数理解析研究所講究録
第1912巻 2014年 1-9



# ド・モアブルが求めた生起継続の確率計算と動的計画法

# Exact probability of the run by A. de Moivre using the extended Fibonacci sequence and Dynamic Programming

九州大学名誉教授　岩本誠一 Seiichi Iwamoto (Kyushu University)
秋田県立大学　木村寛 Yutaka Kimura(Akita Prefectural University)
千葉大学名誉教授　安田正實 (*) Masami Yasuda (Chiba University)
(*) yasuda@math.s.chiba-u.ac.jp

**概要：** 情報理論、ハイパーキューブの部分列や株価変化のチャート理論、カルマンフィルターのゲイン係数などさまざまな分野において、フィボナッチ数列が応用されることはよく知られている。ここでは、1717年（初版）にA.de Moivre（ド・モアブル）「偶然の学理 (The doctrine of Chances)」が確率のベルヌーイ列における連（生起継続回数）の計算で求めた式であることを述べる。彼の計算結果はこのフィボナッチ数、トリボナッチ数、さらにテトラナッチ数など一般化フィボナッチ数による関係で示されるものである。さらにド・モアブルを拡張したと主張する、積分の台形公式で知られているT.Simpson(シンプソン)の1740年の結果との関連も紹介する。これらのことから、de Moivreによる連の計算、Simpsonによる拡張が分数で表現できる再帰関係式を示す。また岩本／木村では、与えられた整数の逐次分割を2乗評価した動的計画法としてもこの数列を議論した。この紹介とともにフィボナッチ数列が関連する話題を取り上げる。

## 1　回避数列

フィボナッチ数 (Fibonacci numbers: $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ with $F(0) = 0$ and $F(1) = 1$) は非常に多くの分野で、さまざまな形による結果としてよく知られている。この数列は $\{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \cdots\}$ は Lamé's sequence ともよばれるが、とくにここでは

$$\begin{aligned} F(n+2) &= \text{number of binary sequences of length } n \text{ that have no consecutive 0's} \\ &= \text{number of subsets of } \{1, 2, ..., n\} \text{ that contain no consecutive integers} \end{aligned}$$

を取り上げる。つまり、フィボナッチ数は、0と1からなるすべての文字列のなかで、部分列“11”を含まないものの総数と一致することが知られている。たとえば、フィボナッチ数列を入力して検索できるThe OEIS(On-Line Encyclopedia of Integer Sequences) Foundation WEB pageに記述され、よく知られている。1963年からフィボナッチ協会発行のThe Fibonacci Quarterlyには数多くの結果が報告されている。

上記命題の参照としては、

> The probability of not getting two heads in a row in $n$ tosses of a coin is $F_{(n+2)}/2^n$ (Honsberger 1985, pp. 120-122). Fibonacci numbers are also related to the number of ways in which $n$ coin tosses can be made such that there are not three consecutive heads or tails.

と述べられている。

◇ Honsberger, R. "A Second Look at the Fibonacci and Lucas Numbers." Ch. 8 in Mathematical Gems III. Washington, DC: Math. Assoc. Amer., 1985.

◇ Chandra, Pravin and Weisstein, Eric W. "Fibonacci Number." From MathWorld–A Wolfram Web Resource. `http://mathworld.wolfram.com/FibonacciNumber.html`

数論の研究者では組合せ数論のなかでより深い研究がなされ、このうち、つぎの論文などが、フィボナッチ数列での結果、0と1の数列で"11"を表れない場合数の数え上げがフィボナッチ数となること、の拡張を論じている。これらは回避数列とよばれる。

◇ D.Callan: Permutations avoiding a Nonconsecutive Instance of a 2- or 3-Letters Pattern, 2006. `www.stat.wisc.edu/~callan/notes/nonconsec.../nonconsec_pattern.ps`

◇ D. Callan, Pattern avoidance in "flattened" partitions, Discrete Math., 309 (2009), 4187-4191.

