数理解析研究所講究録
第 1903 巻 2014 年 50-58



# 確率解析的くりこみ理論

Fumio Hiroshima (廣島 文生)
九州大学 大学院数理学研究院

## 1 紫外切断のくりこみ理論

ここで紹介するのは M. Gubinelli, F. Hiroshima, J. Lörinczi [GHL13] のレヴィユーである. 場の量子論のスカラー場の模型を考える. それは $N$-粒子 Nelson 模型と言われるものであるが, 物理的な背景の説明は省略して, 数学的な構造のみを簡単に述べることにする. Nelson 模型は Edward Nelson により 1964 年 [Nel64a] に厳密に数学的な解析が行われた模型である. Nelson 模型の Hamiltonian は, はじめに紫外切断関数を導入して自己共役作用素として定義され, しかるべき方法で, 紫外切断を外して, 紫外切断のない自己共役作用素として定義される. もちろん, こういう処方が上手くいくことはほとんどない. 簡単に出来るものとしては, 著者の知っている限り, ここで述べる Nelson 模型くらいしか知られていないようである. Fock 表現で, その Hamiltonian は

$$H = H_{\mathrm{p}} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_{\mathrm{f}} + \int_{\mathbb{R}^d}^{\oplus} H_{\mathrm{I}}(x)dx \tag{1.1}$$

で与えられる, Hilbert 空間 $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}^{3N}) \otimes \mathscr{F}$ 上の自己共役作用素である. Fock 空間とは $\mathscr{F} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}^{(n)}$ で定義される. ただし $\mathscr{F}^{(n)} = \otimes_{\mathrm{sym}}^n L^2(\mathbb{R}^d)$ は $n$-粒子部分空間を表し, $\mathscr{F}^{(0)} = \mathbb{C}$ である. $\mathscr{F}$ 上のノルムは $\|F\|_{\mathscr{F}}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{\mathscr{F}^{(n)}}^2$ で与えられる. Fock 真空を $\mathbb{1}_{\mathscr{F}} = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \ldots \in \mathscr{F}$ で表し, 混乱がないときは簡単に $\mathbb{1}$ と書くことにする. $N$-粒子 Schrödinger 作用素は

$$H_{\mathrm{p}} = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} \Delta_j + V$$

で与えられる. $a^*(f)$ と $a(f)$, $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, は生成作用素と消滅作用素を表し, 正準交換関係 $[a(f), a^*(g)] = (\bar{f}, g)$, $[a(f), a(g)] = 0 = [a^*(f), a^*(g)]$ を満たす. 形式的に $a^\sharp(f) = \int a^\sharp(k)\hat{f}(k)dk$ と書く. $\omega(k) = |k|$ は dispersion relation を表す. 場の自由 Hamiltonian を $H_{\mathrm{f}}$ とかき, これは $\omega$ の第 2 量子化作用素で定義される:

$$H_{\mathrm{f}} \prod_{j=1}^{n} a^*(f_j)\mathbb{1} = \sum_{j=1}^{n} a^*(f_1) \cdots a^*(\omega f_j) \cdots a^*(f_n)\mathbb{1}, \quad H_{\mathrm{f}}\mathbb{1} = 0.$$

相互作用は

$$H_{\mathrm{I}}(x) = g\sum_{j=1}^{N} \int \frac{1}{\sqrt{2\omega(k)}} \left( \hat{\varphi}(k) \mathrm{e}^{ik\cdot x_j} a(k) + \hat{\varphi}(-k) \mathrm{e}^{-ik\cdot x_j} a^*(k) \right) dk \tag{1.2}$$

で与えられる．$\mathscr{H} \cong L^2(\mathbb{R}^{3N};\mathscr{F})$ の同一視をする．この同一視の下で相互作用は $(H_{\mathrm{I}}F)(x) = H_{\mathrm{I}}(x)F(x)$ と作用する．関数 $\varphi$ は Hamiltonian が作用素として well defined になるために必要であり紫外切断関数といわれる．典型的な例として $\hat{\varphi} = \mathbb{1}_{|k|<\Lambda}$ がある．$g \in \mathbb{R}$ は結合定数である．仮定 $\hat{\varphi}/\omega^{1/2}$, $\hat{\varphi}/\omega \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\overline{\hat{\varphi}(k)} = \hat{\varphi}(-k)$ の下で $H$ は $D(H_{\mathrm{p}} \otimes \mathbb{1}) \cap D(\mathbb{1} \otimes H_{\mathrm{f}})$ 上で下から有界な自己共役作用素になる．さらに赤外切断が

$$\hat{\varphi}/\omega^{3/2} \in L^2(\mathbb{R}^d), \tag{1.3}$$

によって導入されれば，スペクトルの下限に対応する固有状態 $\Psi \in \mathscr{H}$ が存在する．つまり基底状態が存在する．また条件 (1.3) は基底状態存在の必要条件にもなっている．$H$ の 1 点極限を考える．つまり $\varphi(x) \to (2\pi)^{3/2}\delta(x)$ または $\hat{\varphi}(k) \to \mathbb{1}$．この極限の存在は [Nel64a] で作用素論的な手法で示されているが，これを汎関数積分で証明するというのが我々の主定理である．Nelson 自身も [Nel64b] で汎関数積分によるくりこみを考えていたようであるが，成功には至らなかったようである．汎関数積分を使うことの利点は，模型の形に依らずにくりこみ理論が展開できるところにある．例えば $H_{\mathrm{p}}$ を相対論的な Schrödinger 作用素 $\sqrt{-\Delta + m^2} + V$ に換えた模型に対しても，我々の方法でくりこみが可能であると信じている．

