数理解析研究所講究録
第 1903 巻 2014 年 157-164

多次元多重オイラー積とレヴィ測度の関係

立命館大学・理工学研究科　清水　信孝
Nobutaka Shimizu
Graduate School of Science and Engineering,
Ritsumeikan University

概要

多次元離散型分布に対応する多変数関数は，具体的に書けるものとして多くは存在しない．本解説では，[2] において導入された多変数有限オイラー積によって導かれる分布，更にはそれらの無限分解可能性についてこれまでに [4], [5] において得られた結果について紹介する．

1 擬無限分解可能分布

無限分解可能分布に関連する研究の中で，次のような分布のクラスが存在する．

定義 1.1 (擬無限分解可能分布 ([1] 参照)). $\mathbb{R}^d$ 上の確率測度が擬無限分解可能であるとは，その特性関数をレヴィ・ヒンチン表現の形で書いた際，そのレヴィ測度 ν に相当する測度が $\mathbb{R}^d$ 上の符号付き測度で，$\nu(\{0\})=0$ かつ $\int_{\mathbb{R}^d}(|x|^2\wedge 1)|\nu|(dx)<\infty$ をみたすときをいう．この測度をここでは擬レヴィ測度と呼ぶ．

注. 擬無限分解可能とは古くから 1 次元の分布の非無限分解可能性を示す為に用いられてきた手法の 1 つであるが，そのクラスそのものの性質についてはあまり知られていない．最近では [8] 等においても取り扱われている分布のクラスである．また高次元の擬無限分解可能性については，それらに対応する関数とその周辺を後に紹介するオイラー積を用いて [1] の中で議論している．

2 ゼータ関数とオイラー積

まずゼータ関数とオイラー積の関係について簡単に紹介する．リーマン・ゼータ関数については [9] 等を参照して頂きたい．

2.1 ゼータ関数

リーマン・ゼータ関数は以下の級数又はオイラー積で定義される．

$$\zeta(s):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_p\left(1-p^{-s}\right)^{-1},\qquad s=\sigma+it,\quad \sigma>1.$$

ただし $\prod_p$ は素数全体にわたる積とする．オイラー積表示からリーマン・ゼータ関数は $1 < \sigma := \Re(s)$ で零点を持たない．リーマン・ゼータ関数 $\zeta(s)$ は全 s 平面の有理型関数に解析接続されるが，本解説では絶対収束領域 $1 < \sigma$ のみを扱う．また，リーマン・ゼータ関数の拡張としてディリクレ L 関数等が広く知られている．

3 $\mathbb{R}$ 上のゼータ分布

絶対収束領域 $\sigma > 1$ において，リーマン・ゼータ関数を用いた以下の $\mathbb{R}$ 上の分布が古くから知られている．

定義 3.1. $n \in \mathbb{N}$, $\sigma > 1$ に対して，確率変数 X_σ が以下の分布に従うときリーマン・ゼータ確率変数，その分布をリーマン・ゼータ分布という．

$$\mathrm{P}_{X_\sigma}(\{-\log n\}) = \frac{n^{-\sigma}}{\zeta(\sigma)}.$$

また，その特性関数 $f_\sigma(t)$, $t \in \mathbb{R}$ は以下の様にゼータ関数を正規化した形で与えられる．

$$f_\sigma(t) = \mathrm{E}e^{\mathrm{i}tX_\sigma} = \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}tx}\mathrm{P}_{X_\sigma}(dx) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mathrm{i}t\log n}\frac{n^{-\sigma}}{\zeta(\sigma)} = \frac{\zeta(\sigma+\mathrm{i}t)}{\zeta(\sigma)}.$$

このリーマン・ゼータ分布は最も古い文献として [7] に記されている．[6] には以下の命題がある．

命題 3.2. $\mathbb{R}$ 上のリーマン・ゼータ分布は複合ポアソンであり，そのレヴィ測度 N_σ は有限かつ次のように書ける．

$$N_\sigma(dx) = \sum_p \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} p^{-r\sigma} \delta_{r\log p}(dx). \tag{3.1}$$