ここでは上記の結果に関連して、17 世紀の数学者ドモアブル、Abraham de Moivre(1667-1754) による"「The principle of Chance(偶然の学理)」の第 LXXIV(74) 問(連の確率計算)"(1738年第2版)、(ただし 1756 年では第 LXXXVIII(88) 問)の解がトリボナッチ数列による分数表現で与えられることを述べる。この文献は `doctrineof chance00moiv.pdf`(size 18M) で検索すれば入手できる。さらにより高次の再帰関係数列式、テトラナッチ数列への拡大、更なる発展、定積分の近似計算式で有名なシンプソン、Thomas Simpson(1710-1761) による「偶然の性質と法則」(The Nature and Laws of Chance)(1792 年) での剽窃的な記述の結論に触れる。彼自身による序文では、「皆のために、ド・モアブルのような偉大な人のあとで、このような題目を解説しようと企てるのは、ずうずうしいと思われるかも知れないが、それでも私は満足だ」と述べている。

本論の目的は、動的計画法の理論でわれわれが議論していた事実 [岩本ほか 2006 年、2007 年 etc] が、既にド・モアブルによる母関数を一種の多項式にもちいた確率計算には、数列の再帰関係式が表れていることを注意したい。この関連には動的計画法の基盤的な考えが取り込まれている。

◇ Abraham de Moivre(1718, 1738, 1756); The principle of Chance, 1738 第88問、1756 第74問 (The probability of a run of given length)。

◇ Isac Todhunter(1865); A History of the Mathematical Theory of Probability from the ime of Pacsal to that of Laplace, Macmillan, London. Reprinted by Chelsea, New York, 1949. 「確率論史」(安藤洋美訳) 現代数学社、(1975) 第9章ドモアブル。

◇ Thomas Simpson(1740); The Nature and Laws of Chance. The Whole after a new, general, and conspicuous Manner, and illustrated with a great Variety of Examples. Cave, London. Reprinted 1792.

◇ Pierre-Simon de Laplace,(1812); Théorie Analytique des Probabilitiés. Paris. 2nd. ed. 1814; 3rd.ed.1820. Reprinted in Oeuvres, Vol.7,1886.

◇ Anders Hald(1989): A History of Probability & Statistics and their Applications before 1750, John Wiley & Sons, 第 22 章 de Moivre and the Doctorine of Chances,1718,1738, and 1756, 6 節 The Theory of Runs.

◇ Julian Havil; IMPOSSIBLE? Surprising Solutions to Counterintuitive Conundrums, Princeton Univ Press, 2008.

◇ S.Iwamoto; Inverse theorem in dynamic programming I,II,III, J.Math.Anal.Appl. 58(1977), 113-134,247,439-448.

◇ S.Iwamoto and A.Kira; On Golden inequalities, RIMS 1504 (2006), 168-176.

◇ S.Iwamoto and Y.Kimura; Alternate Da Vinci Code, Journal of Political Economy, Kyushu University, 76(4) 2010, 1-19.

◇ S.Iwamoto and M.Yasuda; Golden Optimal path in Discrete-time Dynamic Optimization Processes, Advanced Studies in Pure Math., Volume 53, 2009, Pages 99-108.

Theorem 1.1 $n$ 桁の $\{0,1\}$ からなるすべての列 $2^n$ のうち、部分列 11 を含まないもの (a sequence of avoiding "11") は、$F(n+2)$ 個ある。ここで $F(n) = F_n$ はフィボナッチ数:

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F(n) = F_n$ | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 | $\cdots$ |

Theorem 1.2 (同値命題の定理) $n$ 個の独立なベルヌーイ列、$X_i \sim \mathrm{Binom}\left(1, \frac{1}{2}\right), i = 1, 2, \cdots, n$ において、

$$P\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i X_{i+1} = 0\right) = \frac{F(n+2)}{2^n} \tag{1}$$

が成り立つ。ここで $F(n) = F_n$ は $n$-th フィボナッチ数とする。

Lemma 1.1　数列 $\{a_n, b_n\}_{n=1,2,\cdots}$ を、$a_1 = b_1 = 1$ とし、また $n \geq 1$ について

$$\begin{cases} a_{n+1} &= a_n + b_n \\ b_{n+1} &= a_n \end{cases} \tag{2}$$

とおくと、

$$F_{n+2} = a_n + b_n, \quad F_n = b_n \tag{3}$$

が成り立つ。

Lemma 1.2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{4}$$

Corollary 1.1　上述の数列において

(1)　$n$ 桁目の値が 0 の個数は $a_n = F(n+1)$.

(2)　$n$ 桁目の値が 1 の個数は $b_n = F(n)$.