さて，この極限を考えるために紫外切断 (UV) 関数として $\hat{\varphi}_\varepsilon(k) = -\varepsilon|k|^2/2$ をとる．この紫外切断によって Hamiltonian $H_\varepsilon$ を定義し $\varepsilon > 0$ を UV パラメターとみなす．そして $H_\varepsilon - E_\varepsilon$ の $\varepsilon \downarrow 0$ 極限を考える．ここで $E_\varepsilon \in \mathbb{R}$ はくりこみ項である．これは具体的に後で与える．主定理は以下である．(1) 汎関数積分をつかって $E_\varepsilon$ を自然に導きだす．(2) $H_{\mathrm{ren}} = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}(H_\varepsilon - E_\varepsilon)$ を半群の意味で示す．(3) $H_{\mathrm{ren}}$ のペアポテンシャルを導く．

## 2 正則化された Hamiltonian の汎関数積分表示

$\mathbb{1}_\lambda(k) = \begin{cases} 1, & \omega(k) < \lambda \\ 0, & \omega(k) \geq \lambda \end{cases}$ とし $\mathbb{1}_\lambda^\perp(k) = \mathbb{1} - \mathbb{1}_\lambda(k)$ とおく．赤外切断 $\lambda > 0$ を仮定する．簡単のために $V = 0$ とする．正則化された Hamiltonian を

$$H_\varepsilon = H_{\mathrm{p}} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_{\mathrm{f}} + g\int_{\mathbb{R}^{3N}}^{\oplus} \overline{H_{\mathrm{I}}^\varepsilon(x)}dx, \quad \varepsilon > 0,$$

で定義する．$H_{\mathrm{I}}^\varepsilon(x) = g\sum_{j=1}^N \int \frac{1}{\sqrt{2\omega(k)}}\left(\hat{\varphi}_\varepsilon(k)e^{-ik\cdot x_j}a(k) + \hat{\varphi}_\varepsilon(-k)e^{ik\cdot x_j}a^*(k)\right)dk$ である．主目的は $H_\varepsilon$ で $\varepsilon \downarrow 0$ の極限を考えることである．

$$E_\varepsilon = -\frac{g^2}{2}N\int_{\mathbb{R}^3}\frac{e^{-\varepsilon|k|^2}}{\omega(k)}\beta(k)\mathbb{1}_\lambda^\perp dk$$

としよう．ここで $\beta(k) = \dfrac{1}{\omega(k) + |k|^2/2}$．$E_\varepsilon \to -\infty$ $(\varepsilon \downarrow 0)$ に注意せよ．主定理は以下である．

**定理 2.1** 次を満たす下から有界な自己共役作用素 $H_{\mathrm{ren}}$ が存在する．

$$\mathrm{s-}\lim_{\varepsilon\downarrow 0} e^{-t(H_\varepsilon - E_\varepsilon)} = e^{-tH_{\mathrm{ren}}}, \quad t \geq 0.$$

$(B_t)_{t\in\mathbb{R}}$ は $3N$ 次元のブラウン運動を表すとする．次の命題はよく知られている [LHB12, Chapter 6].

**命題 2.2** $f, h \in L^2(\mathbb{R}^{3N})$ としよう. このとき

$$(f \otimes \mathbb{1}, e^{-2TH_\varepsilon} h \otimes \mathbb{1}) = \int_{\mathbb{R}^{3N}} dx \mathbb{E}_W^x \left[ \overline{f(B_{-T})} h(B_T) e^{\frac{g^2}{2} S_\varepsilon} \right].$$

ここで $S_\varepsilon = \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_{-T}^T dt W_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t-s)$ はペア相互作用でペアポテンシャルは

$$W_\varepsilon(x,t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2\omega(k)} e^{-\varepsilon|k|^2} e^{-ik\cdot x} e^{-\omega(k)|t|} \mathbb{1}_\lambda^\perp dk \tag{2.1}$$

で与えられる.

次の関数を考えよう.

$$E_\varepsilon(x,t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\varepsilon|k|^2} e^{-ik\cdot x - \omega(k)|t|}}{2\omega(k)} \beta(k) \mathbb{1}_\lambda^\perp dk, \quad \varepsilon \geq 0.$$

**命題 2.3** 関数 $S_0^{\rm ren}$ で次を満たすものが存在する.

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{E}_W^x \left[ e^{\frac{g^2}{2}(S_\varepsilon - 4NTE_\varepsilon(0,0))} \right] = \mathbb{E}_W^x \left[ e^{\frac{g^2}{2} S_0^{\rm ren}} \right].$$

$W_\varepsilon(x,t)$ は滑らかで, $W_\varepsilon(x,t) \to W_0(x,t)$ $(\varepsilon \downarrow 0)$ が $(x,t) \neq (0,0)$ で成り立つ. ここで

$$W_0(x,t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2\omega(k)} e^{-ik\cdot x} e^{-\omega(k)|t|} \mathbb{1}_\lambda^\perp dk.$$

しかし $W_\varepsilon(0,0) \to \infty$ $(\varepsilon \downarrow 0)$ で, $W_0(x,t)$ は $(x,t) = (0,0)$ で特異性をもつ. 命題 2.3 を証明しよう. $T > 0$ を固定する. $\varepsilon \downarrow 0$ のとき相互作用の対角成分だけが特異な項である. また $0 < \tau \leq T$ を固定し,