4 多次元ゼータ分布

前章の命題 3.2 からわかる事は，ゼータ分布の無限分解可能性はオイラー積表示によって導かれている．そこで高次元離散型分布の無限分解可能性についてオイラー積を用いた次小節のような議論がなされている．

4.1 多次元多重オイラー積

オイラー積の拡張として以下がある．

定義 4.1 ([2]). $d, m \in \mathbb{N}$, $\vec{s} \in \mathbb{C}^d$, $-1 \le \alpha_{lp} \le 1$, $\vec{a}_l \in \mathbb{R}^d$, $1 \le l \le m$ に対し, 多次元多重オイラー積 $Z_E(\vec{s})$ を次の無限積で定義する.

$$Z_E(\vec{s}) = \prod_p \prod_{l=1}^{m} \left(1 - \alpha_{lp} p^{-\langle \vec{a}_l, \vec{s} \rangle}\right)^{-1}, \qquad \min_{1 \le l \le m} \Re \langle \vec{a}_l, \vec{s} \rangle > 1.$$

この無限積は領域 $\min_{1 \le l \le m} \Re \langle \vec{a}_l, \vec{s} \rangle > 1$ において絶対収束する. また, 上記のような多重オイラー積で 1 次元のものは [10] 等で扱わている.

4.2 多次元多重ゼータ分布

以下, $\vec{s} := \vec{\sigma} + \mathrm{i}\vec{t}$, $\vec{\sigma}, \vec{t} \in \mathbb{R}^d$ に対し, $f_{\vec{\sigma}}(\vec{t})$ を次のように定義する.

$$f_{\vec{\sigma}}\left(\vec{t}\right) := \frac{Z_E\left(\vec{\sigma} + \mathrm{i}\vec{t}\right)}{Z_E(\vec{\sigma})}.$$

このように Z_E を正規化した関数は常に無限分解可能な特性関数となるわけではない. そこでいつ特性関数になるのか, またいつ複合ポアソン (無限分解可能) となるのかについて [1], [2] において議論されている.

以下, $\vec{a} \in \mathbb{R}^d$ に対し, $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m \in \mathbb{R}^d$ が (LR) を充たすとは, $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m \in \mathbb{R}^d$ が線形従属であるが, $\mathbb{Q}$ 上一次独立な代数的数 ψ_l $(1 \le l \le m)$ が存在し, $\vec{a}_l = \psi_l \vec{a}$ と書けることとする. また, $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m \in \mathbb{R}^d$ が線形独立であるとき, (LI) と書くことにする. ただし, 実数 $\theta_1, \ldots, \theta_n$ が $\mathbb{Q}$ 上一次独立であるとは, $\sum_{k=1}^{n} c_k \theta_k = 0$, $c_k \in \mathbb{Q}$ なるのは $c_1 = \cdots = c_n = 0$ に限られるということである.

[2] においては更に以下のような多次元多重オイラー積を用意している.

定義 4.2 (η 重 φ 階オイラー積, $Z_E^{\eta,\varphi}(\vec{s})$, [2]). $d, \varphi, \eta \in \mathbb{N}$, $\vec{s} \in \mathbb{C}^d$ とする. ここで $-1 \le \alpha_{lk}(p) \le 1$, $\vec{a}_l \in \mathbb{R}^d$, $1 \le l \le \varphi$, $1 \le k \le \eta$ に対し, d 次元 η 重 φ 階オイラー積 $Z_E^{\eta,\varphi}(\vec{s})$ を以下の無限積で定義する.

$$Z_E^{\eta,\varphi}(\vec{s}) := \prod_p \prod_{l=1}^{\varphi} \prod_{k=1}^{\eta} \left(1 - \alpha_{lk}(p) p^{-\langle \vec{a}_l, \vec{s} \rangle}\right)^{-1}, \qquad \min_{1 \le l \le \varphi} \Re \langle \vec{a}_l, \vec{s} \rangle > 1. \tag{4.1}$$

このとき, 次が知られている.