が成り立つ。

たとえば､$n = 3$ では､(1) は $a_3 = F(4) = 3$ で､$\{000, 010, 100\}$, (2) は $b_3 = F(3) = 2$ で､$\{001, 101\}$. $n = 4$ では、(1) は $a_4 = F(5) = 5$ で、$\{0000, 0010, 0100, 1000, 1010\}$, (2) は $b_4 = F(4) = 3$ で、$\{0001, 0101, 1001\}$ となっている.

## 2　トリボナッチ数列

前節で述べたフィボナッチ列が 2 項の和で定めたことに対して、3 項の和としたものが、トリボナッチとよばれる。さらに 4 項へと拡張した場合を後節で考える。

Definition 2.1　トリボナッチ数列の定義:

$$T_0 = T_1 = 0,\ T_2 = 1,\ T_{n+3} = T_n + T_{n+1} + T_{n+2}, \quad (n \geq 0)$$

この定義によるいくつかの項を列挙してみるとつぎのように計算できる。

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T_n$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 4 | 7 | 13 | 24 | 44 | 81 |

| | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | $\cdots$ | 20 | 21 | 22 | 23 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 149 | 274 | 504 | 924 | 1705 | 3136 | $\cdots$ | 35890 | 66012 | 121415 | 223317 |

フィボナッチ数と比べると、急激に増加する。一般項の計算は数式処理（Mathematica）により計算するが、そのままでは冗長で多少手を加えてみる。まず 3 世代の変換行列における固有方程式

$$x^3 = 1 + x + x^2 \tag{5}$$

を求めると、この解は

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{3}\left(1 + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}}\right) \\ a_2 = \frac{1}{3}\left(1 + \omega\sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} + \overline{\omega}\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}}\right) \\ a_3 = \frac{1}{3}\left(1 + \overline{\omega}\sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} + \omega\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}}\right) \end{cases}$$

ただし、$\omega = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ とする。したがって $1 + \omega + \overline{\omega} = 0$ などより、つぎを得る。

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1, \quad a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 = -1, \quad a_1a_2a_3 = 1 \tag{6}$$

これらを用いて、べき行列により表現する。行列のべき乗計算とその結果:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} T_{n+2} & T_{n+1} + T_n & T_{n+1} \\ T_{n+1} & T_n + T_{n-1} & T_n \\ T_n & T_{n-1} + T_{n-2} & T_{n-1} \end{pmatrix}$$

増加の状況が

$$F_n/F_{n-1} \sim \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.62\cdots \quad (\text{黄金比})$$

と評価され、$n \geq 6$ でも $F_n \sim 13 \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-6}$, であり、

$$\lim_n \frac{T_{n+1}}{T_n} = a_1 = \frac{1}{3}\left(1 + \sqrt[3]{19-3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19+3\sqrt{33}}\right)$$

が成り立つことが知られている。

## 3 偉大な人の後で, シンプソンは

T. シンプソン「The Nature and Laws of Chance」(偶然の性質と法則,1740 年) の連 (第 XXIV(24) 問) の問題 :「皆のため、ド・モアブルのような偉大な人の後で、このような題目を解説しようと企てるのは、ずうずうしいと思われるかも知れないが、それでも私は満足だ」(序文より)

ベルヌーイ試行での連の計算を行っている。提起された事象の起る確率を $p$, 反対の事象の確率を $q = 1-p$ とする。「継続の法則は明らかである」として直ちに一般公式を書き下す。

$$Z_n = a\left\{1 - \ddot{n}x + \binom{\dddot{n}}{2}x^2 - \binom{\ddddot{n}}{3}x^3 + \cdots\right\} + \dot{n}x - \binom{\ddot{n}}{2}x^2 + \binom{\dddot{n}}{3}x^3 - \cdots$$

ここでシンプソンの略記号 $\dot{n} = n - r,\ \ddot{n} = n - 2r,\ \dddot{n} = n - 3r,\ \cdots$ である。もし $p = 2/3, q = 1/3, r = 3, n = 10$ ならば、

$$a = (2/3)^3 = 8/27, \quad x = qp^3 = 8/81$$

$$Z_{10} = \frac{8}{27}\left(1 - 4 \times \frac{8}{81}\right) + 7 \times \frac{8}{81} - \binom{4}{2}\left(\frac{8}{81}\right)^2 = \frac{592}{729}$$

