数理解析研究所講究録
第 1912 巻 2014 年 112-120

プロジェクト・リスク・マネジメントにおける遅延時間に関する一考察

金沢学院大学 経営情報学部　福田 裕一　(Hirokatsu Fukuda)
Faculty of Business Administration and Information Science, Kanazawa Gakuin University
金沢学院大学 経営情報学部　桑野 裕昭　(Hiroaki Kuwano)
Faculty of Business Administration and Information Science, Kanazawa Gakuin University
金沢学院大学 経営情報学部　島 孝司　(Takashi Shima)
Faculty of Business Administration and Information Science, Kanazawa Gakuin University

1　はじめに

プロジェクトにはさまざまなリスクが存在し，それらのリスクに起因して遅延や予算超過などの影響が発生する．プロジェクト・リスク・マネジメントとは，プロジェクトにおけるリスクおよびリスクに起因する影響をコントロールし，好影響を最大化し，悪影響を最小化しようとする一連のマネジメント活動である (PMBOK ガイド [1])．プロジェクト・リスク・マネジメントでは，プロジェクトごとに決められた，期限やコストなどのプロジェクト目標を達成するために，必要かつ十分な予備やリスク対策を準備・実行することが求められる．しかし，プロジェクト目標を達成するために，どの程度の予備やリスク対策を準備・実行すべきかを判断することは非常に難しい．

本研究では，特に時間に関するプロジェクト目標として，総遅延時間とリスクの関係について検討する．総遅延時間の分布を明らかにすることができれば，マネジメント上指定された確率での総遅延時間の範囲を予測することが可能となる．この総遅延時間の予測値とプロジェクト目標を比較することで，必要かつ十分な予備やリスク対策を準備・実行することができる．しかし，リスクの総数が多くなった場合，総遅延時間の分布を直接求めることは難しくなる．このため，総遅延時間の代替として，分布を容易に求めることができる新たな確率変数の導入を提案し，影響度の等しいリスクが多数存在する場合には，この確率変数を用いて総遅延時間の上限を予測することが可能となることを示す．

2　前提条件

n 個の独立なリスク $R_i(i=1,2,\cdots,n)$ が存在するプロジェクトについて検討する．リスク R_i は，確率 p_i で発生し，発生するとプロジェクトの完了日が s_i 日遅延するリスクとする．p_i をリスク R_i の発生確率，s_i をリスク R_i の影響度と呼び，各 $i(i=1,2,\cdots,n)$ に対して，$0<p_i<1$, $s_i\in\mathbb{N}$ とする．さらに，影響度 s_i の値が等しいリスク R_i の個数が，十分に大きな値であることを仮定す

る．リスク R_i によって発生する遅延時間を確率変数 D_i で表すと，D_i は独立で，分布を次のように与えることができる．なお $\Pr(X = x)$ は，確率変数 X の値が x となる確率を表すこととする．

$$\begin{cases} \Pr(D_i = s_i) = p_i, \\ \Pr(D_i = 0) = 1 - p_i \end{cases} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

さらに，プロジェクトの総遅延時間を確率変数 D で表すと，D は D_i の和として表すことができる．

$$D = \sum_{i=1}^{n} D_i$$

図 1: 前提条件を満たすリスクの例

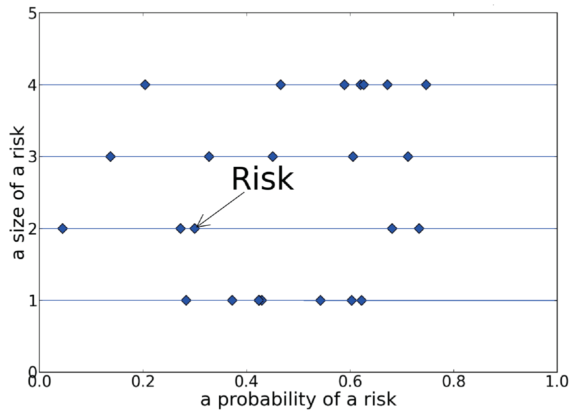


図 2 に，総遅延時間 D の分布の例を示す．この例では，マネジメント上 70% の確率で遅延時間が 40 日以内となることが要求されている．しかし，総遅延時間 D の分布からは，70% の確率における総遅延時間は 60 日以下と予測され，なんらかのリスク対策を講ずる必要があることが理解できる．