命題 4.3 ([2]). (4.1) において $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_\varphi$ が *(LI)* または *(LR)*, $\alpha_{lk}(p) = 0, \pm 1$ を充たすとする. このとき $f_{\vec{\sigma}}$ が特性関数となる必要充分条件は, 任意の $1 \le l \le \varphi$, 素数 p に対し, $\sum_{k=1}^{\eta} \alpha_{lk}(p) \ge 0$. 更にこのとき $f_{\vec{\sigma}}$ は $\mathbb{R}^d$ 上の複合ポアソンとなり, そのレヴィ測度 $N_{\vec{\sigma}}^{\eta,\varphi}$ は有限かつ次のように書ける.

$$N_{\vec{\sigma}}^{\eta,\varphi}(dx) = \sum_p \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\varphi} \sum_{k=1}^{\eta} \frac{1}{r} \alpha_{lk}(p)^r p^{-r\langle \vec{a}_l, \vec{\sigma} \rangle} \delta_{\log p^r \vec{a}_l}(dx).$$

この命題は方向を変える (高階) こと及び 1 次元に帰着される同一直線上 (多重) で和を取る際に重みのある点が重複しないようにずらした 1 次元の複合ポアソンゼータ分布を貼り合わせることにより高次元多重型の複合ポアソンゼータ分布を導入することができる事を示している.

5 結果

前章で多次元多重オイラー積を正規化した関数は常に無限分解可能な特性関数となるわけではないと触れたが，それらの関係を 2 変数有限オイラー積の場合について [1] で議論している．[1] では主に積を取る素数を 1 つに限定した関数を用いていくつかの結果を与えているが，我々は複数選んだ場合についてこれより述べるいくつかの結果を得ている.

まず以下の記号を用意する.

- ID: $\mathbb{R}^2$ 値の無限分解可能な特性関数の族.
- ID^0: $\mathbb{R}^2$ 値の擬無限分解可能であるが，通常の無限分解可能でない特性関数の族.
- ND: $\mathbb{R}^2$ 値の特性関数とならない関数の族.

更に次の関数を用意する.

定義 5.1. $p_1, p_2 \in \mathbb{P}$ とする．$\sigma_1, \sigma_2 > 0$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ なる，$s_1 = \sigma_1 + \mathrm{i}t_1$, $s_2 = \sigma_2 + \mathrm{i}t_2$, $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2)$, $\vec{t} = (t_1, t_2)$ に対し，多次元オイラー積 $g^{\sharp}_{p_1p_2}$, $g^{*}_{p_1p_2}$ を

$$\begin{aligned} g^{\sharp}_{p_1p_2}(\vec{\sigma}, \vec{t}) &:= \frac{1}{(1-p_1^{-s_1})(1-p_1^{-s_2})} \times \frac{1}{(1-p_2^{-s_1})(1-p_2^{-s_2})}, \\ g^{*}_{p_1p_2}(\vec{\sigma}, \vec{t}) &:= \frac{1}{(1+p_1^{-s_1-s_2})(1+p_2^{-s_1-s_2})}. \end{aligned}$$

とし，これらを正規化した関数を以下とおく.

$$G^{\sharp}_{p_1p_2}(\vec{\sigma}, \vec{t}) := \frac{g^{\sharp}_{p_1p_2}(\vec{\sigma}, \vec{t})}{g^{\sharp}_{p_1p_2}(\vec{\sigma}, 0)}, \ G^{*}_{p_1p_2}(\vec{\sigma}, \vec{t}) := \frac{g^{*}_{p_1p_2}(\vec{\sigma}, \vec{t})}{g^{*}_{p_1p_2}(\vec{\sigma}, 0)}.$$

このとき以下の結果を得る.

定理 A ([5]).

$$(1)\ G^{\sharp}_{p_1p_2} \in ID, \quad (2)\ G^{*}_{p_1p_2} \in ND, \quad (3)\ G^{\sharp}_{p_1p_2} G^{*}_{p_1p_2} \in ID^0.$$

以下，定理 A (3) の証明を簡単に述べる.

