数理解析研究所講究録
第 1903 巻 2014 年 165-167

Escape rate of symmetric Markov processes

岡山大学大学院自然科学研究科・環境理工学部 塩沢 裕一
Yuichi Shiozawa
Graduate School of Natural Science and Technology
Department of Environmental and Mathematical Sciences
Okayama University

本講演では, 内部消滅を持たない対称マルコフ過程の無限遠方への脱出レートの上限を, 体積増大度と係数増大度で特徴づける. 本予稿では飛躍型対称マルコフ過程の場合に結果を述べるが, 飛躍拡散型対称マルコフ過程の場合も同様の結果が得られる.

(X,d) を局所コンパクト可分距離空間とし, m を X 上の正値ラドン測度で X 全体に台を持つものとする. $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を $L^2(X;m)$ 上の正則ディリクレ形式とし, $\mathbf{M}=(\{X_t\}_{t\geq 0},\{P_x\}_{x\in X})$ を $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ から生成される m 対称マルコフ過程とする. X 上の台がコンパクトな連続関数全体を $C_0(X)$ とかき, $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ の Beurling-Deny 分解に非局所項のみが現れることを仮定する:

$$\mathcal{E}(u,v)=\iint_{X\times X\setminus\mathrm{diag}}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))\,J(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)\quad u,v\in\mathcal{F}\cap C_0(X).$$

ただし, diag は $X\times X$ 上の対角線集合であり, $J(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$ は $X\times X\setminus\mathrm{diag}$ 上の正値対称ラドン測度である. また, $J(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)=J(x,\mathrm{d}y)m(\mathrm{d}x)$ を満たす積分核 $J(x,\mathrm{d}y)$ の存在を仮定する.

X 上の関数 ρ に対して $B_\rho(r):=\{x\in X\mid \rho(x)<r\}$ $(r>0)$ とおき, $\mathcal{A}$ を次で定める:

$$\mathcal{A}:=\left\{\rho\in C(X)\cap\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}\mid \lim_{x\to\Delta}\rho(x)=\infty,\ \text{各 } r>0 \text{ について } B_\rho(r) \text{ は相対コンパクト}\right\}.$$

仮定 1. X 上の単調非減少な非負値関数列 $\{\rho_R\}_{R\geq 1}\subset\mathcal{A}$ と $X\times X\setminus\mathrm{diag}$ 上の単調増加な非負値関数列 $\{F_R\}_{R\geq 1}$ が存在して, 次の条件が成立する:

(i) 各 $R\geq 1$ に対して次が成立する:

- $\displaystyle M_1(R):=\sup_{x\in B_{\rho_R}(R)}\int_{0<d(x,y)<F_R(x,y)}(\rho_R(x)-\rho_R(y))^2J(x,\mathrm{d}y)<\infty;$

- $\displaystyle M_2(R):=\sup_{x\in X}\int_{d(x,y)\geq F_R(x,y)}J(x,\mathrm{d}y)<\infty.$

(ii) 各コンパクト集合 $K\subset X$ に対して, すべての十分大きな R について $K\subset B_{\rho_R}(R/4)$.

(iii) $\rho:=\rho_1$ とおく. すべての十分大きな R に対して

$$0<d(x,y)<F_R(x,y)\quad\Longrightarrow\quad|\rho_R(x)-\rho_R(y)|<\frac{1}{32}\cdot\frac{R}{\log m(B_\rho(R))+\log\log R}.$$

関数 F_R は "飛躍の大きさ" を定め, 関数 ρ_R は "小さい飛躍" に適合した長さを表す.

