数理解析研究所講究録
第 1903 巻 2014 年 125-127

一般化ファインマン・カッツ乗法汎関数に対するゲージ関数の無限遠での漸近挙動*

東北学院大学工学部　松浦將國†
Masakuni Matsuura
Faculty of Engineering, Tohoku Gakuin University

$X=(\Omega,\mathscr{M},\mathscr{M}_t,\mathbb{P}_x,X_t)$ を $\mathbb{R}^d$ 上の過渡的な対称 α 安定過程 $(0<\alpha<2)$ とし，$(\mathscr{E},\mathscr{F})$ を X のディリクレ形式とする．このとき，$u\in\mathscr{F}\cap C_\infty(\mathbb{R}^d)$ に対して差分型加法汎関数 $u(X_t)-u(X_0)$ を福島分解すると，

$$u(X_t)-u(X_0)=M_t^u+N_t^u.$$

ここに，M^u は二乗可積分マルチンゲールでかつ N^u は零エネルギーの連続加法汎関数である．$F(x,y)$ を正値有界対称で対角線上 0 である関数とするとき，次の有界変動でない加法汎関数を考える．

$$A_t^{\mu,F,u}:=A_t^\mu+\sum_{s\le t}F(X_{s-},X_s)+N_t^u$$

A_t^μ は加藤測度 μ に対応する正値連続加法汎関数である．このとき，次の関数をゲージ関数という．

$$g(x):=\mathbb{E}_x[e^{A_\infty^{\mu,F,u}}]$$

一方，非局所 Feynman-Kac 乗法汎関数 $e^{A_t^{\mu,F,u}}$ は Doléans-Dade 方程式の解となる乗法型マルチンゲール

$$W_t=-M_t^u+\sum_{s\le t}F(X_{s-},X_s)-c\int_0^t\int(F+e^{F_u}-F_u-1)(X_s,y)|X_s-y|^{-d-\alpha}dyds$$

と局所な Feynman-Kac 乗法汎関数の積に分解される：

$$e^{A_t^{\mu,F,u}}=e^{u(X_t)-u(X_0)}W_te^{A_t^\mu+c\int_0^t\int(F+e^{F_u}-F_u-1)(X_s,y)|X_s-y|^{-\alpha-d}dyds}.$$

---

* 確率論シンポジウム，京都大学数理解析研究所，2013 年 12 月 19 日．

† 非常勤講師，メールアドレス：m-matsuura@tjcc.tohoku-gakuin.ac.jp

ここに，$c>0$ は空間次元と対称安定過程の指数 α による定数で $F_u(x,y):=F(x,y)+u(x)-u(y)$. このとき得られる正値連続加法汎関数 $t\mapsto c\int_0^t\int(F+e^{F_u}-F_u-1)(X_s,y)|X_s-y|^{-\alpha-d}dyds$ には次の Revuz 測度 ν が対応する.

$$\nu(dx):=c\left(\int(F+e^{F_u}-F_u-1)(x,y)|x-y|^{-\alpha-d}dy\right)dx$$

以下，μ と ν はグリーン緊密な加藤測度と仮定する. X を W でギルザノフ変換 ($d\mathbb{P}_x^Y:=W_td\mathbb{P}_x$) したマルコフ過程を Y とする. 金大弘と桑江一洋は

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}(f,f):=&\ \mathcal{E}(f,f)+\mathcal{E}(u,f^2)\\ &-\int f^2(x)\mu(dx)-c\int f(x)f(y)(e^F-1)(x,y)|x-y|^{-(\alpha+d)}dxdy\end{aligned}$$

という二次形式によりゲージ関数 g の有界性を特徴付けていた ([KK1, Theorem 6.1])．これを用いると Y のディリクレ形式 $(\mathcal{E}^Y,\mathcal{F})$ は

$$\mathcal{E}^Y(e^uf,e^uf)=\mathcal{Q}(f,f)+\int f^2d(\mu+\nu)$$

として与えられる. [KK1, Theorem 6.1] の条件 (5) は次の条件と同等である：

$$\inf\{\mathcal{E}^Y(e^uf,e^uf);\int f^2d(\mu+\nu)=1\}>1.$$

本講演ではこの場合に

$$\lim_{|x|\to\infty}g(x)=1 \tag{G}$$

であることが強マルコフ性を用いて証明されることと,

$$g(x)=1+O(|x|^{\alpha-d})\quad(|x|\to\infty)$$

が初等的な計算により示されることを講演した. 竹田雅好はポテンシャルが局所の場合に，金大弘・桑江一洋はポテンシャルが非局所の場合に Feynman-Kac 乗法汎関数の gaugeability を特徴付けており，その中で式 (G) が重要な役割を果たしている（[T], [KK2]). ただし，[KK2] における式 (G) の証明は本講演で言及したものとは全く異なるものである.

参考文献

[KK1] D. Kim, K. Kuwae, *Analytic characterizations of gaugeability for generalized Feynman-Kac functionals,* preprint.

[KK2] D. Kim, K. Kuwae, *On a stability for generalized Feynman-Kac semigroups of stable-like processes,* preprint.

[T] M. Takeda, *Gaugeability for Feynman-Kac functionals with applications to symmetric α-stable processes,* Proc. Amer. Math. Soc. **134**, no. 9, 2729-2738, 2006.