図 2: 総遅延時間 D の分布の例

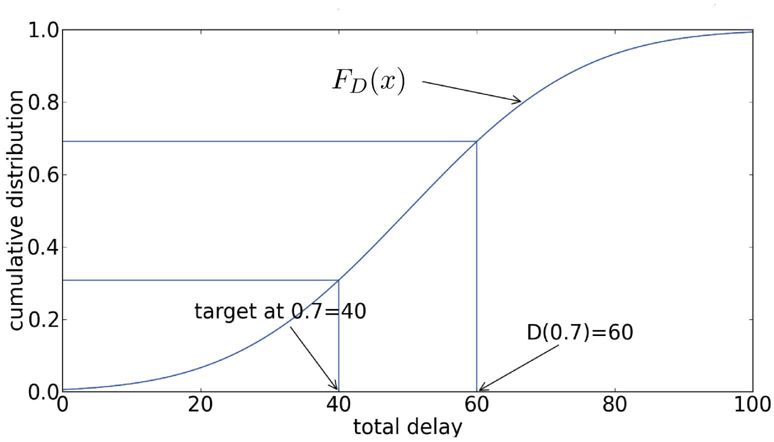


図 2 に示すように，総遅延時間 D の分布を求めることができれば，マネジメント上から指定された確率での総遅延時間の範囲を予測することが可能となり，プロジェクト・リスク・マネジメントに有効な情報を提供することができる．

3 本研究の目的

総遅延時間 D の分布関数を F_D と表す．プロジェクトマネジメント上要求される確率 $q(0 < q < 1)$ に対する D の値 $F_D^{-1}(q)$ を計算することができれば，$F_D^{-1}(q)$ を確率 q での総遅延時間の予測値として用いることができる．しかし，リスクの総数 n が増大すると，$F_D^{-1}(q)$ を直接求めることは困難となる．このため，本研究では D の代替となる，次のような性質の分布関数 F_X を持つ確率変数 X を求めることを目的とする．

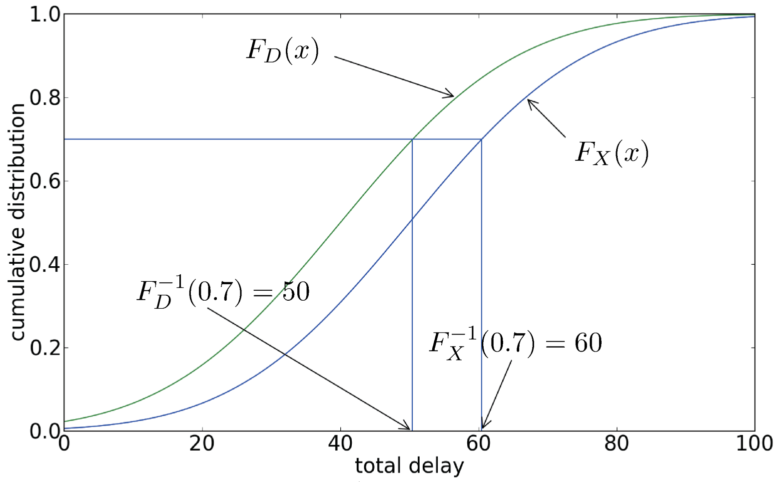
- F_X, F_X^{-1} の計算が容易である．
- 全ての $x \in \mathbb{R}$ に対して $F_D(x) \geq F_X(x)$ である．

