数理解析研究所講究録
第 1910 巻 2014 年 58-73

On second order admissibilities of estimators of gamma shape parameters

大阪府立大・工学研究科 上玉利 瑛太 (Eita Kamitamari)
Graduate School of Engineering,
Osaka Prefecture University

大阪府立大・数学系 田中 秀和 (Hidekazu Tanaka)
Faculty of Liberal Arts and Sciences,
Osaka Prefecture University

1 はじめに

ガンマ分布は待ち時間モデルや降水雨量モデルなど, 様々な分野で応用されている分布であり, その確率密度関数は

$$f(x|\alpha,\beta)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}x^{\alpha-1}\exp\left(-\frac{x}{\beta}\right)\quad(x>0)$$

と表される. ここで, $\alpha(>0)$ は形状母数, $\beta(>0)$ は尺度母数と呼ばれる. 形状母数の推定に関しては例えば, Anderson and Ray [3] は Shenton and Bowman [12] による最尤推定量 (以下, MLE) のバイアスの展開式を用いて, バイアス修正 MLE を提案した. また, Yanagimoto [17] は MLE よりもバイアスの絶対値と分散を共に小さくする条件付き MLE を提案した[1]. Tanaka, Pal and Lim [16] は Ghosh and Sinha [8] の結果を用いて, MLE, バイアス修正 MLE, 条件付き MLE はすべて 2 次漸近非許容的であることを示した. さらに, 彼らはそれぞれの推定量を優越し, かつ, 2 次漸近許容的となる推定量を導出した. 一方, 同時推定問題に関しては, Dey, Ghosh and Srinivasan [7] が entropy loss の下で尺度母数の同時推定を考察し, James and Stein [9] に似た結果を得ているが, 形状母数の同時推定問題については議論されていないようである. そこで本論では, DasGupta and Ghosh [6], Tanaka, Obayashi and Takagi [15], Obayashi, Tanaka and Takagi [11] らの結果を用いて, 規準化された 2 乗誤差損失関数の下で大標本の観点から, 多母数ガンマ分布における形状母数の同時推定問題について議論する.

[1]条件付き MLE については Berman [4] が [17] より前に触れているが, そこでは MLE は正のバイアスをもつことを示すために触れており, その性質については言及していない. また, Zaigraev and Podraza [18] も別の観点から同じ推定量を提案している.

本論の構成は以下のとおりである．まず，第2章では本論で用いる記号や定義を与える．第3章ではパラメータ直交性を定義し，その結果の下でガンマ分布のパラメータの変換を考える．第4章では，多母数分布族の一般的な設定における推定量の2次漸近許容性について述べる．第5章では，多母数ガンマ分布とガンマ分布における形状母数の推定量をいくつか紹介する．第6章では，$p(\geq 2)$ 母数ガンマ分布において，第5章で紹介した推定量の改良について考え，この改良した推定量が2次漸近許容的であるかどうかを調べる．最後に第7章では先行研究と本論の結果を比較し，今後の課題について述べる．

2 準備

本章では，一般的な設定において規準化された2乗誤差損失関数の下での2次漸近許容性に関する必要条件及び十分条件について述べる．

まず，$X_1, \ldots, X_n$ を互いに独立に同一の分布 P_θ に従う確率ベクトルとする．ただし，$\theta = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \eta_1, \ldots, \eta_p)' \in \mathbb{R}_+^{2p}$ は未知母数であり，$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)' \in \mathbb{R}_+^p$ を興味ある母数，$\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_p)' \in \mathbb{R}_+^p$ を局外母数とし，$p(\geq 2)$ は事前に与えられているものとする．また，P_θ はある σ-有限測度 μ に関する確率密度関数 $f(x|\theta)$ をもつものとする．さらに，適当な正則条件 (例えば Takeuchi and Akahira [14] の (i)〜(iv)) を仮定する．このとき，規準化された2乗誤差損失関数

$$l(\alpha, \hat{\alpha}) := (\hat{\alpha} - \alpha)' I^\alpha(\theta)(\hat{\alpha} - \alpha)$$

の下で α の推定問題を考える．ここで，$I^\alpha(\theta)$ は α のフィッシャー情報行列である．$R(\theta, \hat{\alpha})$ を α の推定量 $\hat{\alpha}$ のリスク，つまり，$R(\theta, \hat{\alpha}) := E_\theta[l(\theta, \hat{\alpha})]$ とする．

3 パラメータ直交性

本章ではパラメータ直交性を定義し，Cox and Reid [5] によって与えられたパラメータ直交性の概念を紹介する[2]．

定義 1 $\boldsymbol{\vartheta} := (\boldsymbol{\vartheta}_1', \boldsymbol{\vartheta}_2')'$ とし，$\boldsymbol{\vartheta}_1 := (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{p_1})'$, $\boldsymbol{\vartheta}_2 := (\vartheta_{p_1+1}, \ldots, \vartheta_{p_1+p_2})'$ とする．各 $k, l\ (k = 1, \ldots, p_1,\ l = p_1+1, \ldots, p_1+p_2)$ に対して，

$$I_{kl}^{\boldsymbol{\vartheta}}(\boldsymbol{\vartheta}) = 0$$

が成り立つとき，$\boldsymbol{\vartheta}_1$ と $\boldsymbol{\vartheta}_2$ は直交しているという．

---

[2]パラメータ直交性については Akahira and Takeuchi [2] でも触れている．

補題 1 ϑ_1 を興味ある母数, $\boldsymbol{\vartheta}_2$ を局外母数とし, $\boldsymbol{\vartheta}^* := (\vartheta_1, \rho_2(\boldsymbol{\vartheta}), \ldots, \rho_p(\boldsymbol{\vartheta}))'$, $\boldsymbol{\vartheta}^*_{\{1\}} := (\rho_2(\boldsymbol{\vartheta}), \ldots, \rho_p(\boldsymbol{\vartheta}))'$ とする.

$$\sum_{k=2}^{p} I_{km}^{\boldsymbol{\vartheta}*}(\boldsymbol{\vartheta}^*)\frac{\partial}{\partial\vartheta_1}\rho_k(\boldsymbol{\vartheta}) = -I_{1m}^{\boldsymbol{\vartheta}*}(\boldsymbol{\vartheta}^*) \tag{3.1}$$

を満足する $\rho_k(\boldsymbol{\vartheta})$ $(k = 2, \ldots, p)$ が存在するとき, $\boldsymbol{\vartheta}$ を $\boldsymbol{\vartheta}^*$ と変換すると, パラメータ変換した分布はパラメータ直交性をもつという. ここで, $f^*(x|\boldsymbol{\vartheta}^*) = f(x|\boldsymbol{\vartheta})$ とし,

$$I_{kl}^{\boldsymbol{\vartheta}*}(\boldsymbol{\vartheta}^*) := -E_{\boldsymbol{\vartheta}}\left[\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{\vartheta}_k\partial\boldsymbol{\vartheta}_l}\log f^*(X|\boldsymbol{\vartheta}^*)\right]$$

とする.

