにしてみた：

- 1 次元の場合の自明な等式（$x \in \mathbf{R}$）

$$\left\| e^{itD_x}\varphi(x) \right\|_{L^2(\mathbf{R}_t)} = \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}_x)}$$

$\Downarrow$ （比較原理）

• モデル評価式

$$\left\| \langle x\rangle^{-s}|D_n|^{(m-1)/2}e^{it|D_n|^m}\varphi(x)\right\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}_x^n)} \lesssim \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}_x^n)}$$

$$\left\| \langle x\rangle^{-s}|D_n|^{(m-1)/2}e^{itD_1|D_n|^{m-1}}\varphi(x)\right\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}_x^n)} \lesssim \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}_x^n)}$$

$\Downarrow$ （正準変換）

• 分散型方程式の平滑化評価式 [A]

$$\left\| \langle x\rangle^{-s}|D_x|^{(m-1)/2}e^{ita(D_x)}\varphi\right\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}_x^n)} \lesssim \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}_x^n)}$$

詳細な説明は省略するが，タイプ [B] の平滑化評価式（定理 2）の証明のフローチャートは次のようになる：

• 球対称な基本評価式

$$\left\| \langle x\rangle^{-m/2}e^{it|D_x|^m}\varphi\right\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}_x^n)} \lesssim \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}_x^n)}$$

$$\operatorname{supp}\widehat{\varphi}\subset\{\xi\in\mathbf{R}^n:\ |\xi|\le 1\}$$

$\Updownarrow$ （同値）

$$\left\| |x|^{\alpha-1}|D_x|^{\alpha}e^{it|D_x|^2}\varphi(x)\right\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}_x^n)} \lesssim \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}_x^n)}$$

$\Downarrow$ （比較原理）

• モデル評価式

$$\left\| |x|^{\alpha-m/2}|D_x|^{\alpha}e^{it|D_x|^m}\varphi(x)\right\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}_x^n)} \lesssim \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}_x^n)}$$

$$\left\| |x|^{\alpha-m/2}|D'|^{\alpha}e^{it(|D_1|^m-|D'|^m)}\varphi(x)\right\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}_x^n)} \lesssim \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}_x^n)}$$

$$(D_x=(D_1,D'),\ D'=(D_2,\ldots D_n))$$

$\Downarrow$ （正準変換）

• 分散型方程式の平滑化評価式 [B]

$$\left\| |x|^{\alpha-m/2}|D_x|^{\alpha}e^{ita(D_x)}\varphi\right\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}_x^n)} \lesssim \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}_x^n)}$$

タイプ [C] の平滑化評価式（定理 3）がタイプ [A] とタイプ [B] の場合から導かれることは，すでに述べたとおりである．したがって，分散型方程式のすべての平滑化評価式は,「比較原理」＋「正準変換」を介して,「1 次元の場合の自明な等式」もしくは「球対称な基本評価式」のいずれかが姿を変えて表現されているにすぎないことがわかるのである．

さらに，「比較原理」や「正準変換」の考え方を用いることにより，低階項や非斉次項を持つ方程式に対する平滑化評価式も容易に導くことができる．低階項がある場合に分散型であるとは，

- $a(\xi) = a_m(\xi) + r(\xi) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$,
  $\nabla a_m(\xi) \neq 0\ (\xi \neq 0),\ \nabla a(\xi) \neq 0\ (\xi \in \mathbf{R}^n)$
- $|\partial^\alpha r(\xi)| \leq C\langle\xi\rangle^{m-1-|\alpha|} \quad (|\xi| \geq 1)$

を満たすことをいうものとする．たとえば，$a(\xi) = \xi_1^3 + \cdots + \xi_n^3 + \xi_1$ はその典型例である．この仮定の下，以下の（より強い）平滑化評価式が得られる：

$$(*)\quad \left\|\langle x\rangle^{-s}\langle D_x\rangle^{(m-1)/2}e^{ita(D_x)}\varphi(x)\right\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}_x^n)} \lesssim \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}_x^n)} \quad (s>1/2,\ m>0).$$

同じ仮定の下，方程式

$$\begin{cases} (i\partial_t + a(D_x))\,u(t,x) = f(t,x) \\ \qquad\qquad\quad u(0,x) = 0 \end{cases}$$

の解に対する平滑化評価式も得られる：

$$\left\|\langle x\rangle^{-s}\langle D_x\rangle^{m-1}\int_0^t e^{i(t-\tau)a(D_x)}f(\tau,x)\,d\tau\right\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}_x^n)} \lesssim \|\langle x\rangle^s f(t,x)\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}_x^n)}.$$