ここで，$F_D(x), F_X(x)$ はともに増加関数であることから，任意の $p(0 < p < 1)$ に対して，

$$F_D^{-1}(p) \leq F_X^{-1}(p)$$

である．図 3 に，このような性質を持つ確率変数 X と，総遅延時間 D の分布の関係を示す．

図 3: F_D と F_X の関係



4 準備

総遅延時間 D の代替となる確率変数を求めるため，いくつかの準備を行う．

定義 4.1. Shaked and Shanthikumar [2] X, Y を，すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\Pr(X > x) \leq \Pr(Y > x)$$

である確率変数とする．このとき，X は (通常の) 確率順序に関して Y より小さいといい，

$$X \leq_{st} Y$$

と表す．この条件は，すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\Pr(X \leq x) \geq \Pr(Y \leq x)$$

であることと等しい．

定理 4.1. *Shaked and Shanthikumar [2]* $X_1, X_2, \cdots, X_m$ を独立な確率変数とし，$Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ を別の独立な確率変数とする．ここで，すべての $i = 1, 2, \cdots, m$ に対して，$X_i \leq_{st} Y_i$ であるとき，

$$\sum_{i=1}^{m} X_i \leq_{st} \sum_{i=1}^{m} Y_i$$

である．

定理 4.2. *Shaked and Shanthikumar [2]* X_i をパラメータ n_i, p_i の二項分布に従う m 個の独立な確率変数とする $(i = 1, 2, \cdots, m)$. Y をパラメータ n, p の二項分布に従う確率変数とし，$n = \sum_{i=1}^{m} n_i$ とすると，

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} X_i \geq_{st} Y \quad &\Leftrightarrow \quad p \leq \sqrt[n]{p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_m^{n_m}}, \\ \sum_{i=1}^{m} X_i \leq_{st} Y \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - p \leq \sqrt[n]{(1-p_1)^{n_1}(1-p_2)^{n_2} \cdots (1-p_m)^{n_m}} \end{aligned}$$

である．

系 1. n 個の独立な確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ を次の様に定義する．

$$\begin{cases} \Pr(X_i = s) = p_i, \\ \Pr(X_i = 0) = 1 - p_i \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n, \quad 0 < p_i < 1, \quad s > 0)$$

Y をパラメータ n, p の二項分布に従う確率変数とすると，

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} X_i \geq_{st} sY \quad &\Leftrightarrow \quad p \leq \sqrt[n]{p_1 p_2 \cdots p_n}, \\ \sum_{i=1}^{n} X_i \leq_{st} sY \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - p \leq \sqrt[n]{(1-p_1)(1-p_2) \cdots (1-p_n)} \end{aligned}$$

である．

命題 4.3. n 個の独立な確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，および確率変数 Y を次の様に定義する．

$$\begin{cases} \Pr(X_i = s) = p, \\ \Pr(X_i = 0) = 1 - p \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n, \quad 0 < p < 1, \quad s > 0), \quad Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

このとき，Y は

$$E[Y] = snp, \quad V[Y] = s^2 np(1-p)$$

である．さらに，平均 $= E[Y]$, 分散 $= V[Y]$ の正規分布を $\mathcal{N}(E[Y], V[Y])$ と表し，

$$W \sim \mathcal{N}(E[Y], V[Y]) = \mathcal{N}(snp, s^2np(1-p))$$

とおく．Y, W の積率母関数をそれぞれ $M_Y(t), M_W(t)$ と表すと，各 $t \in \mathbb{R}$ について，

$$M_Y(t) \to M_W(t) \quad (n \to \infty \text{ のとき})$$

である．

命題 4.4. 独立な確率変数 $X_{ji}(j = 1, 2, \cdots, m, \quad i = 1, 2, \cdots, n_j)$，$Y_j(j = 1, 2, \cdots, m)$, $W_j(j = 1, 2, \cdots, m)$ を次の様に定義する．

$$\begin{cases} \Pr(X_{ji} = s_j) = p_j, \\ \Pr(X_{ji} = 0) = 1 - p_j \end{cases} \quad (i = 1, 2, \cdots, n_j, \quad 0 < p < 1, \quad s > 0)$$

$$Y_j = \sum_{i=1}^{n_j} X_{ji}, \quad W_j \sim \mathcal{N}(s_j n_j p_j, s_j^2 n_j p_j(1 - p_j))$$