という数値を計算している。

この結果を検証するために階差数列を考えれば、もっと簡潔であり、結果の正しいことを確認でき、より一般な形の結果が求められる。これが主な主張である。実際、つぎの定理で述べる関係式を用いて計算すると、

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z_n$ | 0 | 0 | $\frac{8}{27}$ | $\frac{32}{81}$ | $\frac{40}{81}$ | $\frac{16}{27}$ | $\frac{1448}{2187}$ | $\frac{4736}{6521}$ | $\frac{1688}{2187}$ | $\frac{592}{729}$ | $\cdots$ |
| $W_n$ | $\frac{9}{2}$ | $\frac{9}{4}$ | $\frac{57}{8}$ | $\frac{147}{16}$ | $\frac{369}{32}$ | $\frac{891}{64}$ | $\frac{2217}{128}$ | $\frac{5475}{256}$ | $\frac{13473}{512}$ | $\frac{33291}{1024}$ | $\cdots$ |

確かにシンプソンの結果 : “$Z_{10} = \frac{592}{729} \approx 0.812071$” と一致した。メデタシめでたし！ 途中での過程では４桁にもなるときがあるが、１０番目では３桁ずつの分数になり、ここで結果を示しているのは、やはり計算の達人の表れか。

いままでのドモアブルの結果、シンプソンの結果は、現代流の記号で表現するとつぎのように書き表すことができる。つまり確率に関する「再帰関係式」(recurresive relation) である。

**Theorem 3.1** $n$ 個の独立なベルヌーイ列, $X_i \sim \mathrm{Binom}(1,p), i = 1, 2, \cdots, n\ (0 < p < 1)$ に対して、

$$P(n,k) = P\left(\sum_{i=1}^{n-k+1} X_i X_{i+1} \cdots X_{i+k-1} > 0\right) \tag{7}$$

とおくとき、つぎの関係式が成り立つ。

$$P(n,k) = P(n-1,k) + \{1 - P(n-k-1,k)\}qp^k, \quad k = 1, 2, \cdots, n \tag{8}$$

境界条件は

$$P(0,k) = P(1,k) = \cdots = P(k-1,k) = 0, \quad P(k,k) = qp^{k-1}$$

この方程式 (8) を解くには差分を考える。$k$ を固定しておき、$W_n = \frac{1}{qp^n}(1 - Z_n)$ とし、正となる確率 $Z_n = P(n,k)$ は補事象からゼロとなる確率 $W_n = \frac{1}{qp^n} P\left(\sum_{i=1}^{n-k+1} X_i X_{i+1} \cdots X_{i+k-1} = 0\right)$ を差し引き、変形すると

$$W_n = \frac{1}{p} W_{n-1} - \frac{q}{p} W_{n-k-1} \tag{9}$$

$$\Delta W_n = \frac{q}{p} \left(\Delta W_{n-1} + \Delta W_{n-2} + \cdots + \Delta W_{n-k}\right) \tag{10}$$

$W_n$ の ゼロとなる確率は、"$11 \cdots 1$" を含まない、いいかえると回避列の (avoiding sequence) 確率であり、$p = q = 1/2$ という場合はドモアブルの場合に帰着され、係数がすべて 1 となる、この線形差分方程式の解は、フィボナッチ、トリボナッチ、テトラナッチ数列に他ならない。これを用いると、確率は分数で表現される。

## 4　テトラナッチ数列とド・モアブルの結果

つぎにテトラナッチ数列 $\{Q_n; n = 0, 1, 2, \cdots\}$ :

$$\begin{aligned} &Q_0 = Q_1 = Q_2 = 0,\ Q_3 = 1, \\ &Q_{n+4} = Q_{n+3} + Q_{n+2} + Q_{n+1} + Q_n \end{aligned} \tag{11}$$

に対しては

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | $\cdots$ | 25 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Q_n$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 4 | 8 | 15 | 29 | 56 | $\cdots$ | 1055026 | $\cdots$ |