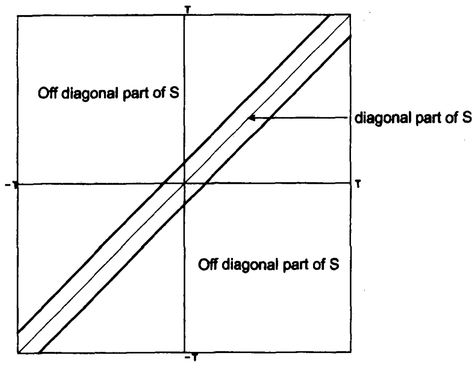


図 1: $S_\varepsilon$ の対角成分と非対角成分

$[t]_T = -T \vee t \wedge T$ としよう. 正則化された相互作用を対角成分と非対角成分にわける: $S_\varepsilon = S_\varepsilon^{\rm d} + S_\varepsilon^{\rm od}$. ここで $S_\varepsilon^{\rm d} = 2\sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_s^{[s+\tau]_T} dt\, W_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t-s)$, $S_\varepsilon^{\rm od} = 2\sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_{[s+\tau]_T}^T dt W_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t-s)$. である. $S_\varepsilon^{\rm d}$ は $S_\varepsilon$ を対角成分の近傍 $\{(t,t) \in \mathbb{R}^2 | |t| \leq T\}$ で積分したもの, そして $S_\varepsilon^{\rm od}$ はそれ以外の部分を表す. $\tau = T$ のときは $S_\varepsilon^{\rm od} = 0$ となる. 次の補題はすぐにわかる.

**補題 2.4** パスごとに $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} S_\varepsilon^{\mathrm{od}} = S_0^{\mathrm{od}}$. ここで $S_0^{\mathrm{od}}$ は $S_\varepsilon^{\mathrm{od}}\lceil_{\varepsilon=0}$ である.

確率積分をつかえば解析が困難な項 $S_\varepsilon^{\mathrm{d}}$ を評価できる. くりこまれた作用を次のように定義する:

$$S_\varepsilon^{\mathrm{ren}} = S_\varepsilon - 4NTE_\varepsilon(0,0), \quad \varepsilon > 0.$$

これは $S_\varepsilon^{\mathrm{ren}} = S_\varepsilon^{\mathrm{od}} + X_\varepsilon + Y_\varepsilon + Z_\varepsilon$ のように表せる. ここで

$$X_\varepsilon = 2\sum_{i\neq j}^{N} \int_{-T}^{T} E_\varepsilon(B_s^i - B_s^j, 0)ds, \quad Y_\varepsilon = 2\sum_{i,j=1}^{N} \int_{-T}^{T} ds \int_s^{[s+\tau]_T} \nabla E_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t-s)\cdot dB_t,$$

$$Z_\varepsilon = -2\sum_{i,j=1}^{N} \int_{-T}^{T} E_\varepsilon(B_{[s+\tau]_T}^i - B_s^j, [s+\tau]_T - s)ds.$$

$X_\varepsilon$, $S_\varepsilon^{\mathrm{od}}$ と $Z_\varepsilon$ は簡単に評価できる.

**補題 2.5** *(1)* ある定数 $c_z$ と $c_s$ が存在して $|Z_\varepsilon| \le c_z T$ と $|S_\varepsilon^{\mathrm{od}}| \le c_s(T+1)$ がパスと $\varepsilon \ge 0$ に一様に成立する.

*(2)* 全ての $\alpha > 0$, $\varepsilon \ge 0$, $T > 0$ に対して $\sup_{x\in\mathbb{R}^{3N}} \mathbb{E}_W^x[e^{\alpha|X_\varepsilon|}] \le e^{c_X \alpha T}$ を満たす定数 $c_X$ が存在する.

$Y_\varepsilon$ について考えよう. $\varepsilon > 0$ のときは Fubini の定理より確率積分とルベーグ積分を交換してもいい. よって $Y_\varepsilon = \sum_{i=1}^N \int_{-T}^T \Phi_{\varepsilon,t}^i dB_t^i$. ここで $\Phi_{\varepsilon,t} = (\Phi_{\varepsilon,t}^1, \ldots, \Phi_{\varepsilon,t}^N)$ は $\mathbb{R}^{3N}$ に値をとる確率過程:

$$\Phi_{\varepsilon,t}^i = 2\sum_{j=1}^{N} \int_{[t-\tau]_T}^{t} \nabla E_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t-s)ds.$$

$Y_0$ を $Y_0 = \sum_{i=1}^N \int_{-T}^T \Phi_{0,t}^i dB_t^i$ で定義する.

**補題 2.6** ある定数 $c_Y$ が存在して, 任意の $\alpha > 0$ に対して $\sup_{x\in\mathbb{R}^{3N}} \mathbb{E}_W^x[e^{\alpha Y_\varepsilon}] \le e^{c_Y(\alpha^2 T + \alpha)}$ *($\varepsilon \ge 0$)*. また $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \mathbb{E}_W^x[|Y_\varepsilon - Y_0|^2] = 0$ *($x \in \mathbb{R}^{3N}$)*.