$N_1(R)$ は $M_1(R) \le N_1(R)$ を満たす単調非減少関数とし, $N_2(R)$ は $M_2(R) \le N_2(R)$ を満たす単調非増加関数とする. $\mu \in [0,2)$ を固定し, 関数 $\psi_\mu(R)$ を次で定める:

$$\psi_\mu(R) := \frac{R^{2-\mu}}{N_1(R) \cdot (\log m(B_\rho(R)) + \log\log R)}.$$

仮定 2. (i) すべての十分大きな R について $\psi_\mu(R)$ は単調増加かつ $\lim_{R\to\infty} \psi_\mu(R) = \infty$.
(ii) 定数 $\nu > 1$ と $c > 0$ が存在して

$$\psi_\mu(R) N_2(R) \le \frac{c}{(\log R)^\nu}.$$

仮定 2 (ii) は "大きい飛躍" の起こる頻度を制限する.

定理 1. $\mathbf{M}$ は保存的であることを仮定する. 仮定 1, 2 の下, 定数 $c > 0$ が存在して

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\rho(X_t)}{\psi_\mu^{-1}(ct)} \le 1 \quad P_x\text{-a.s.}, \ m\text{-a.e. } x \in X.$$

定理 1 はリーマン多様体上のブラウン運動に関する Grigor'yan (1999) の結果を純飛躍型マルコフ過程へ拡張している. 一方, Grigor'yan (1999) の結果は, リーマン多様体上のブラウン運動および対称拡散過程の枠組みで, Grigor'yan-Hsu (2009), Hsu-Qin (2010), Ouyang (2013) により一般化および精密化されている. これらの結果は, Huang (J. Theoret. Probab. に掲載予定), Huang-S. (2014) によって, 局所有限な重み付きグラフ上のマルコフ連鎖にも拡張されている.

例 1. (X,d) を d 次元ユークリッド空間とし, $|\cdot|$ をユークリッドノルムとする. m を d 次元ルベーグ測度とし, 積分核 $J(x,\mathrm{d}y)$ について次を仮定する.

- $J(x,\mathrm{d}y)$ は m に絶対連続であり, 定数 $\alpha \in (0,2)$ が存在して密度関数 $J(x,y)$ は

$$J(x,y) \le \frac{c(x,y)}{|x-y|^{d+\alpha}}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus \mathrm{diag}$$

  を満たす. ただし, $c(x,y)$ は $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 上の正値可測関数であり, 定数 $\delta \in [0,1)$ と $q \in [0,\alpha)$ が存在して次を満たすものとする:

$$c(x,y) \asymp \begin{cases} (1+|x|)^2(\log(2+|x|))^\delta + (1+|y|)^2(\log(2+|y|))^\delta, & |x-y| < 1, \\ (1+|x|)^q + (1+|y|)^q, & |x-y| \ge 1. \end{cases}$$

$\mathbb{R}^d$ 上の台がコンパクトで滑らかな関数全体を $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ とかく. すると, $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の二次形式 $(\mathcal{E}, C_0^\infty(\mathbb{R}^d))$ は可閉となり, その閉包 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の正則ディリクレ形式となる (例えば Fukushima-Oshima-Takeda (2011) の Example 1.2.4 を参照せよ). $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が生成する対称マルコフ過程を $\mathbf{M} = (\{X_t\}_{t\ge0}, \{P_x\}_{x\in\mathbb{R}^d})$ とかく.

(a) $\alpha - q > 1 - \delta$ ならば, 定数 $c > 0$ が存在して

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{|X_t - X_0|}{e^{ct^{\frac{1}{1-\delta}}}} \le 1 \quad P_x\text{-a.s.}, \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}^d.$$

(b) $0 < \alpha - q \le 1 - \delta$ ならば, $0 < \varepsilon < \alpha - q + \delta$ を満たす任意の正数 ε に対して定数 $c > 0$ が存在して

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{|X_t - X_0|}{e^{ct^{\frac{1}{\beta-q-\varepsilon}}}} \le 1 \quad P_x\text{-a.s.}, \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}^d.$$

$\delta = 1$ かつ $q \in [0, \alpha)$ のとき, 対称マルコフ過程 $\mathbf{M}$ は保存的である [S. (Forum Math. に掲載予定)]. しかし, 脱出レートの上限は分からない.