ここで、後で必要となる $Q_{25} = 1055026$ を取り上げておく。

前と同様にこのような行列のベキ計算によれば、項の計算はコンピュータによる数式処理のくり返し線形再帰命令 (LinearRuccurensive) で簡単にできる。StringReplace での rule は (1) `"A" -> "AB"`, (2) `"B" -> "AC"`, (3) `"C" -> "AD"`, (4) `"D" -> "A"` とすれば前と同様に計算できる。

さらにつぎも成り立つ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} Q_n & Q_{n-1} + Q_{n-2} + Q_{n-3} & Q_{n-1} + Q_{n-2} & Q_{n-1} \\ Q_{n-1} & Q_{n-2} + Q_{n-3} + Q_{n-4} & Q_{n-2} + Q_{n-3} & Q_{n-2} \\ Q_{n-2} & Q_{n-3} + Q_{n-4} + Q_{n-5} & Q_{n-3} + Q_{n-4} & Q_{n-3} \\ Q_{n-3} & Q_{n-4} + Q_{n-5} + Q_{n-6} & Q_{n-4} + Q_{n-5} & Q_{n-4} \end{pmatrix} \tag{12}$$

実は, これに関連した結果はド・モアブル (A.de Moivre,1667-1754) が一種の母関数（ベキ級数）の "有意な部分" の計算式をもちいて計算してものが知られている。

> 第 LXXIV(74) 問: 与えられた試行回数のなかで、途切れることなく続いた回数の反復数を達成する確率を求めること。「偶然の学理」A.de Moivre, "The Doctrine of Chances" (1718, 1738, 1756)
> （参考 ; Impossible? Surprising Solutions to Counterintuitive Conundrums by Julian Havil, Princeton Univ Press, 2008）

その結果の一つは、

【1】ベルヌーイ試行において、10 回試行したときに 3 回以上表の出ることが続く確率 $P(10,3)$ は？
答えとして、

$$\frac{1}{8}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \frac{7}{16} + \frac{13}{32} + \frac{24}{64} + \frac{44}{128}\right) = \frac{65}{128} \approx 0.508 \tag{13}$$

【2】「計算をもっと簡単にする方策を検討」し続け、24 回の試行で、4 回以上表の出ることが続く確率 $P(24,4)$ は？
答えとして（一部計算間違いが指摘されているが、確認してみると間違いではない）この場合の計算として導いた結果, $P(24,4) \approx 0.497$ が得られている。

現代のコンピュータを用いない時代にこのような素晴らしい計算には感嘆するばかりであり、もし彼がコンピュータを使ったならば、どういう発展になるのか想像すらできない。

Example 4.1 このドモアブルの問題はコンピュータがあれば、極めて容易に確率計算となる。これがベルヌーイ試行におけるフィボナッチ、トリボナッチ、テトラナッチ数列とつぎのように関係付けられる。

したがってドモアブルの結果は、定理 3.1 よりこれを用いて表すと

$$P(10,3) = \frac{65}{128} = 1 - \frac{63}{128} = 1 - \frac{T(10+3)}{2^{10}} = 1 - \frac{T_{13}}{2^{10}} = 1 - \frac{504}{2^{10}} \approx 0.508$$

であった。4 項式の初期値の関係から, $25 = 21 + 4$, $n = 21$ として

$$P(25,4) = 1 - \frac{Q(21+4)}{2^{21}} = 1 - \frac{Q_{25}}{2^{21}} = 1 - \frac{1055026}{2097152} \approx 1 - 0.503076 = 0.496924$$

とコンピュータで求められ、答えはドモアブルの結果と一致する。

以上の結果から、つぎの定理としてまとめられる。

Theorem 4.1 $n$ 個の独立なベルヌーイ列、$X_i \sim \mathrm{Binom}\left(1, \frac{1}{2}\right), i = 1, 2, \cdots, n$ において、

(i) トリボナッチ数列として

$$P\left(\sum_{i=1}^{n-2} X_i X_{i+1} X_{i+2} = 0\right) = \frac{T(n+3)}{2^n} \tag{14}$$

が得られる。ここで $T(n) = T_n$ は $n$-th トリボナッチ数とする。

(ii) またテトラナッチ数列では

$$P\left(\sum_{i=1}^{n-3} X_i X_{i+1} X_{i+2} X_{i+3} = 0\right) = \frac{Q(n+4)}{2^n} \tag{15}$$