証明: $\Phi_{\varepsilon,t}^i$ はフィルトレーション $(\mathcal{F}_t)_{t\ge -T}$ に adapted なマルチンゲールである.

$$\int_{-T}^{T} |\Phi_{\varepsilon,t}|^2 dt \le 4\sum_{i=1}^{N} \int_{-T}^{T} \left[\sum_{j=1}^{N} \int_{[t-\tau]_T}^{t} |\nabla E_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t-s)| ds\right]^2 dt$$
$$\le 4c^2 N \sum_{i,j=1}^{N} \int_{-T}^{T} \left[\int_{[t-\tau]_T}^{t} |B_t^i - B_s^j|^{-\theta} |t-s|^{-(1-\theta)} ds\right]^2 dt$$

となる. ここで Jensen の不等式 と $|\nabla E_\varepsilon(x,t)| \le c|x|^{-\theta}|t|^{-(1-\theta)}$, $\theta \in [0,1]$ を使った. この評価は $\varepsilon \in [0,1]$

に一様である. 適当な $\frac{1}{2}<\theta<1$ に対して, Schwartz の不等式を使えば

$$\int_{-T}^{T}|\Phi_{\varepsilon,t}|^2dt \le 4c^2N\sum_{i,j=1}^{N}\int_{-T}^{T}\left[\int_{[t-\tau]_T}^{t}|B_t^i-B_s^j|^{-2\theta}ds\right]\left(\int_{[t-\tau]_T}^{t}|t-s|^{-2(1-\theta)}ds\right)dt$$
$$\le 4c^2\tau^{2\theta-1}N\sum_{i,j=1}^{N}\int_{-T}^{T}\left[\int_{[t-\tau]_T}^{t}|B_t^i-B_s^j|^{-2\theta}ds\right]dt \le 4c^2\tau^{2\theta-1}NQ.$$

ここで $c$ は定数で $\varepsilon$ に依らない. また $Q=\sum_{i,j=1}^{N}\int_{-T}^{T}ds\int_s^{[s+\tau]_T}|B_t^i-B_s^j|^{-2\theta}dt$. Girsanov の定理から

$$\left(\mathbb{E}_W^x\left[e^{\alpha Y_\varepsilon}\right]\right)^2 \le \mathbb{E}_W^x\left[e^{2\alpha\int_{-T}^{T}\Phi_{\varepsilon,t}\cdot dB_t-\frac{1}{2}(2\alpha)^2\int_{-T}^{T}|\Phi_{\varepsilon,t}|^2dt}\right]\mathbb{E}_W^x\left[e^{2\alpha^2\int_{-T}^{T}|\Phi_{\varepsilon,t}|^2dt}\right]$$
$$=\mathbb{E}_W^x\left[e^{2\alpha^2\int_{-T}^{T}|\Phi_{\varepsilon,t}|^2dt}\right]\le \mathbb{E}_W^x\left[e^{\gamma Q}\right].$$

ここで $\gamma=8c\sqrt{N}\alpha^2\tau^{2\theta-1}$. Jensen の不等式をもう一度つかって

$$\mathbb{E}_W^x\left[e^{\gamma Q}\right]\le\int_{-T}^{T}\frac{ds}{2T}\mathbb{E}_W^x\left[e^{2T\gamma\sum_{i,j=1}^{N}\int_s^{s+\tau}|B_t^i-B_s^j|^{-2\theta}dt}\right].$$

ここで $[s+\tau]_T\le s+\tau$ を使った. 条件付き期待値をとってマルコフ性を使えば

$$\mathbb{E}_W^x\left[e^{2T\gamma\sum_{i,j=1}^{N}\int_0^{\tau}|B_{s+t}^i-B_s^j|^{-2\theta}dt}\right]=\mathbb{E}_W^x\left[\mathbb{E}^{B_s}\left[e^{2T\gamma\sum_{i,j=1}^{N}\int_0^{\tau}|B_t^i-B_0^j|^{-2\theta}dt}\right]\right].$$

関数 $|x|^{-2\theta}$ は Kato クラスなので

$$\sup_{x,z\in\mathbb{R}^d}\mathbb{E}_W^x[e^{\beta\int_0^\tau|B_s^i+z|^{-2\theta}ds}]=\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\mathbb{E}_W^x[e^{\beta\int_0^\tau|B_s^i|^{-2\theta}ds}]\le e^{c\tau\beta}$$

が適当な $c>0$ と全ての $\beta>0$ で成り立つ. これから

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^{3N}}\mathbb{E}_W^x\left[e^{\gamma Q}\right]\le\sup_{x\in\mathbb{R}^{3N}}\int_{-T}^{T}\frac{ds}{2T}\mathbb{E}_W^x\left[e^{2T\gamma\sum_{i,j=1}^{N}\int_0^{\tau}|B_{s+t}^i-B_s^j|^{-2\theta}dt}\right]\le e^{c\alpha^2T}.$$

よって $\sup_{\varepsilon\in(0,1]}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\mathbb{E}_W^x[e^{2\alpha Y_\varepsilon}]\le e^{c(\alpha^2T+\alpha)}$ が全ての $\alpha\in\mathbb{R}$ で成り立つ. 同様に全ての $0<\varepsilon$ に対して

$$\int_{-T}^{T}|\Phi_{\varepsilon,t}-\Phi_{0,t}|^2dt\le 4\mathrm{c}_\varepsilon^2N\sum_{i,j=1}^{N}\int_{-T}^{T}\left[\int_{[t-\tau]_T}^{t}|B_t^i-B_s^j|^{-2\theta}ds\right]\left(\int_{[t-\tau]_T}^{t}|t-s|^{-2(1-\theta)}ds\right)dt$$
$$\le 4\mathrm{c}_\varepsilon^2\tau^{2\theta-1}N\sum_{i,j=1}^{N}\int_{-T}^{T}\left[\int_{[t-\tau]_T}^{t}|B_t^i-B_s^j|^{-2\theta}ds\right]dt\le 4\mathrm{c}_\varepsilon^2\tau^{2\theta-1}NQ.$$