定理 A (3) の証明. まずはじめに $G^{\sharp}_{p_1p_2}G^{*}_{p_1p_2}$ が特性関数であることを示す.

$$g^{\sharp}_{p_1p_2}(\vec{\sigma},\vec{t})g^{*}_{p_1p_2}(\vec{\sigma},\vec{t})=\prod_{j=1}^{2}\frac{1}{(1-p_j^{-2s_1-2s_2})}\times\frac{(1-p_j^{-s_1-s_2})}{(1-p_j^{-s_1})(1-p_j^{-s_2})}.$$

$|X|,|Y|<1$ なる,X,Y に対し, $\frac{1}{1-X}=\sum_{n=0}^{\infty}X^n$ かつ $\frac{1-XY}{(1-X)(1-Y)}=\frac{1}{1-X}+\frac{1}{1-Y}-1=1+\sum_{n=1}^{\infty}(X^n+Y^n)$ である. したがって,

$$\begin{aligned}
&g^{\sharp}_{p_1p_2}(\vec{\sigma},\vec{t})g^{*}_{p_1p_2}(\vec{\sigma},\vec{t})\\
&=\left(\sum_{l_1=0}^{\infty}\frac{1}{p_1^{2l_1(s_1+s_2)}}\left(1+\sum_{m_1=1}^{\infty}\frac{1}{p_1^{m_1s_1}}+\sum_{n_1=1}^{\infty}\frac{1}{p_1^{n_1s_2}}\right)\right)\\
&\quad\times\left(\sum_{l_2=0}^{\infty}\frac{1}{p_2^{2l_2(s_1+s_2)}}\left(1+\sum_{m_2=1}^{\infty}\frac{1}{p_2^{m_2s_1}}+\sum_{n_2=1}^{\infty}\frac{1}{p_2^{n_2s_2}}\right)\right)\\
&=\left(\sum_{l_1,m_1,n_1=1}^{\infty}\frac{A_1(l_1)A_1(m_1,n_1)}{l_1^{s_1+s_2}m_1^{s_1}n_1^{s_2}}\right)\left(\sum_{l_2,m_2,n_2=1}^{\infty}\frac{A_2(l_2)A_2(m_2,n_2)}{l_2^{s_1+s_2}m_2^{s_1}n_2^{s_2}}\right)
\end{aligned}$$

を得る. ここで, $a,b,c\in\mathbb{N}$ と $j=1,2$ に対して,

$$A_j(l_j):=\begin{cases}1 & l_j=1,p_j^{2a},\\ 0 & \text{その他},\end{cases}$$

$$A_j(m_j,n_j):=\begin{cases}1 & (m_j,n_j)=(1,1),(1,p_j^{b}),(p_j^{c},1),\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

とする. ここで $\sum_{l_1,m_1,n_1=1}^{\infty}\frac{A_1(l_1)A_1(m_1,n_1)}{l_1^{s_1+s_2}m_1^{s_1}n_1^{s_2}}$ 及び $\sum_{l_2,m_2,n_2=1}^{\infty}\frac{A_2(l_2)A_2(m_2,n_2)}{l_2^{s_1+s_2}m_2^{s_1}n_2^{s_2}}$ は [3] において導入された多次元新谷ゼータ関数のクラスに属し, 更に各項が非不値であることから $G^{\sharp}_{p_1p_2}G^{*}_{p_1p_2}$ は同じく [3] において導入された多次元新谷ゼータ分布の特性関数であることがわかる.

次に $G^{\sharp}_{p_1p_2}G^{*}_{p_1p_2}$ が無限分解可能ではなく,擬無限分解可能な特性関数であることを示す.

$$\begin{aligned}
\log G^{\sharp}_{p_1p_2}(\vec{\sigma},\vec{t})G^{*}_{p_1p_2}(\vec{\sigma},\vec{t})&=\sum_{j=1}^{2}\Bigg(\log(1-p_j^{-\sigma_1})-\log(1-p_j^{-\sigma_1-it_1})\\
&\qquad+\log(1-p_j^{-\sigma_2})-\log(1-p_j^{-\sigma_2-it_2})\\
&\qquad+\log(1+p_j^{-\sigma_1-\sigma_2})-\log(1+p_j^{-\sigma_1-it_1-\sigma_2-it_2})\Bigg)\\
&=\sum_{j=1}^{2}\left(\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}p_j^{-r\sigma_1}(p_j^{-rit_1}-1)+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}p_j^{-r\sigma_2}(p_j^{-rit_2}-1)\right.
\end{aligned}$$

$$+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r}p_j^{-r(\sigma_1+\sigma_2)}(p_j^{-ri(t_1+t_2)}-1)\Bigg)$$
$$=\int_{\mathbb{R}^2}(e^{i\langle\vec{t},x\rangle}-1)N_{\vec{\sigma}}^{G^\sharp_{p_1p_2}G^*_{p_1p_2}}(dx),$$