10. 非分散型方程式に対する平滑化評価式

方程式

$$\begin{cases} (i\partial_t - a(D_x))\,u(t,x) = 0 \\ \qquad\qquad\quad u(0,x) = \varphi(x) \in L^2(\mathbf{R}^n) \end{cases}$$

が分散型の仮定を満たさない場合には，同じ平滑化評価式は期待できない．実際，評価式 $(*)$ をみたすような多項式 $a(\xi)$ は，

$$\nabla a_m(\xi) \neq 0 \quad (\xi \neq 0)$$

でなければならないことが知られている（Hoshiro [8]）．しかしながら，このような状況は物理的にも自然にあわられる：

- Coupled system of Schrödinger 方程式:

$$\begin{cases} i\partial_t v = \Delta_x v + b(D_x)w, \\ i\partial_t w = \Delta_x w + c(D_x)v \end{cases}$$

(モードが 2 つある波束のモデル etc. の線形化)

このシステムが対角化可能であるとして，その固有値

$$a(\xi) = -|\xi|^2 \pm \sqrt{b(\xi)c(\xi)}$$

に対する単独の方程式とみなす時，低階項 $b(\xi)$，$c(\xi)$ のとり方によっては $\nabla a(\xi) = 0$ となる点 ξ が存在する可能性がある．例えば

$$b(\xi) = c(\xi) = 4\sqrt{|\xi|^2+1}$$

のときは

$$a(\xi) = -|\xi|^2 + \sqrt{16(|\xi|^2+1)}$$

であり，これは

$$\nabla a(\xi) = -2\xi + 4\frac{\xi}{\sqrt{|\xi|^2+1}}$$
$$= 0 \qquad (|\xi| = 0, \sqrt{3})$$

となる．

• Shrira 方程式 $(n=2)$:

$$a(\xi) = \xi_1^3 + \xi_2^3, \quad \xi_1^3 + 3\xi_2^2, \quad \xi_1^2 + \xi_1\xi_2^2$$

（底が深い２次元水面波の方程式の主部）．このうち，$a(\xi) = \xi_1^3 + \xi_2^3$ は分散型であるが $a(\xi) = \xi_1^3 + 3\xi_2^2$ と $a(\xi) = \xi_1^2 + \xi_1\xi_2^2$ は，いずれも $\nabla a(0) = 0$ であり低階項を持つ場合の分散型の仮定を満たさない．

非分散型方程式の場合にも成立すると予想される（正準変換に対して不変な）平滑化評価式（＝**不変評価式**）を提唱したい：

$$\left\| \langle x\rangle^{-s} |\nabla a(D_x)|^{1/2} e^{ita(D_x)}\varphi(x) \right\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}_x^n)} \lesssim \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}_x^n)} \quad (s > 1/2).$$

これは，分散型方程式の場合に成立する平滑化評価式（定理１）を含んでおり，かなり多くの場合において成立する．例えば $a(\xi)$ が球対称な関数 $a(\xi) = f(|\xi|)$ の場合，この不変評価式は比較原理から得られた定理１と**２次比較**することにより得られる．実際，定理１の $a(\xi) = |\xi|^m$ の場合より

$$\left\| \langle x\rangle^{-s} |D_x|^{(m-1)/2} e^{it|D_x|^m}\varphi \right\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}_x^n)} \le C\|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}_x^n)}.$$

が得られるが，$g(\rho) = \rho^m$, $\tau(\rho) = \rho^{(m-1)/2}$, とおくときに

$$|\tau(\rho)|/|g'(\rho)|^{1/2} = 1/\sqrt{m} = const.$$

が成立していることから，球対称の場合の比較原理（定理６）を用いることにより，

$$\|\langle x\rangle^{-s}|f'(|D_x|)|^{1/2}e^{itf(|D_x|)}\varphi(x)\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}_x^n)} \le C\|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}_x^n)}$$

が得られる，さらに球対称関数 $a(\xi) = f(|\xi|)$ は常に

$$|\nabla a(\xi)| = |f'(|\xi|)|,$$

をみたすので，不変評価式が得られる．例えば，$a(\xi) = (|\xi|^2-1)^2$ は非分散型である．実際

$$\nabla a(\xi) = 4(|\xi|^2-1)\xi$$

なので $|\xi| = 0, 1$ の時に $\nabla a(\xi) = 0$. したがって，通常の平滑化評価式は成立しないが，不変評価式なら成立する．

その他，球対称とは限らなくても，低次元モデル評価式からさらに２次比較することにより，Shirira 方程式に対しても不変評価式を導出できる．さらに，ヘッシアン $\nabla^2 a$ が ∇a の零点をコントロールしていれば，（正準変換の手法も合わせ用いることにより）やはり不変評価式を導出できること等もわかっている．