ここで $|\nabla E_\varepsilon(x,t)-\nabla\varphi_0(x,t)|\le \mathrm{c}_\varepsilon|x|^{-\theta}|t|^{-(1-\theta)}$, $\theta\in[0,1]$ をつかった. $\mathrm{c}_\varepsilon\to 0$ $(\varepsilon\downarrow 0)$ に注意せよ. $\Phi_\varepsilon$ の収束は $Y_\varepsilon$ が $Y_0$ に収束することも意味する. □

**補題 2.7** 全ての $\alpha\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$, と $f,h\in L^2(\mathbb{R}^{3N})$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^{3N}}dx\mathbb{E}_W^x[f(B_{-T})h(B_T)e^{\alpha S_\varepsilon^{\mathrm{ren}}}]\le\|f\|\|h\|e^{\mathrm{c_{ren}}(\alpha^2T+\alpha T+\alpha)}$$

を満たす定数 $\mathrm{c_{ren}}$ が存在する.

証明: 補題 2.5と 2.6から従う. □

## 3 主定理

**補題 3.1** $\alpha \in \mathbb{R}$ ならば

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \mathbb{E}_W\left[\left|e^{\alpha U_\varepsilon(x)} - e^{\alpha U_0(x)}\right|\right] = 0, \quad x \in \mathbb{R}^{3N}, \quad U = \mathrm{od}, X, Y, Z. \tag{3.1}$$

証明: $U = X$ としよう. $V_C(x) = C\sum_{i\neq j}^N \frac{1}{|x^i - x^j|}$ とする. このとき

$$|X_\varepsilon(x)| \leq \int_{-T}^T V_C(B_s^1 + x^1, ...., B_s^N + x^N)ds,$$
$$\mathbb{E}_W\left[\left|e^{\alpha X_\varepsilon(x)} - e^{\alpha X_0(x)}\right|\right] \leq 2\mathbb{E}_W\left[\left|e^{\alpha \int_{-T}^T V_C(B_s^1+x^1,....,B_s^N+x^N)ds}\right|\right] < \infty$$

がわかる. $X_\varepsilon(x) \to X_0(x)$ a.s. なのでルベーグの優収束定理より (3.1) がわかる. $U = Y$ としよう. $\mathbb{E}_W^x[|e^{\alpha(Y_\varepsilon - Y_0)} - 1|] \to 0$ を示せば十分. $\mathbb{E}_W^x\left[\left(e^{\alpha(Y_\varepsilon-Y_0)} - 1\right)^2\right] = \mathbb{E}_W^x\left[e^{2\alpha(Y_\varepsilon - Y_0)}\right] + 1 - 2\mathbb{E}_W^x\left[e^{\alpha(Y_\varepsilon-Y_0)}\right]$ だから $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathbb{E}_W^x[e^{\alpha(Y_\varepsilon - Y_0)}] = 1$ を示す. 確率変数 $\delta\Phi_t = \Phi_{\varepsilon,t} - \Phi_{0,t}$ を $Y_\varepsilon - Y_0 = \int_{-T}^T \delta\Phi_t \cdot dB_t$ となるように定義する. Girsanov の定理から $1 = \mathbb{E}_W^x[e^{\alpha\int_{-T}^T \delta\Phi_t\cdot dB_t - \frac{\alpha^2}{2}\int_{-T}^T|\delta\Phi_t|^2 dt}]$. 故に

$$\left(\mathbb{E}_W^x\left[e^{\alpha(Y_\varepsilon - Y_0)}\right] - 1\right)^2 \leq \mathbb{E}_W^x\left[e^{2\alpha\int_{-T}^T \delta\Phi_t\cdot dB_t}\right]\mathbb{E}_W^x\left[\left(1 - e^{-\frac{\alpha^2}{2}\int_{-T}^T|\delta\Phi_t|^2dt}\right)^2\right]. \tag{3.2}$$

また

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^{3N}} \mathbb{E}_W^x\left[e^{2\alpha\int_{-T}^T\delta\Phi_t\cdot dB_t}\right] \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^{3N}}\left(\mathbb{E}_W^x\left[e^{4\alpha^2\int_{-T}^T|\delta\Phi_t|^2dt}\right]\right)^{1/2}, \tag{3.3}$$

$$\mathbb{E}_W^x\left[\left(1 - e^{-\frac{\alpha^2}{2}\int_{-T}^T|\delta\Phi_t|^2dt}\right)^2\right] \leq \mathbb{E}_W^x\left[\left|\frac{\alpha^2}{2}\int_{-T}^T|\delta\Phi_t|^2dt\right|^2\right] \to 0 \quad (\varepsilon\downarrow 0). \tag{3.4}$$

(3.4) は補題 2.6で示されている. (3.3) の右辺は $\varepsilon$ に一様に有界. 故に (3.2) の右辺はゼロに収束することがわかる. $U = Z$ としよう. $\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\mathbb{E}_W^x\left[|e^{\alpha(Z_\varepsilon - Z_0)} - 1|\right] \to 0$ を示せばいい.

$$Z_\varepsilon(x) - Z_0(x) = 2\sum_{i,j=1}^N\int_{-T}^T ds\int_{\mathbb{R}^3}\left(e^{-ik\cdot(B^i_{[s+\tau]_T - s} + x^i - B^j_{[s+\tau]_T - s} - x^j)}e^{-([s+\tau]_T - s)\omega(k)}\right)\frac{\beta(k)}{\omega(k)}\mathbb{1}_\lambda^\perp(1 - e^{-\varepsilon|k|^2})dk$$