ここで

$$N_{\vec{\sigma}}^{G^\sharp_{p_1p_2}G^*_{p_1p_2}}(dx):=\sum_{j=1}^{2}\Bigg(\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}p_j^{-r\sigma_1}\delta_{r\log p_j(1,0)}(dx)+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}p_j^{-r\sigma_2}\delta_{r\log p_j(0,1)}(dx)$$
$$+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r}p_j^{-r(\sigma_1+\sigma_2)}\delta_{r\log p_j(1,1)}(dx)\Bigg)$$

とする．測度 $N_{\vec{\sigma}}^{G^\sharp_{p_1p_2}G^*_{p_1p_2}}$ は第 3 項と第 6 項に現れる不の重みの項が他によっても打ち消されることのない符号付き測度である．また，

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2}\left|N_{\vec{\sigma}}^{G^\sharp_{p_1p_2}G^*_{p_1p_2}}\right|(dx)&=\left|\sum_{j=1}^{2}\left\{\sum_{r=0}^{\infty}r^{-1}p_j^{-r\sigma_1}+\sum_{r=0}^{\infty}r^{-1}p_j^{-r\sigma_2}+\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r r^{-1}p_j^{-r(\sigma_1+\sigma_2)}\right\}\right|\\
&\le\sum_{j=1}^{2}\left\{\left|\sum_{r=0}^{\infty}r^{-1}p_j^{-r\sigma_1}\right|+\left|\sum_{r=0}^{\infty}r^{-1}p_j^{-r\sigma_2}\right|+\left|\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r r^{-1}p_j^{-r(\sigma_1+\sigma_2)}\right|\right\}\\
&\le\sum_{j=1}^{2}\left\{\left|\sum_{r=0}^{\infty}r^{-1}p_j^{-r\sigma_1}\right|+\left|\sum_{r=0}^{\infty}r^{-1}p_j^{-r\sigma_2}\right|+\left|\sum_{r=0}^{\infty}r^{-1}p_j^{-r(\sigma_1+\sigma_2)}\right|\right\}\\
&\le\sum_{j=1}^{2}\left\{\left(p_j^{-\sigma_1}+\int_1^{\infty}\frac{1}{x}p_j^{-x\sigma_1}dx\right)+\left(p_j^{-\sigma_2}+\int_1^{\infty}\frac{1}{x}p_j^{-x\sigma_2}dx\right)\right.\\
&\qquad\left.+\left(p_j^{-(\sigma_1+\sigma_2)}+\int_1^{\infty}\frac{1}{x}p_j^{-x(\sigma_1+\sigma_2)}dx\right)\right\}\\
&\le\sum_{j=1}^{2}\left\{\left(p_j^{-\sigma_1}+(\sigma_1\log p_j)^{-1}\right)+\left(p_j^{-\sigma_2}+(\sigma_2\log p_j)^{-1}\right)\right.\\
&\qquad\left.+\left(p_j^{-(\sigma_1+\sigma_2)}+\{(\sigma_1+\sigma_2)\log p_j\}^{-1}\right)\right\}\\
&<\infty
\end{aligned}$$

であるので $\mathbb{R}^2$ 上の擬レヴィ測度であることがわかる．以上により $N_{\vec{\sigma}}^{G^\sharp_{p_1p_2}G^*_{p_1p_2}}\in ID^0$ を得る． □