11. 臨界指数の場合の平滑化評価式

重みに関する臨界指数 $s=1/2$ の場合の平滑化評価式

$$\left\|\langle x\rangle^{-1/2}|D_x|^{(m-1)/2}e^{ita(D_x)}\varphi(x)\right\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}^n_x)}\lesssim\|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$$

は成立しないが，代わりとして $\sigma(x,\xi)\sim\langle x\rangle^{-1/2}|\xi|^{(m-1)/2}$ が構造条件

$$\sigma(x,\xi)=0\quad\text{on}\quad\Gamma_a.$$

をみたす場合に次が成立する：

$$\left\|\sigma(x,D_x)e^{ita(D_x)}\varphi(x)\right\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}^n_x)}\lesssim\|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}.$$

ここで，以下の様な記号を用いた：

$$\sigma(x,\xi)\sim\langle x\rangle^a|\xi|^b\iff\begin{cases}\sigma(x,\xi)\in C^\infty\big(\mathbf{R}^n_x\times(\mathbf{R}^n_\xi\setminus 0)\big),\\ \sigma(x,\lambda\xi)=\lambda^b\sigma(x,\xi)\,;\,(\lambda>0,\xi\neq 0),\\ |\partial_x^\alpha\sigma(x,\xi)|\le C_\alpha\langle x\rangle^{a-|\alpha|}|\xi|^b,\end{cases}$$

また，古典軌道の軌跡全体がなす集合として

$$\begin{aligned}\Gamma_a&=\{(\lambda\nabla a(\xi),\xi):\,\lambda\in\mathbf{R},\,\xi\in\mathbf{R}^n\setminus 0\}\\&=\{(x,\xi)\in T^*\mathbf{R}^n\setminus 0:\,x\wedge\nabla a(\xi)=0\}\end{aligned}$$

とおいた．例えば，$a(\xi)=|\xi|^2$ の場合には

$$\Gamma_a=\{(x,\xi)\in T^*\mathbf{R}^n\setminus 0:\,x\wedge\xi=0\}$$

であり，従って

$$\sigma(x,D_x)=\langle x\rangle^{-3/2}(x\wedge D_x)|D_x|^{-1/2}$$

の各成分がこの結果を適用できる典型例となる．ここで，$x\wedge D_x$ の各成分は回転のベクトル場であることに注意しておく．

12. 非線形問題への応用

第3節の末尾でものべたように，平滑化評価式は非線形項に導関数を含む半線形方程式の解析において，微分による損失を回復するための手段としても用いられる：

$$\begin{cases}(i\partial_t-\triangle_x)\,u(t,x)=|\nabla u(t,x)|^N\\ \quad u(0,x)=\varphi(x),\quad t\in\mathbf{R},\,x\in\mathbf{R}^n\end{cases}$$

この方程式が時間大域解を持つための，初期値 $\varphi(x)$ に対する条件として以下の事が知られている：

- Chihara [4]: $\varphi\in C^\infty$，急減衰，十分小 $(N\ge 3)$.
- Hayashi, Miao & Naumkin [7]: $\varphi\in H^{[n/2]+5}$，ある程度減衰，十分小 $(N\ge 2)$.
- Ozawa & Zhai [13]: $\varphi\in H^{n/2+2}$，ある程度減衰，十分小 $(N\ge 3)$.

初期値 $\varphi(x)$ に対する滑らかさの仮定はこれ以上緩められるかという事が問題となるが，前節の関連結果を応用することにより，非線形項に構造を仮定すれば可能である．

実際，$s > (n+3)/2$, $n \geq 3$, $N \in \mathbf{N}$ および $N \geq 4$ とし，$\langle x\rangle^2 \langle D_x\rangle^s \varphi \in L^2$ かつその L^2-ノルムは十分に小さいものとするとき，方程式

$$\begin{cases} (i\partial_t - \triangle_x)\, u(t,x) = \left| \left(\dfrac{x}{\langle x\rangle} \wedge D_x \right) u \right|^N \\ \quad u(0,x) = \varphi(x), \quad t \in \mathbf{R},\, x \in \mathbf{R}^n, \end{cases}$$

は時間大域解 $u \in C^0(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^n_x)$ を持つ．

