数理解析研究所講究録
第1903巻 2014年 37-40

ベッセル過程の到達時刻の尾確率について

濱名裕治 (熊本大学理学部)
Yuji Hamana
Faculty of Science, Kumamoto University
松本裕行 (青山学院大学理工学部)
Hiroyuki Matsumoto
Faculty of Technology and Science, Aoyama Gakuin University

1. 問題と結果

$R^{(\nu)}=\{R_t^{(\nu)}\}_{t\geqq 0}$ を指数 ν の Bessel 過程とする．生成作用素は，

$$\mathscr{G}^{(\nu)}=\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{2\nu+1}{2x}\frac{d}{dx} \quad (x>0)$$

によって与えられ，$\delta=2(\nu+1)$ を次元という．δ が正の整数のときは，$R^{(\nu)}$ は δ-次元 Brown 運動の動径成分と同じ確率法則をもつ．

この報告の目的は，$R^{(\nu)}$ の出発点を a としたときの $b>0$ への到達時刻 $\tau_{a,b}^{(\nu)}$ の分布関数の漸近挙動を示すことである．

$R^{(\nu)}$ の境界は0と無限遠 ∞ であり，∞ は自然境界である．一方，0は指数によって様々な Feller の分類に属するが，自然境界にはならない．したがって，$0<a<b$ の場合は比較的容易に $\tau_{a,b}^{(\nu)}$ の分布関数を具体的に与えることが分かり，漸近挙動も得られる．これらについては，[2, 6] などを参照されたい．

以下，$0<b<a$ の場合を考える．まず，結果を与える．

定理. $0<b<a$ とすると，$t\to\infty$ のとき次が成り立つ：

(1) $\nu=0$ のとき，次が成り立つ：

$$P(\tau_{a,b}^{(0)}>t)=\frac{2\log(a/b)}{\log t}\cdot(1+o(1)).$$

(2) $\nu>0$ のとき，任意の $\varepsilon\in(0,\dfrac{\nu}{\nu+1})$ に対して，次が成り立つ：

$$P(\tau_{a,b}^{(\nu)}>t)=1-\left(\frac{b}{a}\right)^{2\nu}+\left(\frac{b^3}{2a}\right)^{\nu}\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^{\nu}-\left(\frac{b}{a}\right)^{\nu}\right\}\frac{1}{\Gamma(1+\nu)}t^{-\nu}\cdot(1+O(t^{-\varepsilon}))$$

(3) $\nu < 0$ のとき，任意の $\varepsilon \in (0, \dfrac{\nu}{\nu+1})$ に対して，次が成り立つ：

$$P(\tau_{a,b}^{(\nu)} > t) = \left(\frac{2}{ab}\right)^{\nu}\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^{\nu} - \left(\frac{a}{b}\right)^{\nu}\right\}\frac{1}{\Gamma(1-\nu)}t^{\nu}\cdot(1+O(t^{-\varepsilon})).$$

(1) はよく知られているので省略し ([4] 参照)，以下では $\nu \neq 0$ とする．

一次元拡散過程の一般論から，$\mathscr{G}^{(\nu)}$ に対する固有方程式を解くことにより，$0 < b < a$ のときは

$$E[\exp(-\lambda\tau_{a,b}^{(\nu)})] = \left(\frac{b}{a}\right)^{\nu}\frac{K_\nu(a\sqrt{2\lambda})}{K_\nu(b\sqrt{2\lambda})} \quad (\lambda > 0) \tag{1}$$

が成り立つ．ここで，K_ν は第 2 種変形 Bessel 関数 (Macdonald 関数) である．

筆者は [3, 4] において，この Laplace 変換の逆変換を実行し，$\tau_{a,b}^{(\nu)}$ の分布関数および確率密度の具体形さらにそれらの漸近挙動を与えた．そして，$\nu - 1/2$ が整数でない場合は，上の結果と同じ結果を得た．

しかし，$\nu - 1/2$ が整数の場合，とくに奇数次元 Brown 運動の動径成分の場合には，K_ν が本質的に奇数次元の多項式でその他の場合と異質であるため，同じ表示をもつ定数を用いて漸近挙動を与えることはできなかった．

[3, 4] に与えた分布関数の表示を用いず，漸近挙動に特化した議論を行うことで同じ形の定数により漸近挙動を与えることが本報告の目的である．

なお，誤差項の評価においては，分布関数の具体的な表示を用いた方が良い結果が得られる場合があることを注意しておく．

2．(2) の証明

経路空間 $W = C([0,\infty);\mathbf{R})$ 上の，a を出発する指数 ν の Bessel 過程の確率法則を $\mathbb{P}_a^{(\nu)}$ とし，$\tau_b = \tau_b(w)$ $(w \in W)$ を

$$\tau_b = \inf\{t > 0; w(t) = b\}$$

によって定義する．

次の補題を証明の出発点とする．

補題 1. (1) $\mathbb{P}_a^{(\nu)}(\tau_b = \infty) = 1 - \left(\dfrac{b}{a}\right)^{\nu}$.

(2) $\mathbb{P}_a^{(\nu)}$ に関する期待値を $\mathbb{E}_a^{(\nu)}$ と書くと，次が成り立つ：

$$\mathbb{P}_a^{(\nu)}(t < \tau_b < \infty) = b^{2\nu}\mathbb{E}_a^{(\nu)}[(R_t)^{-2\nu}] - b^{2\nu}\mathbb{E}_a^{(\nu)}[(R_t)^{-2\nu}\mathbf{1}_{\{\tau_b \leqq t\}}]. \tag{2}$$

証明. (1) はよく知られているので，省略する.