補題 1 の証明については, Cox and Reid [5] で与えられているので省略する.

ここで, ガンマ分布 $\mathrm{Gam}(\alpha, \beta)$ の場合を考える. ただし, α を興味ある未知母数, β を局外母数とし, $\theta = (\alpha, \beta)'$ とする. $\mathrm{Gam}(\alpha, \beta)$ の確率密度関数は

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}x^{\alpha-1}\exp\left(-\frac{x}{\beta}\right)$$

と表されるので, θ のフィッシャー情報行列 $I^\theta(\theta)$ は

$$I^\theta(\theta) = \begin{pmatrix} \psi'(\alpha) & 1/\beta \\ 1/\beta & \alpha/\beta^2 \end{pmatrix}$$

となり, ガンマ分布 $\mathrm{Gam}(\alpha, \beta)$ の α と β は直交していないことがわかる. ただし, $\psi(t) := \Gamma'(t)/\Gamma(T)$ はオイラーのディガンマ関数である. ここで, θ を $\theta^* := (\alpha, \rho(\alpha, \beta))$ と変換すると,

$$I_{12}^{\theta*}(\theta^*) = \frac{1}{\rho}, \quad I_{22}^{\theta*}(\theta^*) = \frac{\alpha}{\rho^2}$$

となる. (3.1) より,

$$\frac{\alpha}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\rho(\alpha, \beta) = -\frac{1}{\rho} \tag{3.2}$$

を考えると,

$$\rho(\alpha, \beta) = \frac{\eta}{\alpha}$$

は (3.2) の 1 つの解であるので, ガンマ分布 $\mathrm{Gam}(\alpha, \eta/\alpha)$ の α と η は直交することがわかる.

4　2次漸近許容性

本章では, 2次漸近許容性の概念を紹介し, 一般的な設定の下で修正 MLE が SOA となるための必要条件と十分条件について述べる.

まず, $\hat{\alpha}_{\mathrm{ML}}$ を α の MLE とし, $\hat{\alpha}_c$ を関数 $c(\cdot)$ による α の修正 MLE, つまり,

$$\hat{\alpha}_c := \hat{\alpha}_{\mathrm{ML}} + \frac{1}{n}c(\hat{\theta}_{\mathrm{ML}}) + o_p\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \to \infty)$$

とする. 本論では, 推定量を修正 MLE の全体

$$\mathcal{D} := \left\{\hat{\alpha}_c : c \in C^1(\mathbb{R}_+^{2p})\right\}$$

に制限して考える. ただし, $C^1(\mathbb{R}_+^{2p})$ は $\mathbb{R}_+^{2p}$ 上の連続的微分可能な関数全体である.

Ghosh and Sinha [8] は推定量の漸近的な性質を調べるため, 以下のような2次漸近許容性の概念を提案した.

定義 2
(I) 以下の (i), (ii) を同時に満たす $\hat{\alpha}^*(\in \mathcal{D})$ が存在するならば, $n \to \infty$ のとき, $\hat{\alpha}(\in \mathcal{D})$ は2次漸近非許容的 (second order inadmissible, SOI) であるという.

(i) 任意の $\theta \in \mathbb{R}_+^{2p}$ に対して, $\lim_{n\to\infty} n^2\{R(\theta, \hat{\alpha}^*) - R(\theta, \hat{\alpha})\} \leq 0.$

(ii) ある $\theta_0 \in \mathbb{R}_+^{2p}$ に対して, $\lim_{n\to\infty} n^2\{R(\theta_0, \hat{\alpha}^*) - R(\theta_0, \hat{\alpha})\} < 0.$

(II) $n \to \infty$ のとき, $\hat{\alpha}(\in \mathcal{D})$ が SOI でないならば, $n \to \infty$ のとき, $\hat{\alpha}$ は $\mathcal{D}$ において2次漸近許容的 (second order admissible, SOA) であるという.

以降, 2次漸近許容性は, 規準化された2乗誤差損失関数の下で $n \to \infty$ のときの $\mathcal{D}$ における2次漸近許容性を意味するものとする. $b_c(\theta)$ を $\hat{\alpha}_c$ の1次の漸近バイアスの係数, つまり,

$$b_c(\theta) := \lim_{n\to\infty} nE_\theta[\hat{\alpha}_c - \alpha] = b_{\mathrm{ML}}(\theta) + c(\theta)$$

とする. さらに, α と η が直交することを仮定する. このとき, $\hat{\alpha}_c$ と $\hat{\alpha}_d := \hat{\alpha}_{\mathrm{ML}} + d(\hat{\theta}_{\mathrm{ML}})/n(\in \mathcal{D})$ のリスクの差は, $n \to \infty$ のとき,

$$R(\theta, \hat{\alpha}_d) - R(\theta, \hat{\alpha}_c) = \frac{1}{n^2}\left[g'(\theta)I^\alpha(\theta)g(\theta) + 2g'(\theta)I^\alpha(\theta)b_c(\theta) + 2\mathrm{tr}\left\{\frac{d}{d\alpha'}g(\theta)\right\}\right] + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

となる．よって，修正 MLE $\hat{\alpha}_c$ が SOA となるための必要十分条件は，任意の $\theta \in \mathbb{R}_+^{2p}$ に対して，

$$g'(\theta)I^\alpha(\theta)g(\theta) + 2g'(\theta)I^\alpha(\theta)b_c(\theta) + 2\mathrm{tr}\left\{\frac{d}{d\alpha'}g(\theta)\right\} \le 0 \tag{4.1}$$