が成り立つ。ここで $Q(n) = Q_n$ は $n$-th テトラナッチ数列 (quadruplet sequence) とする。

多くの研究論文で、このようなベルヌーイ試行での成功が継続して出ることの解析は研究されている。たとえば、Mark Schilling; The longest run of heads, College Mathematics Journal, 1990, pp.196-207.
`http://www.stat.wisc.edu/~callan/notes/nonconsec_pattern/nonconsec_pattern.pdf`

よく知られている様々な関係式のうち、この行列を用いるとそれぞれの数列に関して、フィボナッチ数列 : $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, トリボナッチ数列 : $T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$ テトラナッチ数列 : $Q_n = Q_{n-1} + Q_{n-2} + Q_{n-3} + Q_{n-4}$ を定める非線形な関係式;(カッシーニ、シムソンの定理) $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^2$ は

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

などの行列式の値から得られる。両辺の行列式を求めれば、$(-1)^n = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$ から、つぎの式が得られる。

$$F_{n+1} = \frac{F_n^2 + (-1)^n}{F_{n-1}} \tag{16}$$

同様に

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} T_{n+2} & T_{n+1} + T_n & T_{n+1} \\ T_{n+1} & T_n + T_{n-1} & T_n \\ T_n & T_{n-1} + T_{n-2} & T_{n-1} \end{pmatrix}$$

をもちいて、行列式の計算で $1 = T_n^3 - 2T_{n+1}T_nT_{n-1} + T_{n+2}T_{n-1}^2 + T_{n+1}^2T_{n-2} - T_{n+2}T_nT_{n-2}$

$$T_{n+2} = \frac{1 - T_n^3 + 2T_{n+1}T_nT_{n-1} - T_{n+1}^2T_{n-2}}{T_{n-1}^2 - T_nT_{n-2}} \tag{17}$$

を得る。

さらにコンピュータ支援により、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} Q_{n+3} & Q_{n+2}+Q_{n+1}+Q_n & Q_{n+2}+Q_{n+1} & Q_{n+2} \\ Q_{n+2} & Q_{n+1}+Q_n+Q_{n-1} & Q_{n+1}+Q_n & Q_{n+1} \\ Q_{n+1} & Q_n+Q_{n-1}+Q_{n-2} & Q_n+Q_{n-1} & Q_n \\ Q_n & Q_{n-1}+Q_{n-2}+Q_{n-3} & Q_{n-1}+Q_{n-2} & Q_{n-1} \end{pmatrix}$$

をもちいて、

$$Q_{n+3} = \frac{E_{num}}{D_{num}} \tag{18}$$

ここで

$$\begin{aligned} E_{num} &= (-1)^n + Q_n^4 - 3Q_{n+1}Q_n^2Q_{n-1} + Q_{n+1}^2Q_{n-1}^2 + 2Q_{n+2}Q_nQ_{n-1}^2 + 2Q_{n+1}^2Q_nQ_{n-2} \\ &\quad -2Q_{n+2}Q_n^2Q_{n-2} - 2Q_{n+2}Q_{n+1}Q_{n-1}Q_{n-2} + Q_{n+2}^2Q_{n-2}^2 - Q_{n+1}^3Q_{n-3} \\ &\quad +2Q_{n+2}Q_{n+1}Q_nQ_{n-3} - Q_{n+2}^2Q_{n-1}Q_{n-3} \\ D_{num} &= Q_{n-1}^3 - 2Q_nQ_{n-1}Q_{n-2} + Q_{n+1}Q_{n-2}^2 + Q_n^2Q_{n-3} - Q_{n+1}Q_{n-1}Q_{n-3} \end{aligned}$$

となるが、ほぼ計算機の結果を信じるだけである。

## 5 階差数列を考える

フィボナッチ数列 $\{F_n; F_{n+2} = F_{n+1} + F_n\}$ において、階差 $\{F_n - F_{n-1}\}$ は再びフィボナッチ数列となる。すなわち $F_{n+3} - F_{n+2} = (F_{n+2} - F_{n+1}) + (F_{n+1} - F_n)$, よって

$$F_{n+3} = 2F_{n+2} - F_n \tag{19}$$

が成り立つ。

最近の FQ 誌に掲載された下記の論文ではこの関係を階差とは考えずに直接解いている (文献中の Thm 2.2.,2.3,2.4)。後者の著者は、FQ の main editor である。

◇ Howard, F. T.; Cooper, Curtis: Some identities for $r$-Fibonacci numbers. Fibonacci Quart. 49 (2011), no. 3, 231-242.

