数理解析研究所講究録
第 1903 巻 2014 年 148-151

On the range of random walk on graphs satisfying a uniform condition

東京大学大学院数理科学研究科　岡村 和樹 *
Kazuki Okamura
Graduate School of Mathematical Sciences,
The University of Tokyo

本稿は著者の研究 [3] の要約である。[3] で述べていないいくつかの問題についても述べる。

無限連結グラフ X 上の単純ランダムウォーク $\{S_n\}_n$ が時刻 $n-1$ までに通過した点の個数 R_n について、大数の (強 または 弱) 法則に相当するものが成立するか否か、を考える。Dvoretzky and Erdös [2] から、$\mathbb{Z}^d$ 上単純ランダムウォークに対しては、R_n/n は $1-F$ に概収束する。ここで F は再帰確率である。ここでのグラフは vertex-transitive なもの ($\mathbb{Z}^d$ など) を含んでいるが、そうではないものも考える。Vertex-transitive でないグラフの場合は、出発点により分布が異なりうる。

以下、グラフは無限連結グラフのみを考える。自己ループや多重辺はないものとする。辺に向きは入っていないとする。頂点の次数は一様有界とする。グラフの頂点の集合を X で表す。辺の集合を表す記号は省略する。x と y が辺で結ばれているとき、$x \sim y$ と書く。

$((S_n)_{n\ge 0}, (P_x)_{x\in X})$ を X 上の単純ランダムウォークとする。$T_x^+ := \inf\{n \ge 1 : S_n = x\}$, $F_1 := \inf_{x\in X} P_x(T_x^+ < +\infty)$, $F_2 := \sup_{x\in X} P_x(T_x^+ < +\infty)$, とおく。$R_n := |\{S_0, \dots, S_{n-1}\}|$ とおく。P_x についての期待値を E_x で表す。

$f : X \to \mathbb{R}$ に対して、

$$\mathcal{E}(f) := \frac{1}{2}\sum_{x\sim y}(f(x) - f(y))^2.$$

*kazukio@ms.u-tokyo.ac.jp

とおく。交わりをもたない $A, B \subset X$ に対し、それらの間の effective resistance を以下のように定義する。

$$R_{\mathrm{eff}}(A,B)^{-1} := \inf\{\mathcal{E}(f) : f|_A = 1, f|_B = 0\}.$$

また、

$$\rho(x,n) := R_{\mathrm{eff}}(\{x\}, B(x,n)^c), \ \ x \in X, n \in \mathbb{N}.$$

ただし、$B(x,n)$ は x 中心、半径 n の球である。距離は通常の graph metric とする。また、

$$\rho(x) := \lim_{n\to\infty} \rho(x,n).$$

とおく。

もし $(S_n)_n$ が recurrent ならば、任意の $x \in X$ に対し $\rho(x) = +\infty$ である。このとき X を recurrent graph と呼ぶ。$(S_n)_n$ が transient ならば、任意の $x \in X$ に対し $\rho(x) < +\infty$ である。このとき X を transient graph と呼ぶ。

定義 1 (一様性条件). 収束 $\rho(x,n) \to \rho(x)$ が x について一様であるとき、X は一様性条件 (U) をみたすという。

全ての vertex-transitive graph は (U) をみたしている。いくつかの irregular graph も (U) をみたす。

定理 2. グラフ X が (U) をみたしているとする。このとき、任意の $x \in X$ と $\epsilon > 0$ に対して、

$$\lim_{n\to\infty} P_x(R_n \geq n(1 - F_1 + \epsilon)) = 0, \ \ \textit{exponentially fast.} \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} P_x(R_n \leq n(1 - F_2 - \epsilon)) = 0. \tag{2}$$

収束は x について一様である。

定理 3. 以下をみたすグラフ X が存在する。
(i) $F_1 < F_2$,
(ii) (U),
(iii) ある $o \in X$ について

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{E_o[R_n]}{n} = 1 - F_2, \ \ \textit{and,} \ \ \limsup_{n\to\infty} \frac{E_o[R_n]}{n} = 1 - F_1. \tag{3}$$

注意 4. (i) X が vertex transitive ならば $F_1 = F_2$ であるので、R_n/n は $1 - F_1$ に確率収束する。
(ii) もし $F_1 = F_2$ ならば、定理 2(2) 式は定理 2(1) 式を用いて簡単にわかる。
(iii) Recurrent graph の場合は、$F_1 = F_2 = 1$ なので、定理 2(2) 式は自明である。
(iv) 定理 3 から、($R_n/n \in [0,1]$ であることに注意すれば、) R_n/n はいかなる実数にも収束しない。
(v) 定理 3 から、定理 2 において、F_1 をそれより真に大きくはできない。F_2 をそれより真に小さくはできない。

系 5. ある $\epsilon > 0$ が存在して、$\sup_x P_x(M < T_x^+ < +\infty) = O(M^{-1-\epsilon})$ とする。このとき、任意の $x \in X$ に対し、

$$1 - F_2 \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{R_n}{n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{R_n}{n} \leq 1 - F_1, \ P_x\text{-}a.s. \tag{4}$$

例として、$\mathbb{Z}^d$, $d \geq 7$, なら (4) 式をみたす。
定理 2 の (1) 式が指数的に収束することから、

系 6. X が (U) をみたしているとする。$x \in X$ とする。もし $\limsup_{n\to\infty} P_x(S_n = x)^{1/n} = 1$ なら、

$$\lim_{n\to\infty} P_x(R_n \geq n(1 - F_1 + \epsilon) | S_n = x) = 0.$$

極限は $P_x(S_n = x) > 0$ となる n の上でとる。

Benjamini, Izkovsky, and, Kesten [1] の Theorem 1 は、これを vertex-transitive graph について示している。
(U) をみたすグラフの例をあげる。

例 7. 以下にあげる グラフ、またそれらと rough-isometric なグラフは (U) をみたす。
(1) $\mathbb{Z}^2$ の無限連結部分グラフ.
(2) d 次元 Sierpinski gasket, $d \geq 2$.
(3) d 次元 Sierpinski carpet, $d \geq 2$.

なお、(U) をみたさないグラフも存在する。例えば Woess [4] Example 6.16 で扱われているグラフである。
最後にいくつか問題を述べる。

問題 8. *(1)* (U) をみたすグラフに対し、*Benjamini, Izkovsky, and Kesten [1]* の *Theorem 2* を拡張できるか？
具体的には、$\limsup_{n\to\infty} P_x(S_{2n}=x)/P_x(S_{4n}=x) < +\infty$ のとき、

$$\lim_{n\to\infty} P_x(R_n \leq n(1-F_2-\epsilon)|S_n=x) = 0.$$

となるのか？
(2) (U) は *recurrent graph* の間では *rough isometry* について安定だが、*transient graph* の間でも安定か？
(3) ランダムグラフにおける (U) はどうなっているのか？一例として、*supercritical Bernoulli percolation* を考える。そこでの無限クラスターは、*almost surely* で (U) をみたすか？

参考文献

[1] I. Benjamini, R. Izkovsky and H. Kesten, On the range of the simple random walk bridge on groups, Elec. J. Prob., 12 (2007), 591-612.

[2] A. Dvoretzky and P. Erdös, Some problems on random walk in space, Proc. Second Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob., 353-368, Univ. of California Press, 1951.

[3] K. Okamura, On the range of random walk on graphs satisfying a uniform condition, preprint, available at arXiv 1308.1487v2.

[4] W. Woess, Random walks on infinite graphs and groups, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.