を満足する $g \in C^1(\mathbb{R}_+^{2p})$ が $g(\theta) = 0$ のみであることとなる．

つぎに，ポテンシャル関数に対応する条件について述べる．

条件 1 $\hat{\alpha}_{c_0}$ の 1 次の漸近バイアスの係数 $b_{c_0}(\theta)$ に対して，連続的微分可能な関数 π_{c_0} : $\mathbb{R}_+^{2p} \to \mathbb{R}_+$ が存在して，

$$I^\alpha(\theta)b_{c_0}(\theta) = \frac{d}{d\alpha}\log\pi_{c_0}(\theta)$$

が，任意の $\theta \in \mathbb{R}_+^{2p}$ に対して成り立つ．

いま，推定する母数の母数空間が $\mathbb{R}_+^p$ であることに注意しなければならない．本論では，Obayashi, Tanaka and Takagi [11] (または，Tanaka, Obayashi and Takagi [15]) の修正 MLE が SOA であるための十分条件を適用するが，そこでは，推定する母数の母数空間が $\mathbb{R}^p$ となっている．この十分条件の証明において，境界上での積分に発散定理を用いており，母数空間が $\mathbb{R}^p$ であることは本質的である．そこで，本論では変数と関数を以下のように変換する．

$$\begin{aligned}
&\alpha := \varphi(s) = (\varphi_1(s_1), \ldots, \varphi_p(s_p))', \quad \tilde{I}(s,\eta) := Q(s)I^\alpha(\varphi(s),\eta)Q(s),\\
&\tilde{b}_c(s,\eta) := Q^{-1}(s)b_c(\varphi(s),\eta) + \tilde{I}^{-1}(s,\eta)\left(\frac{d}{ds_1}\log Q_{11}(s_1), \ldots, \frac{d}{ds_p}\log Q_{pp}(s_p)\right)', \\
&\tilde{g}(s,\eta) := Q^{-1}(s)g(\varphi(s),\eta).
\end{aligned} \tag{4.2}$$

ここで，$j = 1, \ldots, p$ に対して，関数 $\varphi_j(\cdot)$ は $\mathbb{R}_+$ への全単射，かつ，2 階連続的微分可能であり，

$$Q(s) := (Q_{ij}(s))_{i,j=1,\ldots,p} = \frac{d}{ds'}\varphi(s)$$

である．

上記の変換の下で，

$$\begin{aligned}
&\tilde{I}(s,\eta)\tilde{b}_c(s,\eta) = \frac{d}{ds}\log\tilde{\pi}_c(s,\eta), \quad g'(\theta)I^\alpha(\theta)g(\theta) = \tilde{g}'(s,\eta)\tilde{I}(s,\eta)\tilde{g}(s,\eta),\\
&g'(\theta)I^\alpha(\theta)b_c(\theta) = \tilde{g}'(s,\eta)\tilde{I}(s,\eta)\tilde{b}_c(s,\eta)\\
&\qquad\qquad -\tilde{g}'(s,\eta)\left(\frac{d}{ds_1}\log Q_{11}(s_1), \ldots, \frac{d}{ds_p}\log Q_{pp}(s_p)\right)',\\
&\mathrm{tr}\left\{\frac{d}{d\alpha'}g(\theta)\right\} = \tilde{g}'(s,\eta)\left(\frac{d}{ds_1}\log Q_{11}(s_1), \ldots, \frac{d}{ds_p}\log Q_{pp}(s_p)\right)' + \mathrm{tr}\left\{\frac{d}{ds'}\tilde{g}(s,\eta)\right\}
\end{aligned}$$

となる. ここで,

$$\tilde{\pi}_c(s,\eta) := \pi_c(\varphi(s),\eta)\prod_{j=1}^{p} Q_{jj}(s_j)$$

である. $\tilde{h}_c(s,\eta) = \tilde{g}(s,\eta)\tilde{\pi}_c(s,\eta)$ とおくと, (4.1) は任意の $s := (s_1,\dots,s_p) \in \mathbb{R}^p$, $\eta \in \mathbb{R}_+^p$ に対して,

$$\frac{1}{\tilde{\pi}_c(s,\eta)}\tilde{h}_c'(s,\eta)\tilde{I}(s,\eta)\tilde{h}_c(s,\eta) + 2\mathrm{tr}\left\{\frac{d}{ds'}\tilde{h}_c(s,\eta)\right\} \leq 0 \tag{4.3}$$

となる. 一般に, $\tilde{\pi}_c(s,\eta)$ は η に依存するが, 本論で扱う推定量に対応する $\tilde{\pi}_c(s,\eta)$ は η に依存しないので, 今後, η を省いて記述する. また, $\tilde{\lambda}_{\min}(s,\eta)$ と $\tilde{\lambda}_{\max}(s,\eta)$ をそれぞれ $\tilde{I}(s,\eta)$ の最小固有値, 最大固有値とする. 今後, $p \geq 2$ のとき, $s \in \mathbb{R}^p$ を $s = r\omega_\xi$ と表すことがある. ただし, $r > 0$ であり, $p = 2$ のとき,

$$\omega_\xi := (\cos\xi, \sin\xi)', \quad \xi \in [0, 2\pi)$$

である. $p \geq 3$ のとき,

$$\xi := (\xi_1,\dots,\xi_{p-1})' \in \Xi, \quad \omega_\xi := (\omega_{\xi,1},\dots,\omega_{\xi,p})'$$

であり,

$$\begin{aligned}
\Xi &:= \left\{\xi \in \mathbb{R}^{p-1} : \xi_i \in [0,\pi)\ (i = 1,\dots,p-2),\ \xi_{p-1} \in [0,2\pi)\right\}, \\
\omega_{\xi,i} &:= \begin{cases} \cos\xi_1 & (i=1), \\ \cos\xi_i \prod_{j=1}^{i-1}\sin\xi_j & (i = 2,\dots,p-1), \\ \prod_{j=1}^{p-1}\sin\xi_j & (i=p) \end{cases}
\end{aligned}$$

である. また,

$$J(\xi) := \begin{cases} 1 & (p=2), \\ \prod_{i=1}^{p-2}\left|\sin^{p-i-1}\xi_i\right| & (p \geq 3) \end{cases}$$

とする.