(2) を示すために次に注意する：

$$\mathbb{P}_a(\tau_b=\infty)=\mathbb{P}_a(\inf_{0\leqq s\leqq t}R_s>b,\ \inf_{s\geqq t}R_s>b)=\mathbb{E}_a\Big[I_{\{\inf_{0\leqq s\leqq t}R_s>b\}}\mathbb{P}_{R_t}(\tau_b=\infty)\Big]$$
$$=\mathbb{E}_a\Big[\Big(1-\Big(\frac{b}{R_t}\Big)^{2\nu}\Big)I_{\{\inf_{0\leqq s\leqq t}R_s>b\}}\Big]=\mathbb{P}_a(\tau_b>t)-\mathbb{E}_a\Big[\Big(\frac{b}{R_t}\Big)^{2\nu}I_{\{\inf_{0\leqq s\leqq t}R_s>b\}}\Big].$$

これから，

$$\mathbb{P}_a^{(\nu)}(t<\tau_b<\infty)=\mathbb{E}_a^{(\nu)}\Big[\Big(\frac{b}{R_t}\Big)^{2\nu}I_{\{\inf_{0\leqq s\leqq t}R_s>b\}}\Big]$$
$$=E_a^{(\nu)}\Big[\Big(\frac{b}{R_t}\Big)^{2\nu}\Big]-E_a^{(\nu)}\Big[\Big(\frac{b}{R_t}\Big)^{2\nu}I_{\{\tau_b\leqq t\}}\Big]$$

となる. □

次の評価は [1] において示されている.

補題 2. $t\to\infty$ のとき，$\mathbb{P}_a^{(\nu)}(t<\tau_b<\infty)=O(t^{-\nu})$ が成り立つ.

また，Bessel 過程の推移確率の具体形 ([7] 参照) から次は容易に得られる.

補題 3. $a>0, 0<p<1+\nu$ のとき，

$$\frac{\Gamma(1+\nu-p)}{\Gamma(1+\nu)}\frac{1}{(2t)^p}e^{-a^2/2t}\leqq\mathbb{E}_a^{(\nu)}[(R_t)^{-2p}]\leqq\frac{\Gamma(1+\nu-p)}{\Gamma(1+\nu)}\frac{1}{(2t)^p}+Ct^{-1-p}\quad(t\geqq1)$$

がある定数 C に対して成り立つ.

以上の準備の下で (2) を示す. (2) の右辺第 1 項に対しては，補題 3 より

$$\mathbb{E}_a^{(\nu)}[(R_t)^{-2\nu}]=\frac{1}{\Gamma(1+\nu)(2t)^\nu}(1+O(t^{-1}))$$

となる.

(2) の右辺第 2 項については，

$$I_1=\mathbb{E}_a^{(\nu)}[(R_t)^{-2\nu}\mathbf{1}_{\{\tau_b\leqq t^{\alpha q}\}}],\qquad I_2=\mathbb{E}_a^{(\nu)}[(R_t)^{-2\nu}\mathbf{1}_{\{t^{\alpha q}<\tau_b\leqq t\}}]$$

とおいて，$\mathbb{E}_a^{(\nu)}[(R_t)^{-2\nu}\mathbf{1}_{\{\tau_b\leqq t\}}]=I_1+I_2$ と分解する. I_2 に対しては，補題 2, 3 および Hölder の不等式を用いると $I_2=O(t^{-\nu-\alpha\nu})$ が容易に示される.

I_1 に対しては，Bessel 過程の強マルコフ性から

$$I_1=\int_0^{t^{\alpha q}}\mathbb{E}_a^{(\nu)}[(R_{t-s})^{-2\nu}]\mathbb{P}_a^{(\nu)}(\tau_b\in ds)$$

が成り立つ．$\mathbb{E}_a^{(\nu)}[(R_{t-s})^{-2\nu}]$ に対して補題 3 を適用し，補題 2 と合わせて誤差項の評価を行えば結論を得る．

詳細は，[5] を参照されたい．

3．(3) の証明． (1) より，$\nu > 0$ に対して

$$\mathbb{P}_a^{(-\nu)}(\tau_b \in dt) = \left(\frac{a}{b}\right)^{2\nu} \mathbb{P}_a^{(\nu)}(\tau_b \in dt)$$

が成り立つ．$\mathbb{P}_a^{(-\nu)}(\tau_b = \infty) = 0$ より，(2) の結果を用いると，

$$\mathbb{P}_a^{(-\nu)}(\tau_b > t) = \left(\frac{a}{b}\right)^{2\nu} \mathbb{P}_a^{(\nu)}(t < \tau_b < \infty) = a^{2\nu}\left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{2\nu}\right)\frac{1}{\Gamma(1+\nu)(2t)^{\nu}}(1 + O(1))$$

となり，結論を得る．□

REFERENCES

[1] T. Byczkowski and M. Ryznar, Hitting distribution of geometric Brownian motion, Studia Math., **173** (2006), 19–38.

[2] R. K. Getoor and M. J. Sharpe, Excursions of Brownian motion and Bessel processes, Z. Wahr. Ver. Gebiete, **47** (1979), 83–106.

[3] Y. Hamana and H. Matsumoto, The probability densities of the first hitting times of Bessel processes, J. Math-for-Industry, **4** (2012), 91–95.

[4] Y. Hamana and H. Matsumoto, The probability distributions of the first hitting times of Bessel processes, Trans. AMS, **365** (2013), 5237–5257.

[5] Y. Hamana and H. Matsumoto, Asymptotics of the probability distributions of the first hitting times of Bessel processes, Electron. Commun. Probab., **19** (2014), no. 5, 1–5.

[6] J. T. Kent, Eigenvalue expansions for diffusion hitting times, Z. Wahr. Ver. Gebiete, **52** (1980), 309–319.

[7] D. Revuz and M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, 3rd ed., Spronger-Verlag, 1999.