がわかる. $\eta_\varepsilon(x) = \alpha(Z_\varepsilon(x) - Z_0(x))$ としよう. 直接 $|\eta_\varepsilon(x)|^n \leq c^n\alpha^nT^n\varepsilon^n$ が $x$ に依らない適当な定数 $c$ で成り立つことがわかる. よって $\mathbb{E}_W[e^{\eta_\varepsilon(x)}] = 1 + \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}\mathbb{E}_W[\eta_\varepsilon(x)^n]$. そして $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}\mathbb{E}_W[|\eta_\varepsilon(x)|^n] \leq \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}c^nT^n\varepsilon^n \to 0$ $(\varepsilon\downarrow 0)$ が $x$ に一様に成り立つ. よって $U = Z$ のとき成り立つ. $U = S^{\mathrm{od}}$ のときも同様にわかる. □

**補題 3.2** $\alpha \in \mathbb{R}$, $f, h \in L^2(\mathbb{R}^{3N})$ としよう. このとき

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\mathbb{R}^{3N}} dx\mathbb{E}_W^x[f(B_{-T})h(B_T)e^{\alpha S_\varepsilon^{\mathrm{ren}}}] = \int_{\mathbb{R}^{3N}}dx\int_{\mathbb{R}^{3N}}dx\mathbb{E}_W^x[f(B_{-T})h(B_T)e^{\alpha S_0^{\mathrm{ren}}}].$$

証明: $S_\varepsilon = S_\varepsilon^{\mathrm{od},T} + X_\varepsilon + Y_\varepsilon + Z_\varepsilon$ と telescoping によって

$$\left|\int_{\mathbb{R}^{3N}} dx \mathbb{E}_W^x \left[f(B_{-T})h(B_T)\left(e^{\alpha S_\varepsilon^{\mathrm{ren}}} - e^{\alpha S_0^{\mathrm{ren}}}\right)\right]\right| \le \int_{\mathbb{R}^{3N}} dx|f(x)|\left(\mathbb{E}_W^x\left[|h(B_T)|^2\right]\right)^{1/2} E_\varepsilon(x).$$

ここで $E_\varepsilon(x) = \left(\mathbb{E}_W^x\left[\left(e^{\alpha S_\varepsilon} - e^{\alpha S_0}\right)^2\right]\right)^{1/2}$. また $\sup_{x\in\mathbb{R}^{3N}} E_\varepsilon(x) < \infty$ かつ $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} E_\varepsilon(x) = 0$ $(x \in \mathbb{R}^{3N})$ なのでルベーグの収束定理より補題が従う. □

**補題 3.3** 次が成り立つ.

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(f\otimes \mathbb{1}, e^{-2T(H_\varepsilon + g^2 N E_\varepsilon(0,0))} h\otimes \mathbb{1}) = \int_{\mathbb{R}^{3N}} dx \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{E}_W^x\left[\overline{f(B_{-T})}h(B_T)e^{\frac{g^2}{2}S_0^{\mathrm{ren}}}\right]. \tag{3.5}$$

ここで

$$\begin{aligned} S_0^{\mathrm{ren}} = {} & 2\sum_{i\neq j}^N \int_{-T}^T E_0(B_s^i - B_s^j, 0)ds + 2\sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T \left(\int_{-T}^t \nabla E_0(B_t^i - B_s^j, t-s)ds\right)\cdot dB_t \\ & - 2\sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T E_0(B_T^i - B_s^j, T-s)ds. \end{aligned} \tag{3.6}$$

そして $S_0^{\mathrm{ren}}$ の被積分関数は

$$E_0(X,t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-ikX}e^{-|t|\omega(k)}}{2\omega(k)}\beta(k)\mathbb{1}_\lambda^\perp dk, \quad \nabla E_0(X,t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{-ike^{-ikX}e^{-|t|\omega(k)}}{2\omega(k)}\beta(k)\mathbb{1}_\lambda^\perp dk.$$

証明: Feynman−Kac 型積分表示より

$$(f\otimes \mathbb{1}, e^{-2T(H_\varepsilon+g^2NE_\varepsilon(0,0))}h\otimes\mathbb{1}) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{E}_W^x\left[\overline{f(B_{-T})}h(B_T)e^{\frac{g^2}{2}S_\varepsilon^{\mathrm{ren}}}\right]dx$$

である. 右辺は $\int_{\mathbb{R}^3}\mathbb{E}_W^x[\overline{f(B_{-T})}h(B_T)e^{\frac{g^2}{2}S_0^{\mathrm{ren}}}]dx$ $(\varepsilon\downarrow 0)$ に収束する. よって (3.5) がわかる. また $\tau = T$ とすれば (3.6) がわかる. □

さて $f\otimes\mathbb{1}$ からもっと一般的なベクトル $f\otimes F(\phi(f_1),\dots,\phi(f_n))\mathbb{1}$ へ拡張する. ここで $F\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. 稠密な部分空間 $\mathcal{D}\subset\mathscr{H}$ を次で定義しよう.

$$\mathcal{D} = \left\{f\otimes F(\phi(f_1),\dots,\phi(f_n))\mathbb{1}\,|\,F\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n), f_j\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3), 1\le j\le n, n\in\mathbb{N}, f\in L^2(\mathbb{R}^{3N})\right\}.$$

**補題 3.4** $\Phi = f\otimes F(\phi(u_1),\dots,\phi(u_n))\mathbb{1}$, $\Psi = h\otimes G(\phi(v_1),\dots,\phi(v_m))\mathbb{1}\in\mathcal{D}$ としよう. このとき