補題 2 α の修正 MLE $\hat{\alpha}_{c_0} (\in \mathcal{D})$ は条件 1 を満足し,

$$\tilde{\phi}_{c_0}(r) := \int_\Xi \left[\frac{\tilde{\pi}_{c_0}(s)}{\tilde{\lambda}_{\min}(s,\eta)}\right]_{s=r\omega_\xi} J(\xi)d\xi$$

とおく．ある $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{dr}{r^{p-1}\tilde{\phi}_{c_0}(r)} = \infty$$

が成り立つとき，$\hat{\alpha}_{c_0}$ は SOA である．

補題 2 の証明については，Obayashi, Tanaka and Takagi [11] (または，Tanaka, Obayashi and Takagi [15]) で与えられているので省略する．一方，DasGupta and Ghosh [6] は修正 MLE が SOA となるための必要条件を導出した．彼らの結果を本研究に沿うように改良して，次の補題を与える．

補題 3 $p \geq 3$ とする．ある正の定数 M が存在して，任意の s に対して，

$$\frac{s'\tilde{I}(s,\eta)s}{\tilde{\pi}_{c_0}(s)} \leq M\|s\|^2$$

を満足するものとする．このとき，$\hat{\alpha}_{c_0}$ は SOI である．

証明

$$\tilde{h}_{c_0}(s) := -C\frac{s}{\|s\|^2 + b}$$

とおく．ここで，$b > 0$ であり，$0 < C \leq 2/M$ とする．このとき，

$$\mathrm{tr}\left\{\frac{d}{ds'}\tilde{h}_{c_0}(s)\right\} = -\frac{pC}{\|s\|^2 + b} + \frac{2C\|s\|^2}{(\|s\|^2 + b)^2}$$

となるので，(4.3) の左辺は，

$$\begin{aligned}
&\frac{C^2 s'\tilde{I}(s,\eta)s}{\tilde{\pi}_{c_0}(s)(\|s\|^2 + b)^2} - \frac{2pC}{\|s\|^2 + b} + \frac{4C\|s\|^2}{(\|s\|^2 + b)^2} \\
= \ & \frac{C}{(\|s\|^2 + b)^2}\left\{C\frac{s'\tilde{I}(s,\eta)s}{\tilde{\pi}_{c_0}(s)} - 2p(\|s\|^2 + b) + 4\|s\|^2\right\} \\
\leq \ & \frac{C}{(\|s\|^2 + b)^2}\{(CM - 2)\|s\|^2 - 2(p-3)\|s\|^2 - 2bp\} \\
\leq \ & -\frac{2C}{(\|s\|^2 + b)^2}\{(p-3)\|s\|^2 + bp\} < 0
\end{aligned}$$

となることがわかる． ■

5 多母数ガンマ分布

本節では, 多母数ガンマ分布を紹介する. $j=1,\dots,p$ に対して, $X_{1j},\dots,X_{nj}$ は互いに独立に同一のガンマ分布 $\mathrm{Gam}(\alpha_j,\beta_j)$ に従う確率変数とする. さらに, $X_i:=(X_{i1},\dots,X_{ip})$ $(i=1,\dots,n)$ は互いに独立な確率ベクトルとする. つまり, X_i の確率密度関数は

$$f(x_i|\alpha,\beta)=\prod_{j=1}^{p}\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_j)\beta_j^{\alpha_j}}x_{ij}^{\alpha_j-1}\exp\left(-\frac{x_{ij}}{\beta_j}\right)\right\}\quad(x_{ij}>0)$$

と表わされる. ただし, 形状母数 $\alpha:=(\alpha_1,\dots,\alpha_p)'(\in\mathbb{R}_+^p)$ は興味ある未知母数, 尺度母数 $\beta:=(\beta_1,\dots,\beta_p)'(\in\mathbb{R}_+^p)$ は局外母数である. ガンマ分布 $\mathrm{Gam}(\alpha_j,\beta_j)$ の α_j と β_j は直交しないので, パラメータ変換として, (α_j,β_j) を $(\alpha_j,\eta_j/\alpha_j)$ と変換する. このとき, α のフィッシャー情報行列 $I^\alpha(\alpha)=(I_{ij}^\alpha(\alpha))_{i,j=1,\dots,p}$ の (i,j) 成分は

$$I_{ij}^\alpha(\alpha)=\begin{cases}\psi'(\alpha_i)-1/\alpha_i & (i=j),\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}\tag{5.1}$$

となる.[3]

ここで, ガンマ分布における形状母数の推定量を紹介する. まず, $\hat{\alpha}_{\mathrm{ML}}:=(\hat{\alpha}_{\mathrm{ML}j})_{j=1,\dots,p}$ は $j=1,\dots,p$ に対して,

$$\sigma(\alpha_j):=\log\alpha_j-\psi(\alpha_j)=\log\bar{x}_j-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log x_{ij}$$

の解として得られる. ここで, $\bar{x}_j:=\sum_{i=1}^{n}x_{ij}/n$ である. また, $\hat{\alpha}_{\mathrm{AR}}:=(\hat{\alpha}_{\mathrm{AR}j})_{j=1,\dots,p}$ を Anderson and Ray [3] により提案された α のバイアス修正 MLE とすると,

$$\hat{\alpha}_{\mathrm{AR}j}:=\hat{\alpha}_{\mathrm{ML}j}+\frac{1}{n}\left(-3\hat{\alpha}_{\mathrm{ML}j}+\frac{2}{3}\right)$$

と表される. つまり, $\hat{\alpha}_{\mathrm{AR}}$ は $\mathcal{D}$ に属していることがわかる.

次に, Yanagimoto [17] により提案された α の条件付き MLE について考える. $\hat{\alpha}_{\mathrm{CML}}:=(\hat{\alpha}_{\mathrm{CML}j})_{j=1,\dots,p}$ を α の条件付き MLE とすると, $\hat{\alpha}_{\mathrm{CML}}$ は $j=1,\dots,p$ に対して,

$$\sigma(\alpha_j)-\sigma(n\alpha_j)=\log\bar{x}_j-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log x_{ij}$$

[3] 一般に, $I^\alpha(\theta)$ は η に依存するが, 本論で扱う $I^\alpha(\theta)$ は η に依存しないので, 以後, $I^\alpha(\theta)$ を $I^\alpha(\alpha)$ と記述する.

の解である. Takagi [13] の Lemma 5.5 の結果を用いると, $n \to \infty$ のとき,

$$\hat{\alpha}_{\mathrm{CML}j} = \hat{\alpha}_{\mathrm{ML}j} + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2\hat{\alpha}_{\mathrm{ML}j}\sigma'(\hat{\alpha}_{\mathrm{ML}j})}\right) + o_p\left(\frac{1}{n}\right)$$

を得る. つまり, $\hat{\alpha}_{\mathrm{CML}}$ も $\mathcal{D}$ に属していることがわかる.