13. 平滑化評価式の最良定数

分散型方程式に対する平滑化評価式の最良定数を知りたい場合には，比較原理を用いることにより，シュレディンガー方程式に対する基本的な平滑化評価式

$$\left\| Te^{-it\Delta}\varphi(x) \right\|_{L^2(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^n_x)} \leq C \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}^n_x)}$$

$$\begin{array}{lll} [A] & T = \langle x\rangle^{-s} |D_x|^{1/2} & \cdots \quad s > 1/2, \\ [B] & T = |x|^{a-1} |D_x|^a & \cdots \quad 1 - n/2 < a < 1/2, \\ [C] & T = \langle x\rangle^{-1} \langle D_x\rangle^{1/2} & \cdots \quad n > 2. \end{array}$$

の最良定数 $C = C_0$ を求める問題に帰着される．平滑化評価式の最良定数についてはこれまで余り考察されていなかったが，唯一 Simon [20] により，($n \geq 3$ の時に) タイプ [A] の $s = 1$ の場合およびタイプ [B] の $a = 0$ の場合に最良定数が与えられていた:

$$\begin{array}{lll} [A] & T = \langle x\rangle^{-1} |D_x|^{1/2} & \cdots \quad C_0 = \sqrt{\pi/2} \\ [B] & T = |x|^{-1} & \cdots \quad C_0 = \sqrt{\pi/(n-2)}, \\ [C] & T = \langle x\rangle^{-1} \langle D_x\rangle^{1/2} & \cdots \quad C_0 = \ \ ? \end{array}$$

最近の研究では，さらに以下の事がわかっている：

- タイプ [B] の $1 - n/2 < a < 1/2$ の場合における最良定数は，

$$\left(\pi 2^{2a-1} \frac{\Gamma(1-2a)\Gamma(\frac{n}{2}+a-1)}{\Gamma(1-a)^2 \Gamma(\frac{n}{2}-a)} \right)^{1/2}$$

で与えられる．さらに，臨界指数 $a = 1/2$ の場合に相当する

$$T = |x|^{a-1}(-\Lambda)^{1/4-a/2} |D_x|^a \sim |x|^{-1/2} |D_x|^{1/2}$$

(ただし，$(-\Lambda)^{1/4-a/2}$ は球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上の Laplace-Beltrami 作用素 $-\Lambda = |x \wedge D_x|^2$ のベキ乗を $\mathbf{R}^n$ へ斉次拡張したもの) の場合における平滑化評価式の最良定数は，

$$\left(\pi 2^{2a-1} \frac{\Gamma(1-2a)}{\Gamma(1-a)^2} \right)^{1/2}.$$

- タイプ [C] の $n = 3$, $n \geq 5$ の場合における最良定数はそれぞれ $\sqrt{\pi}$, $\sqrt{\pi/2}$.

さらにタイプ [B] の平滑化評価式の双対をとることにより，制限定理に対する結果も得られる．実際，$1/2 < s < n/2$ として，

$$\left\| f_{|\mathbb{S}^{n-1}} \right\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1}; d\omega)} \leq \left(2^{1-2s} \frac{\Gamma(2s-1)\Gamma(\frac{n}{2}-s)}{\Gamma(s)^2 \Gamma(\frac{n}{2}-1+s)} \right)^{1/2} \|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)},$$

が成立する．さらに，臨界指数 $s=1/2$ の場合に相当するものとして

$$\left\|(-\Lambda)^{s/2-1/4}|D_x|^{1/2-s}f_{|\mathbb{S}^{n-1}}\right\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1};d\omega)} \le \left(2^{1-2s}\frac{\Gamma(2s-1)}{\Gamma(s)^2}\right)^{1/2}\|f\|_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^n)}.$$

が成立する．ここで $(-\Lambda)^{s/2-1/4}|D_x|^{1/2-s}$ は構造を持った 0 階の作用素であることに注意しておく．これらの定数は，これ以上改良できない最良のものである．

14. ポテンシャル付きシュレディンガー方程式に対する比較原理

ここまではシュレデインガー作用素として $H=-\Delta$ の場合のみを扱ってきたが，より一般にポテンシャル付きシュレディンガー作用素

$$H=-\Delta+V$$

の場合にも平滑化評価式は成立するのであろうか？より一般に，L^2 上の自己共役作用素 H に対して，$P_{\mathrm{ac}}(H)$ をその絶対連続スペクトルへの射影とする．例えば，ある $s>0$, $A>0$ および連続関数 σ に対して平滑化評価式

$$\left\|\langle x\rangle^{-s}\sigma(H)e^{itH}P_{ac}(H)\varphi\right\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}^n_x)} \le A\|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}^n_x)}$$