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\downarrow 0}(\Phi, e^{-2T(H_\varepsilon+g^2NE_\varepsilon(0,0))}\Psi) = {} & (2\pi)^{-(n+m)/2}\int_{\mathbb{R}^{n+m}} dK_1 dK_2 \overline{\widehat{F}(K_1)}\widehat{G}(K_2) \\ & \times \int_{\mathbb{R}^{3N}} dx \mathbb{E}_W^x\left[\overline{f(B_{-T})}h(B_T)e^{\frac{g^2}{2}S_0^{\mathrm{ren}}+\frac{1}{4}\xi(K_1,K_2)}\right]. \end{aligned}$$

ここで $u=(u_1,...,u_n)$, $v=(v_1,...,v_m)$ として

$$\xi(K_1,K_2)=-\|K_1\cdot u/\sqrt{\omega}\|^2-\|K_2\cdot v/\sqrt{\omega}\|^2-2(K_1\cdot u/\sqrt{\omega},e^{-2T\omega}K_2\cdot v/\sqrt{\omega})$$
$$-2ig\sum_{j=1}^N\int_{-T}^T ds\int_{\mathbb{R}^3}dk\frac{K_1\cdot\widehat{u}(k)}{\sqrt{\omega(k)}}\mathbb{1}_\lambda^\perp e^{-|s-T|\omega(k)}e^{-ikB_s^j}$$
$$+2ig\sum_{j=1}^N\int_{-T}^T ds\int_{\mathbb{R}^3}dk\frac{K_2\cdot\widehat{v}(k)}{\sqrt{\omega(k)}}\mathbb{1}_\lambda^\perp e^{-|s+T|\omega(k)}e^{-ikB_s^j}.$$

証明: $F(\phi(f_1),\ldots,\phi(f_n))\mathbb{1}=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{F}(K)e^{i\phi(K\cdot f)}\mathbb{1}dK$ に気をつければ

$$(\Phi,e^{-2T(H_\varepsilon+g^2NE_\varepsilon(0,0))}\Psi)$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^{(n+m)/2}}\int_{\mathbb{R}^{m+n}}dK_1dK_2\overline{\widehat{F}(K_1)}\widehat{G}(K_2)(f\otimes e^{-i\phi(K_1\cdot f)}\mathbb{1},e^{-2T(H_\varepsilon+g^2NE_\varepsilon(0,0))}h\otimes e^{-i\phi(K_2\cdot h)}\mathbb{1}).$$

あとは簡単な考察から主張が従う. □

Nelson Hamiltonian の紫外切断のくりこみ理論で最も本質的な部分が $H_\varepsilon+g^2NE_\varepsilon(0,0)$ の下からの一様有界性を示すことにある.

**補題 3.5** 定数 $C\in\mathbb{R}$ があって $H_\varepsilon+g^2NE_\varepsilon(0,0)>C$ が $\varepsilon>0$ に一様に成り立つ.

証明: 補題 2.5と 2.6から, 定数 $a_5$ と $b_5$ が存在して $\left(\mathbb{E}_W\left[e^{2(S_\varepsilon^{\mathrm{od},T}(x)+X_\varepsilon(x)+Y_\varepsilon(x)+Z_\varepsilon(x))}\right]\right)^{1/2}\le a_5e^{b_5T}$ が全ての $T>0$ で成立することがわかる. 関数 $W_{\mathrm{har}}(x^1,...,x^N)=\sum_{j=1}^N|x^j|^2$ を考えよう. $H_\varepsilon$ に $\delta W_{\mathrm{har}}$ を加えたものを $H_\varepsilon(\delta)$ と表す. もちろん $\delta\ge0$. そうすれば $H_\varepsilon(\delta)$ $(\delta>0)$ は, 一意的な至るところ正の基底状態 $\Psi_{\mathrm{g}}(\delta)$ をもつことは示せる. $\Psi_{\mathrm{g}}(\delta)>0$ であり, 特に $(f\otimes\mathbb{1},\Psi_{\mathrm{g}}(\delta))\neq0$ が任意の $0\le f\in L^2(\mathbb{R}^{3N})$ で成り立つ. ここで $f\not\equiv0$. その結果

$$\inf\sigma\left(H_\varepsilon(\delta)+g^2NE_\varepsilon(0,0)\right)=-\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\log(f\otimes\mathbb{1},e^{-T(H_\varepsilon(\delta)+g^2NE_\varepsilon(0,0))}f\otimes\mathbb{1})\tag{3.7}$$

が $0\le f\in L^2(\mathbb{R}^{3N})$ で成り立つ.

$$(f\otimes\mathbb{1},e^{-2T(H_\varepsilon(\delta)+g^2NE_\varepsilon(0,0))}f\otimes\mathbb{1})=\int_{\mathbb{R}^d}dx\mathbb{E}_W^x[f(B_{-T})f(B_T)e^{-\int_{-T}^T\delta W_{\mathrm{har}}(B_s)ds}e^{S_\varepsilon^{\mathrm{ren}}}]$$
$$\le\|f\|^2\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\mathbb{E}_W\left(\left[e^{2(S_\varepsilon^{\mathrm{od},T}(x)+X_\varepsilon(x)+Y_\varepsilon(x)+Z_\varepsilon(x))}\right]\right)^{1/2}\le\|f\|^2a_5e^{b_5T}.$$