6 改良推定量の 2 次漸近許容性

本章では, $p \geq 2$ のときのバイアス修正 MLE と条件付き MLE, それら 2 つの推定量を優越した推定量の 2 次漸近許容性について考える. $\hat{\alpha}_{\mathrm{AR}}$ と $\hat{\alpha}_{\mathrm{CML}}$ をそれぞれバイアス修正 MLE, 条件付き MLE, つまり,

$$\begin{aligned}
&\hat{\alpha}_{\mathrm{AR}} := \hat{\alpha}_{\mathrm{ML}} + \frac{1}{n}\left(-3\hat{\alpha}_{\mathrm{ML}} + \frac{2}{3}\mathbf{1}\right),\\
&\hat{\alpha}_{\mathrm{CML}} := (\hat{\alpha}_{\mathrm{CML}j})_{j=1,\ldots,p},\ \hat{\alpha}_{\mathrm{CML}j} := \hat{\alpha}_{\mathrm{ML}j} + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2\hat{\alpha}_{\mathrm{ML}j}\sigma'(\hat{\alpha}_{\mathrm{ML}j})}\right) + o_p\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

とする. ただし, $\mathbf{1}$ は成分がすべて 1 の p 次元ベクトルである. ここで, $\hat{\alpha}_{\mathrm{ML}}$ の 1 次の漸近バイアスの係数を $b_{\mathrm{ML}}(\alpha)$ とすると, Kamitamari and Tanaka [10] より,

$$b_{\mathrm{ML}}(\alpha) = (I^{\alpha}(\alpha))^{-1}\frac{d}{d\alpha}\log\prod_{j=1}^{p}\left(\frac{\alpha_j}{\psi'(\alpha_j) - 1/\alpha_j}\right)^{1/2}$$

となる. したがって, $\hat{\alpha}_{\mathrm{AR}}$ と $\hat{\alpha}_{\mathrm{CML}}$ の 1 次の漸近バイアスの係数をそれぞれ $b_{\mathrm{AR}}(\alpha)$, $b_{\mathrm{CML}}(\alpha)$ とすると,

$$\begin{aligned}
b_{\mathrm{AR}}(\alpha) &= b_{\mathrm{ML}}(\alpha) - 3\alpha + \frac{2}{3}\mathbf{1}\\
&= (I^{\alpha}(\alpha))^{-1}\frac{d}{d\alpha}\log\prod_{j=1}^{p}\frac{\Gamma^3(\alpha_j)\exp\{(-3\alpha_j + 2/3)\,\psi(\alpha_j) + 3\alpha_j\}}{\alpha_j^{1/6}(\psi'(\alpha_j) - 1/\alpha_j)^{1/2}},\\
b_{\mathrm{CML}}(\alpha) &= b_{\mathrm{ML}}(\alpha) - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}(\alpha_1\psi'(\alpha_1) - 1)^{-1}\\ \vdots \\ (\alpha_p\psi'(\alpha_p) - 1)^{-1}\end{pmatrix}\\
&= (I^{\alpha}(\alpha))^{-1}\frac{d}{d\alpha}\log\prod_{j=1}^{p}\frac{1}{(\psi'(\alpha_j) - 1/\alpha_j)^{1/2}}
\end{aligned}$$

となり, $\hat{\alpha}_{\mathrm{AR}}$ と $\hat{\alpha}_{\mathrm{CML}}$ は

$$\pi_{\mathrm{AR}j}(\alpha_j) := \frac{\Gamma^3(\alpha_j)\exp\{(-3\alpha_j + 2/3)\,\psi(\alpha_j) + 3\alpha_j\}}{\alpha_j^{1/6}(\psi'(\alpha_j) - 1/\alpha_j)^{1/2}}, \tag{6.1}$$

$$\pi_{\mathrm{CML}j}(\alpha_j) := \frac{1}{(\psi'(\alpha_j) - 1/\alpha_j)^{1/2}} \tag{6.2}$$

とし,

$$\pi_{\mathrm{AR}}(\alpha)=\prod_{j=1}^{p}\pi_{\mathrm{AR}j}(\alpha_j),\quad \pi_{\mathrm{CML}}(\alpha)=\prod_{j=1}^{p}\pi_{\mathrm{CML}j}(\alpha_j)$$

とすることにより, 条件 1 を満たしていることがわかる. ここで, 次の補題を用意する.

補題 4 次が成り立つ.

$$\text{(i)}\ \Gamma(t)=\begin{cases}\sqrt{2\pi}t^{t-1/2}e^{-t}(1+o(1)) & (t\to\infty),\\ \dfrac{1}{t}+o\left(\dfrac{1}{t}\right) & (t\to 0).\end{cases}$$

$$\text{(ii)}\ \psi(t)=\begin{cases}\log t-\dfrac{1}{2t}+o\left(\dfrac{1}{t}\right) & (t\to\infty),\\ -\dfrac{1}{t}-\gamma_0+o(1) & (t\to 0).\end{cases}$$

$$\text{(iii)}\ \psi'(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{2t^2}+o\left(\dfrac{1}{t^2}\right) & (t\to\infty),\\ \dfrac{1}{t^2}+\dfrac{\pi^2}{6}+o(1) & (t\to 0).\end{cases}$$

ここで, γ_0 はオイラーの定数である.

補題 4 の証明については, Abramowitz and Stegan [1] の 6.1.37, 6.3.5, 6.3.18, 6.4.2, 6.4.6, 6.4.12 から容易に得られる.