さらに，確率変数 Y, W を

$$Y = \sum_{j=1}^{m} Y_j, \quad W = \sum_{j=1}^{m} W_j$$

とおき，Y, W の積率母関数をそれぞれ $M_Y(t), M_W(t)$，分布関数をそれぞれ F_Y, F_W と表すと，すべての j に対して $n_j \to \infty$ のとき

$$M_Y(t) \to M_W(t)$$

かつ，すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$F_Y(x) \to F_W(x)$$

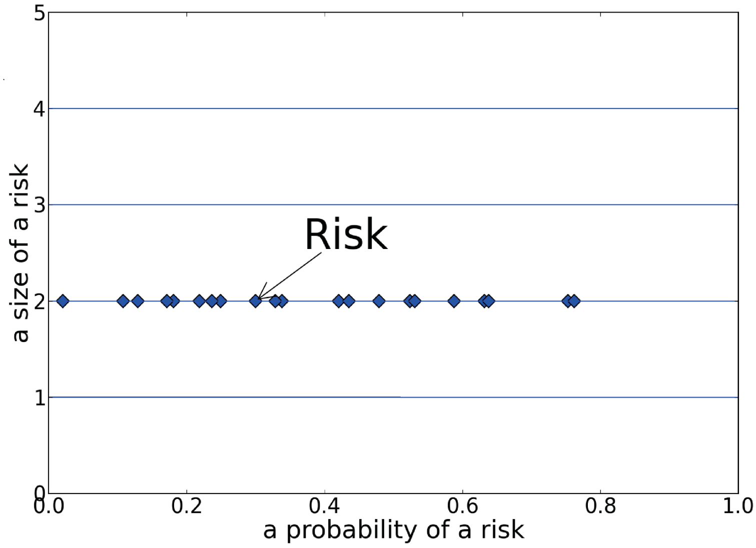
である．

5 影響度が等しいリスクによる総遅延時間の分析

まず，影響度が等しい n 個の独立なリスクのみが存在する場合の総遅延時間について検討する．すなわち，リスク R_i に起因する遅延時間を表す確率変数を $D_i(i = 1, 2, \cdots, n)$，影響度を s，発生確率を p_i，総遅延時間を表す確率変数を D とし，次の条件のもとで検討する．

$$\begin{cases} \Pr(D_i = s) = p_i, \\ \Pr(D_i = 0) = 1 - p_i \end{cases} \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \quad D = \sum_{i=1}^{n} D_i$$

図 4: 影響度が等しいリスクの例



ここで，$\bar{p}(0 \leq \bar{p} \leq 1)$ を

$$\bar{p} = 1 - \sqrt[n]{(1-p_1)(1-p_2)\cdots(1-p_n)}$$

とする．さらに，n 個の独立な確率変数 $X_1, X_2\cdots, X_n$，および確率変数 Y を

$$\begin{cases} \Pr(X_i = s) = \bar{p}, \\ \Pr(X_i = 0) = 1 - \bar{p} \end{cases} \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \quad Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

とする． このとき，系 1 より，

$$D \leq_{st} Y$$

を得る．次に，確率変数 W を

$$W \sim \mathcal{N}(sn\bar{p}, s^2 n\bar{p}(1-\bar{p}))$$

とする．さらに，Y, W の積率母関数をそれぞれ $M_Y(t), M_W(t)$，分布関数をそれぞれ F_Y, F_W と表すと，命題 4.3 および命題 4.4 より，すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$M_Y(t) \to M_W(t), \quad F_Y(x) \to F_W(x) \quad (n \to \infty \text{ のとき})$$