が成立しているものと仮定する時，狭義単調関数 $a\in C^1(\mathbf{R})$ から定まる作用素 $a(H)$ に対しても平滑化評価式

$$\left\|\langle x\rangle^{-s}|a'(H)|^{1/2}\sigma(H)e^{ita(H)}P_{ac}(H)\varphi\right\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}^n_x)} \le A\|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}^n_x)}$$

が成立することが，最近の研究により明らかになってきている．このようなスペクトル理論を用いた比較原理の研究が，その応用も含めて進行中である．

References

[1] M. Ben-Artzi, M. Ruzhansky and M. Sugimoto, *Spectral comparison and smoothing estimates*, (in preparation).

[2] N. Bez and M. Sugimoto, *On the best constant and extremisers for some smoothing estimates*, (to appear in J. Anal. Math.).

[3] N. Bez and M. Sugimoto, *Optimal forward and reverse estimates of Morawetz and Kato–Yajima type with angular smoothing index*, (preprint).

[4] H. Chihara, *The initial value problem for cubic semilinear Schrödinger equations*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **32** (1996), 445–471.

[5] H. Chihara, *Smoothing effects of dispersive pseudodifferential equations*, Comm. Partial Differential Equations **27** (2002), 1953–2005.

[6] P. Constantin and J. C. Saut, *Local smoothing properties of dispersive equations*, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), 413–439.

[7] N. Hayashi, C. Miao and P. I. Naumkin, *Global existence of small solutions to the generalized derivative nonlinear Schrodinger equation*, Asymptot. Anal. **21** (1999), 133–147.

[8] T. Hoshiro, *Decay and regularity for dispersive equations with constant coefficients*, J. Anal. Math. **91** (2003), 211–230.

[9] T. Kato, *On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equation*, Studies in applied mathematics, 93–128, Adv. Math. Suppl. Stud., 8, Academic Press, New York, 1983.

[10] T. Kato and K. Yajima, *Some examples of smooth operators and the associated smoothing effect*, Rev. Math. Phys. **1** (1989), 481–496.

[11] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *Oscillatory integrals and regularity of dispersive equations*, Indiana Univ. Math. J. **40** (1991), 33–69.

[12] F. Linares and G. Ponce, *On the Davey-Stewartson systems*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **10** (1993), 523–548.

[13] T. Ozawa and J. Zhai, *Global existence of small classical solutions to nonlinear Schrödinger equations*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **25** (2008), 303–311.
[14] M. Ruzhansky and M. Sugimoto, *A smoothing property of Schrödinger equations in the critical case*, Math. Ann. 335 (2006), 645-673.
[15] M. Ruzhansky and M. Sugimoto, *Smoothing properties of evolution equations via canonical transforms and comparison principle*, Proc. London Math. Soc. 105 (2012), 393-423.
[16] M. Ruzhansky and M. Sugimoto, *Structural resolvent estimates and derivative nonlinear Schrödinger equations*, Comm. Math. Phys. 314 (2012), 281-304.
[17] M. Ruzhansky and M. Sugimoto, *Trace theorems: critical cases and best constants*, (to appear in Proc. Amer. Math. Soc.).
[18] M. Ruzhansky and M. Sugimoto, *Smoothing properties of inhomogeneous equations via canonical transforms*, (to appear in Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino).
[19] M. Ruzhansky and M. Sugimoto, *Smoothing properties of non-dispersive equations*, (in preparation).
[20] B. Simon, *Best constants in some operator smoothness estimates*, J. Funct. Anal. **107** (1992), 66–71.
[21] P. Sjölin, *Regularity of solutions to the Schrödinger equation*, Duke Math. J. **55** (1987), 699–715.
[22] M. Sugimoto, *Global smoothing properties of generalized Schrödinger equations*, J. Anal. Math. **76** (1998), 191–204.
[23] L. Vega, *Schrödinger equations: Pointwise convergence to the initial data*, Proc. Amer. Math. Soc. **102** (1988), 874–878.
[24] B. G. Walther, *A sharp weighted L^2-estimate for the solution to the time-dependent Schrödinger equation*, Ark. Mat. **37** (1999), 381–393.
[25] B. G. Walther, *Regularity, decay, and best constants for dispersive equations*, J. Funct. Anal. **189** (2002), 325–335.
[26] K. Watanabe, *Smooth perturbations of the selfadjoint operator $|\Delta|^{\alpha/2}$*, Tokyo J. Math. **14** (1991), 239–250.