いま, 2 つの推定量 $\hat{\alpha}_{\mathrm{AR}}$, $\hat{\alpha}_{\mathrm{CML}}$ は SOI であることを示す. (5.1), (6.1), (6.2), 補題 4 より,

$$\frac{I_{jj}^{\alpha}(u)}{\pi_{\mathrm{AR}j}(u)}=(4\pi e)^{-3/2}u^{-2}(1+o(1))\quad(u\to\infty),\tag{6.3}$$

$$\frac{I_{jj}^{\alpha}(u)}{\pi_{\mathrm{CML}j}(u)}=2^{-3/2}u^{-3}(1+o(1))\quad(u\to\infty)$$

となるので,

$$\int_{\alpha_j}^{\infty}\frac{I_{jj}^{\alpha}(u)}{\pi_{\mathrm{AR}j}(u)}du<\infty,\quad \int_{\alpha_j}^{\infty}\frac{I_{jj}^{\alpha}(u)}{\pi_{\mathrm{CML}j}(u)}du<\infty$$

となることがわかる. そこで, 2 つの推定量

$$\hat{\alpha}_{\mathrm{AR}}^{*}:=\hat{\alpha}_{\mathrm{AR}}+\frac{1}{n}d_{\mathrm{AR}}(\hat{\alpha}_{\mathrm{AR}}),\quad d_{\mathrm{AR}j}(\alpha_j):=-\left\{\pi_{\mathrm{AR}j}(\alpha_j)\int_{\alpha_j}^{\infty}\frac{I_{jj}^{\alpha}(u)}{\pi_{\mathrm{AR}j}(u)}du\right\}^{-1},$$

$$\hat{\alpha}_{\mathrm{CML}}^{*}:=\hat{\alpha}_{\mathrm{CML}}+\frac{1}{n}d_{\mathrm{CML}}(\hat{\alpha}_{\mathrm{CML}}),\quad d_{\mathrm{CML}j}(\alpha_j):=-\left\{\pi_{\mathrm{CML}j}(\alpha_j)\int_{\alpha_j}^{\infty}\frac{I_{jj}^{\alpha}(u)}{\pi_{\mathrm{CML}j}(u)}du\right\}^{-1}$$

を考える. $\hat{\alpha}_{\mathrm{AR}}$ については, (4.1) での g を $g(\alpha)=d_{\mathrm{AR}}(\alpha)$ とすることにより,

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\left\{\frac{d}{d\alpha'}g(\alpha)\right\} &= \mathrm{tr}\left\{\frac{d}{d\alpha'}d_{\mathrm{AR}}(\alpha)\right\}\\ &= -d'_{\mathrm{AR}}(\alpha)I^{\alpha}(\alpha)b_{\mathrm{AR}}(\alpha)-d'_{\mathrm{AR}}(\alpha)I^{\alpha}(\alpha)d_{\mathrm{AR}}(\alpha)\end{aligned}$$

となるので, (4.1) の左辺は

$$\begin{aligned}&g'(\alpha)I^{\alpha}(\alpha)g(\alpha)+2g'(\alpha)I^{\alpha}(\alpha)b_{\mathrm{AR}}(\alpha)+2\mathrm{tr}\left\{\frac{d}{d\alpha'}g(\alpha)\right\}\\ =\ & d'_{\mathrm{AR}}(\alpha)I^{\alpha}(\alpha)d_{\mathrm{AR}}(\alpha)+2d'_{\mathrm{AR}}(\alpha)I^{\alpha}(\alpha)b_{\mathrm{AR}}(\alpha)\\ & -2\{d'_{\mathrm{AR}}(\alpha)I^{\alpha}(\alpha)b_{\mathrm{AR}}(\alpha)+d'_{\mathrm{AR}}(\alpha)I^{\alpha}(\alpha)d_{\mathrm{AR}}(\alpha)\}\\ =\ & -d'_{\mathrm{AR}}(\alpha)I^{\alpha}(\alpha)d_{\mathrm{AR}}(\alpha)<0\end{aligned}$$

となる. したがって, $\hat{\alpha}^*_{\mathrm{AR}}$ は $\hat{\alpha}_{\mathrm{AR}}$ を $1/n^2$ のオーダーまで優越し, $\hat{\alpha}_{\mathrm{AR}}$ が SOI であることがわかる. $\hat{\alpha}_{\mathrm{CML}}$ が SOI であることも同様にして示すことができる.

ここで, $\hat{\alpha}^*_{\mathrm{AR}}$ と $\hat{\alpha}^*_{\mathrm{CML}}$ の 1 次の漸近バイアスの係数をそれぞれ $b^*_{\mathrm{AR}}(\alpha)$, $b^*_{\mathrm{CML}}(\alpha)$ とすると,

$$\begin{aligned}b^*_{\mathrm{AR}}(\alpha) &= b_{\mathrm{AR}}(\alpha)+d_{\mathrm{AR}}(\alpha)\\ &= (I^{\alpha}(\alpha))^{-1}\frac{d}{d\alpha}\log\prod_{j=1}^{p}\left(\pi_{\mathrm{AR}j}(\alpha_j)\int_{\alpha_j}^{\infty}\frac{I_{jj}(u)}{\pi_{\mathrm{AR}j}(u)}du\right),\\ b^*_{\mathrm{CML}}(\alpha) &= b_{\mathrm{CML}}(\alpha)+d_{\mathrm{CML}}(\alpha)\\ &= (I^{\alpha}(\alpha))^{-1}\frac{d}{d\alpha}\log\prod_{j=1}^{p}\left(\pi_{\mathrm{CML}j}(\alpha_j)\int_{\alpha_j}^{\infty}\frac{I_{jj}(u)}{\pi_{\mathrm{CML}j}(u)}du\right)\end{aligned}$$

となり, $\hat{\alpha}^*_{\mathrm{AR}}$ と $\hat{\alpha}^*_{\mathrm{CML}}$ は

$$\begin{aligned}\pi^*_{\mathrm{AR}j}(\alpha_j) &:= \pi_{\mathrm{AR}j}(\alpha_j)\int_{\alpha_j}^{\infty}\frac{I^{\alpha}_{jj}(u)}{\pi_{\mathrm{AR}j}(u)}du,\\ \pi^*_{\mathrm{CML}j}(\alpha_j) &:= \pi_{\mathrm{CML}j}(\alpha_j)\int_{\alpha_j}^{\infty}\frac{I^{\alpha}_{jj}(u)}{\pi_{\mathrm{CML}j}(u)}du\end{aligned}\tag{6.4}$$

とし,

$$\pi^*_{\mathrm{AR}}(\alpha)=\prod_{j=1}^{p}\pi^*_{\mathrm{AR}j}(\alpha_j),\quad \pi^*_{\mathrm{CML}}(\alpha)=\prod_{j=1}^{p}\pi^*_{\mathrm{CML}j}(\alpha_j)$$

とすることにより, 条件 1 を満たしていることがわかる. ここで, 補題 2, 3 をガンマ分布に適用するために, 次の補題を用意する.