同様に次の関数を用意する．

定義 5.2. $p_1, p_2 \in \mathbb{P}$ とする. $\sigma_1, \sigma_2 > 0$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ なる, $s_1 = \sigma_1 + \mathrm{i}t_1$, $s_2 = \sigma_2 + \mathrm{i}t_2$, $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2)$, $\vec{t} = (t_1, t_2)$ に対し, 多次元オイラー積 $f_{p_1p_2}$, $g_{p_1p_2}$, $h_{p_1p_2}$ を

$$f_{p_1p_2}(\vec{\sigma}, \vec{t}) := \frac{1}{(1 - p_1^{-s_1-s_2})(1 - p_2^{-s_1-s_2})},$$

$$g_{p_1p_2}(\vec{\sigma}, \vec{t}) := \prod_{j=1}^{2} \frac{1}{(1 - p_j^{-s_1})(1 - p_j^{-s_2})(1 + p_j^{-s_1-s_2})},$$

$$h_{p_1p_2}(\vec{\sigma}, \vec{t}) := \prod_{j=1}^{2} \frac{1}{(1 + p_j^{-s_1})(1 + p_j^{-s_2})(1 - p_j^{-s_1-s_2})}.$$

とし, これらを正規化した関数を以下とおく.

$$F_{p_1p_2}(\vec{\sigma}, \vec{t}) := \frac{f_{p_1p_2}(\vec{\sigma}, \vec{t})}{f_{p_1p_2}(\vec{\sigma}, 0)}, \quad G_{p_1p_2}(\vec{\sigma}, \vec{t}) := \frac{g_{p_1p_2}(\vec{\sigma}, \vec{t})}{g_{p_1p_2}(\vec{\sigma}, 0)}, \quad H_{p_1p_2}(\vec{\sigma}, \vec{t}) := \frac{h_{p_1p_2}(\vec{\sigma}, \vec{t})}{h_{p_1p_2}(\vec{\sigma}, 0)}.$$

これらについても以下の結果を得る.

定理 B ([4]).

$$(11)\ F_{p_1p_2} \in ID, \qquad (12)\ G_{p_1p_2} \in ID^0, \qquad (13)\ H_{p_1p_2} \in ND,$$

$$(21)\ F_{p_1p_2}G_{p_1p_2} \in ID, \qquad (22)\ G_{p_1p_2}H_{p_1p_2} \in ID, \qquad (23)\ H_{p_1p_2}F_{p_1p_2} \in ND,$$

$$(31)\ F_{p_1p_2}G_{q_1q_2} \in ID^0, \qquad (32)\ G_{p_1p_2}H_{q_1q_2} \in ND, \qquad (33)\ H_{p_1p_2}F_{q_1q_2} \in ND.$$

参考文献

[1] T. Aoyama and T. Nakamura, Behaviors of multivariable finite Euler products in probabilistic view, Math. Nachr. **286** (2013), 1691–1700.

[2] T. Aoyama and T. Nakamura, Multidimensional polynomial Euler products and infinitely divisible distributions on $\mathbb{R}^d$, submitted (2013), http://arXiv:1204.4041.

[3] T. Aoyama and T. Nakamura, Multidimensional Shintani zeta functions and zeta distributions on $\mathbb{R}^d$, Tokyo J. Math. **36** (2013), 521–538.

[4] T. Aoyama and N. Shimizu, Properties of multidimensional discrete distributions having Euler products, (2014) preprint.

[5] T. Aoyama and N. Shimizu, Some results of multidimensional discrete probability measures represented by Euler products, to appear in JSIAM Lett. (2014).

[6] B. V. Gnedenko and A. N. Kolmogorov, *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables (Translated from the Russian by Kai Lai Chung)*, Addison-Wesley, 1968.

[7] A. Ya. Khinchine, *Limit Theorems for Sums of Independent Random Variables (in Russian)*, Moscow and Leningrad, 1938.

[8] A. Lindner and K. Sato, Properties of stationary distributions of a sequence of generalized Ornstein-Uhlenbeck processes, Math. Nachr. **284** (2011), 2225–2248.

[9] 松本耕二, リーマンのゼータ関数 (開かれた数学), 朝倉書店 2005.

[10] J. Steuding, *Value Distributions of L-functions*, Lecture Notes in Mathematics Vol. 1877, Springer-Verlag, 2007.