これは (3.7) から $\inf\sigma\left(H_\varepsilon(\delta)+g^2NE_\varepsilon(0,0)\right)+\frac{b_5}{2}\ge0$, $\delta>0$, を意味する. 大事なことは $b_5$ が $\delta$ に依っていないことである. よって $|(F,e^{-2T(H_\varepsilon(\delta)+g^2NE_\varepsilon(0,0))}G)|\le\|F\|\|G\|e^{b_5T}$ が従う. $F,G\in\mathscr{H}$ としよう. Feynman − Kac 型積分表示から

$$(F,e^{-2TH_\varepsilon(\delta)}G)=\int_{\mathbb{R}^{3N}}dx\mathbb{E}_W^x\left[e^{-\int_{-T}^T\delta W_{\mathrm{har}}(B_s)ds}(\mathrm{I}_{-T}F(B_{-T}),e^{-\phi_{\mathrm{E}}(\int_{-T}^T\sum_{j=1}^N\tilde{\varphi}_s(\cdot-B_s^j)ds)}\mathrm{I}_TG(B_T))\right].$$

ルベーグ優収束定理から $\lim_{\delta\downarrow0}(F,e^{-2T(H_\varepsilon(\delta)+g^2NE_\varepsilon(0,0))}G)=(F,e^{-2T(H_\varepsilon(0)+g^2NE_\varepsilon(0,0))}G)$ なので

$$|(F,e^{-2T(H_\varepsilon(0)+g^2NE_\varepsilon(0,0))}G)|\le\|F\|\|G\|e^{b_5T}.$$

$H_\varepsilon = H_\varepsilon(0)$ なので

$$\inf\sigma(H_\varepsilon + g^2 N E_\varepsilon(0,0)) + \frac{b_5}{2} \geq 0.$$

$C = -\frac{b_5}{2}$ とおけば系が従う. $\square$

**定理 *2.1* の証明:**

$F, G \in \mathscr{H}, C_\varepsilon(F,G) = (F, e^{-t(H_\varepsilon + g^2 N E_\varepsilon(0,0))}G)$ としよう. $F, G \in \mathcal{D}$ に対して $C_\varepsilon(F,G)$ が $\varepsilon \downarrow 0$ で収束することがわかる. 一様な不等式

$$\|e^{-t(H_\varepsilon + g^2 N E_\varepsilon(0,0))}\| < e^{-tC}$$

と $\mathcal{D}$ が $\mathscr{H}$ で稠密ということから $\{C_\varepsilon(F,G)\}_\varepsilon$ がコーシー列となる. $C_0(F,G) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} C_\varepsilon(F,G)$ とする. そうすれば $|C_0(F,G)| \leq e^{-tC}\|F\|\|G\|$. Riesz の定理より有界作用素 $T_t$ で $C_0(F,G) = (F, T_t G)$, $F, G \in \mathscr{H}$, となるものが存在する. よって $\mathrm{s-}\lim_{\varepsilon\downarrow 0} e^{-t(H_\varepsilon + g^2 N E_\varepsilon(0,0))} = T_t$. さらに

$$\mathrm{s-}\lim_{\varepsilon\downarrow 0} e^{-t(H_\varepsilon + g^2 N E_\varepsilon(0,0))} e^{-s(H_\varepsilon + g^2 N E_\varepsilon(0,0))} = \mathrm{s-}\lim_{\varepsilon\downarrow 0} e^{-(t+s)(H_\varepsilon + g^2 N E_\varepsilon(0,0))} = T_{t+s}.$$

左辺 は $T_t T_s$ なので $T_t$ の半群性が従う. $e^{-t(H_\varepsilon + g^2 N E_\varepsilon(0,0))}$ は対称なので, $T_t$ も対称. また $(F, T_t G)$ は $t=0$ で $F, G \in \mathcal{D}$ に対して連続になることもわかる. $\mathcal{D}$ は $\mathscr{H}$ で稠密, $\|T_t\|$ は $t=0$ の近傍で一様に有界なので, $T_t$ は $t=0$ で強連続になる. 故に下から有界な自己共役作用素 $H_{\mathrm{ren}}$ で $T_t = e^{-tH_{\mathrm{ren}}}$, $t \geq 0$, となるものが存在することがわかる. $E_\varepsilon = -g^2 N E_\varepsilon(0,0)$ と置けば証明完了. $\square$

**系 3.6** $H_{\mathrm{ren}}$ のペアポテンシャルは $\frac{g^2}{2} S_0^{\mathrm{ren}}$ である.

証明: 補題 3.3 によって $(f \otimes \mathbb{1}, e^{-2TH_{\mathrm{ren}}} h \otimes \mathbb{1}) = \int_{\mathbb{R}} dx \mathbb{E}_W^x \left[\overline{f(B_{-T})} h(B_T) e^{\frac{g^2}{2} S_0^{\mathrm{ren}}}\right]$ なので系が示される. $\square$

## 参考文献


[GHL13] M. Gubinelli, F. Hiroshima and J. Lorinczi, Ultraviolet renormalization of the Nelson Hamiltonian through functional integration, preprint 2013.

[LHB12] J. Lörinczi, F. Hiroshima and V. Betz, *Feynman-Kac-Type Theorems and Gibbs Measures on Path Space. With Applications into Rigorous Quantum Field Theory*, Studies in Mathematics **34**. de Gruyter 2012.

[Nel64a] E. Nelson, Interaction of nonrelativistic particles with a quantized scalar field, *J. Math. Phys.* **5** (1964), 1990–1997.

[Nel64b] E. Nelson, Schrödinger particles interacting with a quantized scalar field, In *Proc. Conference on Analysis in Function Space, W. T. Martin and I. Segal (eds.)*, page 87. MIT Press, 1964.