補題 5 $j=1,\dots,p$ に対して, $I^{\alpha}_{jj}(\alpha_j)$, $\pi^*_{\mathrm{AR}j}(\alpha_j)$, $\pi^*_{\mathrm{CML}j}(\alpha_j)$ は次を満たす.

$$\text{(i)}\ \ I^{\alpha}_{jj}(\alpha_j)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\alpha_j^2}(1+o(1)) & (\alpha_j\to\infty),\\ \dfrac{1}{\alpha_j^2}(1+o(1)) & (\alpha_j\to 0).\end{cases}$$

$$\text{(ii)}\ \ \pi^*_{\mathrm{AR}j}(\alpha_j)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\alpha_j}(1+o(1)) & (\alpha_j\to\infty),\\ \dfrac{3}{2}(1+o(1)) & (\alpha_j\to 0).\end{cases}$$

$$\text{(iii)}\ \ \pi^*_{\mathrm{CML}j}(\alpha_j)=\begin{cases}\dfrac{1}{4\alpha_j}(1+o(1)) & (\alpha_j\to\infty),\\ \dfrac{1}{2\alpha_j}(1+o(1)) & (\alpha_j\to 0).\end{cases}$$

証明　(i) (5.1) と補題 4 より容易に得られる.

(ii) $\lim_{\alpha_j\to\infty}\pi^*_{\mathrm{AR}j}(\alpha_j)$ を求めるために, (6.4) より,

$$\lim_{\alpha_j\to\infty}\alpha_j\pi_{\mathrm{AR}j}(\alpha_j)\int_{\alpha_j}^{\infty}\frac{I^{\alpha}_{jj}(u)}{\pi_{\mathrm{AR}j}(u)}du$$

を考える. (6.1), 補題 4 より,

$$\lim_{\alpha_j\to\infty}\pi_{\mathrm{AR}j}(\alpha_j)=4(\pi e)^{3/2}$$

となることがわかる. また, ロピタルの定理と (6.3) より,

$$\lim_{\alpha_j\to\infty}\frac{\int_{\alpha_j}^{\infty}I^{\alpha}_{jj}(u)/\pi_{\mathrm{AR}j}(u)du}{1/\alpha_j}=\lim_{\alpha_j\to\infty}\frac{-I^{\alpha}_{jj}(\alpha_j)/\pi_{\mathrm{AR}j}(\alpha_j)}{-1/\alpha_j^2}=\frac{1}{8(\pi e)^{3/2}}$$

となるので,

$$\lim_{\alpha_j\to\infty}\alpha_j\pi_{\mathrm{AR}j}(\alpha_j)\int_{\alpha_j}^{\infty}\frac{I^{\alpha}_{jj}(u)}{\pi_{\mathrm{AR}j}(u)}du=\frac{1}{2}$$

を得る. よって,

$$\lim_{\alpha_j\to\infty}\pi^*_{\mathrm{AR}j}(\alpha_j)=\frac{1}{2\alpha_j}$$

となることがわかる. $\alpha_j\to 0$ も同様にして考える. また, 同様にして (iii) の証明も得ることができる. ■

定理 1 $p=2$ のとき, $\hat{\alpha}^*_{\mathrm{AR}}$ と $\hat{\alpha}^*_{\mathrm{CML}}$ は SOA である.

__証明__ (4.2) の変換において, $\varphi_j(s_j) = e^{s_j}$ $(j = 1, \dots, p)$ を考える. 補題 5 を用いると, $r \to \infty$ のとき,

$$\left[\frac{\tilde{\pi}^*_{\mathrm{AR}}(s)}{\tilde{\lambda}_{\min}(s)}\right]_{s=r\omega_\xi} = \begin{cases} K_1(1+o(1)) & \left(0 < \xi < \dfrac{\pi}{2}\right), \\ K_2 \exp(r\cos\xi)(1+o(1)) & \left(\dfrac{\pi}{2} < \xi < \pi\right), \\ K_3 \exp(r\cos\xi + r\sin\xi)(1+o(1)) & \left(\pi < \xi < \dfrac{3\pi}{2}\right), \\ K_4 \exp(r\sin\xi)(1+o(1)) & \left(\dfrac{3\pi}{2} < \xi < 2\pi\right), \end{cases}$$

$$\left[\frac{\tilde{\pi}^*_{\mathrm{CML}}(s)}{\tilde{\lambda}_{\min}(s)}\right]_{s=r\omega_\xi} = K_5(1+o(1)) \quad (0 \le \xi < 2\pi)$$

となる. ここで, K_i は正の定数である. したがって,

$$\lim_{r\to\infty} \tilde{\phi}^*_{\mathrm{AR}}(r) = \lim_{r\to\infty} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\tilde{\pi}^*_{\mathrm{AR}}(s)}{\tilde{\lambda}_{\min}(s)}\right]_{s=r\omega_\xi} d\xi < \infty,$$
$$\lim_{r\to\infty} \tilde{\phi}^*_{\mathrm{CML}}(r) = \lim_{r\to\infty} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\tilde{\pi}^*_{\mathrm{CML}}(s)}{\tilde{\lambda}_{\min}(s)}\right]_{s=r\omega_\xi} d\xi < \infty$$

となり, ある $\varepsilon > 0$ に対して,

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{dr}{r\tilde{\phi}^*_{\mathrm{AR}}(r)} = \infty, \quad \int_\varepsilon^\infty \frac{dr}{r\tilde{\phi}^*_{\mathrm{CML}}(r)} = \infty$$

となることがわかる. つまり, 補題 2 から, $p = 2$ のとき, $\hat{\alpha}^*_{\mathrm{AR}}$ と $\hat{\alpha}^*_{\mathrm{CML}}$ は SOA であることがわかる. ■

定理 2 $p \ge 3$ のとき, $\hat{\alpha}^*_{\mathrm{CML}}$ は SOI である.