を得る．よって，十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して，$k \in \mathbb{N}$ が存在し，すべての $n > k, x \in \mathbb{R}$ に対して，

$$|F_Y(x) - F_W(x)| < \varepsilon$$

である．ここで，$D \leq_{st} Y$ であることから，すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して，

$$F_D(x) \geq F_Y(x)$$

である．よって，すべての $n > k, x \in \mathbb{R}$ に対して，

$$F_D(x) \geq F_Y(x) \geq F_W(x) - \varepsilon$$

を得る．ここで，

$$W \sim \mathcal{N}(sn\bar{p}, s^2 n\bar{p}(1-\bar{p}))$$

より，$F_W(x), F_W^{-1}(p)$ の近似値を求めることは容易である．よって，影響度が等しいリスクのみが多数存在する場合には，総遅延時間 D を代替する確率変数として Y を用いることが可能であると考えられる．

6　影響度が異なるリスクによる総遅延時間の分析

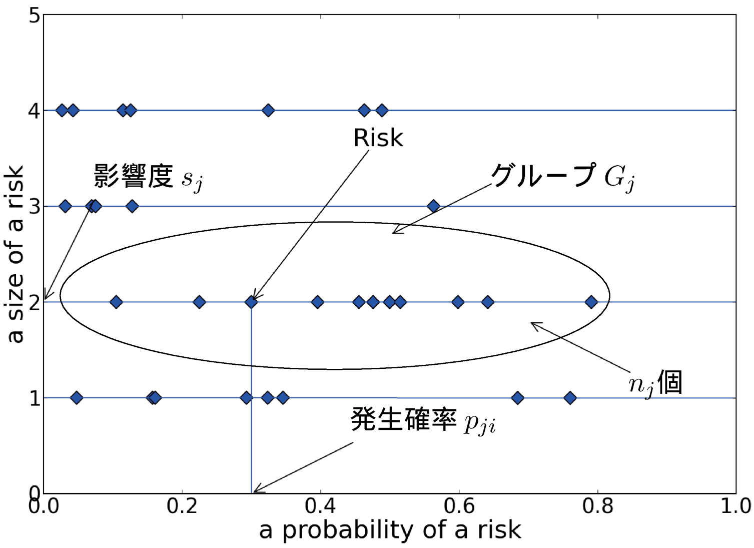
つぎに，影響度が異なる n 個のリスクが存在する場合の総遅延時間について検討する．まず，すべてのリスクを影響度の値が等しい m 個のグループ $G_j (j=1,2,\cdots,m)$ に分割する．G_j に含まれるリスクの総数を n_j とし，前提条件より n_j は十分に大きな値とする．G_j に含まれるリスクを $R_{ji}(i=1,2,\cdots,n_j)$，リスク R_{ji} に起因する遅延時間を表す確率変数を $D_{ji}(i=1,2,\cdots,n_j)$，リスク R_{ji} の発生確率を p_{ji}，影響度を s_j とし，G_j に含まれるすべてのリスク（すなわち，影響度 s_j のすべてのリスク）に起因する遅延時間を表す確率変数を D_j とする．

$$\begin{cases} \Pr(D_{ji}=s_j)=p_{ji}, \\ \Pr(D_{ji}=0)=1-p_{ji} \end{cases} \quad (j=1,2,\cdots,m, \quad i=1,2,\cdots,n_j)$$

総遅延時間 D は D_j, D_{ji} を用いて次の様に表すことができる．

$$D=\sum_{j=1}^{m} D_j, \quad D_j=\sum_{i=1}^{n_j} D_{ji}$$

図 5: 影響度が異なるリスクの例



ここで，$\bar{p}_j (0 \le \bar{p}_j \le 1, j = 1, 2, \cdots, m)$ を

$$\bar{p}_j = 1 - \sqrt[n_j]{(1 - p_{j1})(1 - p_{j2}) \cdots (1 - p_{jn_j})}$$

とおく．さらに，独立な確率変数 $X_{j1}, X_{j2} \cdots, X_{jn_j}$，および確率変数 Y_j を

$$\begin{cases} \Pr(X_{ji} = s_j) = \bar{p}_j, \\ \Pr(X_{ji} = 0) = 1 - \bar{p}_j \end{cases} \quad (j = 1, 2, \cdots, m, \quad i = 1, 2, \cdots, n_j), \quad Y_j = \sum_{i=1}^{n_j} X_{ji}$$