ここでは、この関係式をもちいると、両辺を 2 のべき乗で割って、順次次数を下げていくとつぎの関係式が得られることを述べておく。差分演算子 $\Delta H_n = H_{n+1} - H_n$ を用いると、

$$\begin{aligned} &\Delta F_n = \Delta F_{n-1} + \Delta F_{n-2} \quad (n \geq 2) \\ &\Delta T_n = \Delta T_{n-1} + \Delta T_{n-2} + \Delta T_{n-3} \quad (n \geq 3) \\ &\Delta Q_n = \Delta Q_{n-1} + \Delta Q_{n-2} + \Delta Q_{n-3} + \Delta Q_{n-4} \quad (n \geq 4) \end{aligned} \tag{20}$$

を解くことに帰着される。

帰納法をもちいても当然得られる。したがって次の定理は明らか。

**Theorem 5.1** フィボナッチ数列では

$$\frac{F_{r+3}}{2^{r+1}} = 1 - \frac{1}{2^2}\left(\frac{F_1}{2^0} + \frac{F_2}{2^1} + \frac{F_3}{2^2} + \cdots + \frac{F_r}{2^{r-1}}\right) \tag{21}$$

が示される。同様にトリボナッチ数列では $T_{n+4} = 2T_{n+3} - T_n$ より、

$$\frac{T_{r+4}}{2^{r+1}} = 1 - \frac{1}{2^3}\left(\frac{T_1}{2^0} + \frac{T_2}{2^1} + \frac{T_3}{2^2} + \cdots + \frac{T_r}{2^{r-2}}\right) \tag{22}$$

またテトラナッチ数列では

$$\frac{Q_{r+5}}{2^{r+1}} = 1 - \frac{1}{2^4}\left(\frac{Q_1}{2^0} + \frac{Q_2}{2^1} + \frac{Q_3}{2^2} + \cdots + \frac{Q_r}{2^{r-3}}\right) \tag{23}$$

を得る。

フィボナッチ数列では、階差数列から得られる関係式：$F_{n+3} = 2F_{n+2} - F_n$ を用いたが、トリボナッチ数列の階差の関係式；$T_{n+4} = 2T_{n+3} - T_n$ 、さらにテトラナッチ数列の階差の関係式；$Q_{n+5} = 2Q_{n+4} - Q_n$ から同様にして得られる。フィボナッチ数列の関係式 (21) はよく知られているもののひとつである。

数値例 $(r = 9)$ で確かめると

$$\begin{cases} \dfrac{F_{12}}{2^{9+1}} = \dfrac{144}{1024} = 1 - \dfrac{1}{2^2}\left(\dfrac{F_1}{2^0} + \dfrac{F_2}{2^1} + \dfrac{F_3}{2^2} + \cdots + \dfrac{F_9}{2^8}\right) = 1 - \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{880}{256} \\ \dfrac{T_{13}}{2^{9+1}} = \dfrac{504}{1024} = 1 - \dfrac{1}{2^3}\left(\dfrac{T_2}{2^0} + \dfrac{T_3}{2^1} + \cdots + \dfrac{T_9}{2^7}\right) = 1 - \dfrac{1}{8} \cdot \dfrac{520}{128} \approx 0.4921875 \\ \dfrac{Q_{14}}{2^{9+1}} = \dfrac{773}{1024} = 1 - \dfrac{1}{2^4}\left(\dfrac{Q_3}{2^0} + \dfrac{Q_4}{2^1} + \cdots + \dfrac{Q_9}{2^6}\right) = 1 - \dfrac{1}{16} \cdot \dfrac{251}{128} \end{cases} \tag{24}$$

この数値例 (24) 式の値は、ドモアブルが求めた (13) 式の計算結果

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^3}\left(\frac{T_2}{2^0} + \frac{T_3}{2^1} + \cdots + \frac{T_9}{2^7}\right) \\ = & \frac{1}{2^3}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \frac{7}{16} + \frac{13}{32} + \frac{24}{64} + \frac{44}{128}\right) \approx 0.5078125 \end{aligned}$$