__証明__ (4.2) の変換において, $\varphi_j(s_j) = e^{s_j}$ $(j = 1, \dots, p)$ を考える. このとき, 補題 5 (i), (iii) を用いると,

$$\tilde{I}_{jj}(s_j) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(1+o(1)) & (s_j \to \infty), \\ 1 + o(1) & (s_j \to -\infty), \end{cases} \qquad \tilde{\pi}^*_{\mathrm{CML}j}(s_j) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}(1+o(1)) & (s_j \to \infty), \\ \dfrac{1}{2}(1+o(1)) & (s_j \to -\infty) \end{cases}$$

を得る. よって, $\|s\| \to \infty$ のとき,

$$\frac{s'\tilde{I}(s)s}{\tilde{\pi}^*_{\mathrm{CML}}(s)} \le \frac{\tilde{\lambda}_{\max}(s)}{\tilde{\pi}^*_{\mathrm{CML}}(s)}\|s\|^2 \le M\|s\|^2$$

となる．ここで，M は正の定数である．$\tilde{\lambda}_{\max}(s)/\tilde{\pi}^*_{\mathrm{CML}}(s)$ は連続関数なので，すべての $s \in \mathbb{R}^p$ に対して，

$$\frac{s'\tilde{I}(s)s}{\tilde{\pi}^*_{\mathrm{CML}}(s)} \leq M\|s\|^2$$

となることがわかる．つまり，補題 3 から，$p \geq 3$ のとき，$\hat{\alpha}^*_{\mathrm{CML}}$ は SOI であることがわかる． ■

注意 1 $p \geq 3$ のとき，$\hat{\alpha}^*_{\mathrm{AR}}$ が SOA であるかどうかについては未解決である．(4.2) の変換において，対数変換以外の適当な変換を施して補題 2, 3 を用いて 2 次漸近許容性を調べてみたが，$p \geq 3$ のときの $\hat{\alpha}^*_{\mathrm{AR}}$ の 2 次漸近許容性は明らかにできなかった．

7 まとめ

Tanaka, Pal and Lim [16] は 2 乗誤差損失関数の下で，$p = 1$ のとき，ガンマ分布の形状母数の MLE, バイアス修正 MLE, 条件付き MLE はすべて SOI であり，バイアス修正 MLE と条件付き MLE をそれぞれ優越した推定量 $\hat{\alpha}^*_{\mathrm{AR}}$ と $\hat{\alpha}^*_{\mathrm{CML}}$ は SOA であることを示した．これらの結果と第 4 章の結果を表 1 にまとめた．なお，表 1 の ? は，まだ未解決な部分である．

表 1. 各推定量の 2 次漸近許容性

	$p=1$ [16]	$p=2$ [本論]	$p \geq 3$ [本論]
$\hat{\alpha}_{\mathrm{ML}}$	SOI	SOI	SOI
$\hat{\alpha}_{\mathrm{AR}}$	SOI	SOI	SOI
$\hat{\alpha}_{\mathrm{CML}}$	SOI	SOI	SOI
$\hat{\alpha}^*_{\mathrm{AR}}$	SOA	SOA	?
$\hat{\alpha}^*_{\mathrm{CML}}$	SOA	SOA	SOI

今後の課題としては，$p \geq 3$ のときのバイアス修正 MLE を優越した推定量 ($\hat{\alpha}^*_{\mathrm{AR}}$) の 2 次漸近許容性，非許容性が明らかになっていないので，これについて調べる必要がある．また，条件付き MLE を優越した推定量 ($\hat{\alpha}^*_{\mathrm{CML}}$) が SOI のとき，それを優越していて，かつ，SOA となるような推定量を構成する問題について考えなければならない．さらに，本論では尺度母数を局外母数として考えたが，形状母数と尺度母数を共に興味ある母数とし，形状母数と尺度母数の同時推定問題についても今後の課題として考えてみたい．

参考文献

[1] Abramowitz, M. and Stegun, A. I. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables.* Dover, New York (1964).

[2] Akahira, M. and Takeuchi, K. On asymptotic deficiency of estimators in pooled samples in the presence of nuisance parameters. *Statist. Decisions*, **1**, 17–38 (1982).

[3] Anderson, C. W. and Ray, W. D. Improved maximum likelihood estimators for the gamma distribution. *Comm. Statist.*, Ser. A (Theory and Methods), **4**, 437–448 (1975).

[4] Berman, M. The maximum likelihood estimators of the parameters of the gamma distribution are always positively biased. *Comm. Statist.*, Ser. A (Theory and Methods), **10**, 693–697 (1981).

[5] Cox, D. R. and Reid, N. Parameter orthogonality and approximate conditional inference. *J. Royal Statist. Soc.*, Ser. B, **49**, 1–39 (1987).

[6] DasGupta, A. and Ghosh, J. K. Some remarks on second-order admissibility in the multiparameter case. *Sankhya*, Ser. A, **45**, 181–190 (1983).

[7] Dey, D. K., Ghosh, M. and Srinivasan, C. Simultaneous estimation of parameters under entropy loss. *J. Stat. Plan. Infer.*, **15**, 347–363 (1987).

[8] Ghosh, J. K. and Sinha, B. K. A necessary and sufficient condition for second order admissibility with applications to Berkson's bioassay problem. *Ann. Statist.*, **9**, 1334–1338 (1981).

[9] James, W. and C. Stein. Estimation with quadratic loss. *Proc. Fourth Berkeley Symp. Math. Statist. Probab.*, **1**, 361–379. University of California Press (1961).

[10] 上玉利瑛太, 田中秀和. ガンマ分布における形状母数の推定について. 種々のモデルのための漸近展開とそれに関する話題, 数理解析研究所講究録, **1860**, 9–32 (2012).

[11] Obayashi, C., Tanaka, H. and Takagi, Y. Second order admissibilities in multiparameter logistic regression model. *World Academy of Science, Engineering and Technology*, **69**, 870–874 (2013).

[12] Shenton, L. R. and Bowman, K. O. Further remarks on maximum likelihood estimators for the gamma distribution. *Technometrics*, **14**, 725–733 (1972).

[13] Takagi, Y. On the estimation of the shape parameter of the gamma distribution in second-order asymptotics. *Statist. Prob. Letter*, **82**, 15–21 (2012).

[14] Takeuchi, K. and Akahira, M. Asymptotic optimality of the generalized Bayes estimator in multiparameter cases. *Ann. Inst. Statist. Math.*, **31**, 403–415 (1979).

[15] Tanaka, H., Obayashi, C. and Takagi, Y. On second order admissibilities in two-parameter logistic regression model. Accepted for publication in *Comm. Statist., Theory Methods.*

[16] Tanaka, H., Pal, N. and Lim, W. K. On improved estimation of a gamma shape parameter. Submitted for publication.

[17] Yanagimoto, T. The conditional maximum likelihood estimator of the shape parameter in the gamma distribution. *Metrika*, **35**, 161–175 (1988).

[18] Zaigraev, A. and Podraza-Karakulska, A. On estimation of the shape parameter of the gamma distribution. *Statist. Prob. Letter*, **78**, 286–295 (2008).