とおく．このとき，系 1 より，すべての $j (j = 1, 2, \cdots, m)$ に対して，

$$D_j \le_{st} Y_j$$

を得る．次に，確率変数 W_j を

$$W_j \sim \mathcal{N}(s_j n_j \bar{p}_j, s_j^2 n_j \bar{p}_j (1 - \bar{p}_j))$$

とおく．Y_j, W_j の積率母関数をそれぞれ $M_{Y_j}(t), M_{W_j}(t)$ とおくと，命題 4.3 より，各 $t \in \mathbb{R}$ について，

$$M_{Y_j}(t) \to M_{W_j}(t) \quad (n_j \to \infty \text{ のとき})$$

である．さらに，確率変数 Y, W を

$$Y = \sum_{j=1}^{m} Y_j, \quad W = \sum_{j=1}^{m} W_j$$

とおき，Y, W の分布関数をそれぞれ F_Y, F_W とおくと，命題 4.4 より，すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$F_Y(x) \to F_W(x) \quad (\text{すべての } j \text{ に対して } n_j \to \infty \text{ のとき})$$

を得る．よって，十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して，$k \in \mathbb{N}$ が存在し，すべての $n_j > k, x \in \mathbb{R}$ に対して，

$$|F_Y(x) - F_W(x)| < \varepsilon$$

である．さらに，すべての $j = 1, 2, \cdots, m$ に対して，

$$D_j \le_{st} Y_j$$

であることから，定理 4.1 より，

$$D = \sum_{j=1}^{m} D_j \le_{st} \sum_{j=1}^{m} Y_j = Y$$

である．よって，すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して，

$$F_D(x) \ge F_Y(x)$$

となり，すべての $n_j > k, x \in \mathbb{R}$ に対して，

$$F_D(x) \ge F_Y(x) \ge F_W(x) - \varepsilon$$

を得る．さらに，$\{Y_j : j = 1, 2, \cdots, m\}$ の独立性，および正規分布の再生性より，

$$W \sim \mathcal{N}(\sum_{j=1}^{m} s_j n_j \bar{p}_j, \quad \sum_{j=1}^{m} s_j^2 n_j \bar{p}_j (1 - \bar{p}_j))$$

が得られ，$F_W(x), F_W^{-1}(p)$ の値を求めることは容易である．

よって，すべての j について影響度が等しいリスクの個数 n_j が大きな値である場合については，総遅延時間 D を代替する確率変数として Y を用いることが可能であると考えられる．

7　まとめと課題

本研究では，プロジェクト・リスク・マネジメントに有効な情報を提供するために，次の2つのことに取り組んだ.

- プロジェクトおけるリスクの影響によって発生する総遅延時間を表す数理モデルを提案した.
- 総遅延時間を表す確率変数 D を代替し，分布関数の計算が可能な確率変数 X を求めた.

また，今後の課題としては，

- 確率変数 X がどの程度確率変数 D を近似しているかの評価.
- 影響度の同じリスクが十分な個数存在しない場合の評価.

に取り組む必要がある.

参考文献

[1] PMBOK ガイド (2013) *A Guide to the Project Management Body of Knowledge(PMBOK Guide) . Fifth Edition*, Project Management Institute, Inc.

[2] Shaked, Moshe and J.George Shanthikumar (2006) *Stochastic Orders*: Springer.

[3] 西尾真喜子 (1978) 『確率論』，実教出版株式会社.