に他ならない。したがってこれと同様な関係式がより高次の場合について成立することが予想され、これは２，３、４次の場合で、彼は２０次程度に関する結果を求めた（前述)。素晴らしさを超えた凄まじい計算力に驚嘆する。

## 6　整数分割の 2 乗評価

動的計画法としての考察は、岩本／木村 [Iwa/Kimu,2011] によっておこなわれた。2 次計画問題として 2 乗評価での整数分割として、つぎのような最適化問題を取り扱った。

$$\text{Minimize}_{\{a_n:\text{integer}\}} \sum_n [x_n^2 + a_n^2] \text{ subject to } x_{n+1} = x_n + a_n,\ x_0 = c\,(\text{given a integer}), n \geq 0.$$

Example 6.1　まず $n = 5$ を初期値として分割する問題から考える。数字の () をつぎのステップで分割していく。たとえば、$(4) \to (1+3)$ などである。さらに $\underline{1+(4)}$ に対して、2 乗コスト $1^2 + 4^2$ が課されていく。

$$\begin{array}{llll} 5 \to & \underline{1+(4)} & \to 1 + (\underline{1+3}) & \\ & 1^2+4^2 & +1^1+3^2 & :\text{total} = 27 \\ 5 \to & \underline{3+(2)} & \to 3 + (\underline{1+1}) & \\ & 3^2+2^2 & +1^2+1^2 & :\text{total} = 15 = 5 \times 3\,(\text{optimal}) \end{array}$$

Example 6.2　$n = 13$ の場合ではつぎの 3 通りの場合を計算する。

$$\begin{array}{lllll} 13 \to & \underline{3+(10)} & \to 3 + (\underline{6+(4)}) & \to 3 + (6 + (\underline{1+(3)})) & \\ & 3^2+10^2 & +6^2+4^2 & +1^2+3^2 & :\text{total} = 171 \\ 13 \to & \underline{7+(6)} & \to 7 + (\underline{3+(3)}) & \to 7 + (3 + (\underline{2+(1)})) & \\ & 7^2+6^2 & +3^2+3^2 & +2^2+1^2 & :\text{total} = 108 \\ 13 \to & \underline{8+(5)} & \to 8 + (\underline{3+(2)}) & \to 8 + (3 + (\underline{1+(1)})) & \\ & 8^2+5^2 & +3^2+2^2 & +1^2+1^2 & :\text{total} = 104 = 13 \times 8\,(\text{optimal}) \end{array}$$

実際、これの例からわかるように、フィボナッチ数を初期値として分割すると、最適となる場合は、フィボナッチ数列によって生成することが 2 乗コストを最小にするという例 (初期値 $x_0 = F_n$, $n$ を減少列) である。つまり

| 初期値 | 第 1 段の分割 | 第 2 段の分割 | $\cdots$ 総計値 |
|---|---|---|---|
| $F_n \to$ | $\underline{F_{n-1} + (F_{n-2})}$ | $\to F_{n-1} + (F_{n-2} + (\underline{F_{n-3} + (F_{n-4})}))$ | $\cdots$ |
| | $F_{n-1}^2 + F_{n-2}^2$ | $+F_{n-3}^2 + F_{n-4}^2$ | $\cdots$ :total $= F_n * F_{n-1}$ (optimal) |

Theorem 6.1 初期値がフィボナッチ数 $F_N(N \geq 2)$ であれば、整数分割の 2 乗評価の最適列はフィボナッチ数列で $\{F_n\}$ で最適値は $F_N \times F_{N-1}$ で与えられる。岩本／木村による整数分割の結果は 2 次計画問題として、よく知られたフィボナッチ数列の関係式：

$$F_{n-1}^2 + F_{n-2}^2 + F_{n-3}^2 + F_{n-4}^2 + \cdots\cdots + F_1^2 + F_0^2 = F_n * F_{n-1}$$

を最適化問題の枠組み中の最適値を表す関係として得られる。

線形 2 乗コスト制御問題 (Linear Quadratic Control problem) の離散版ともみなせる。さらにいくつかの双対性などに関した問題も詳しく議論がなされている。また離散型制御問題でのカルマンフィルターのゲイン係数における漸化式もフィボナッチ数列が表れる。

◇ S.Iwamoto and Y.Kimura; The Alternately Fibonacci Complementary Duality in Quadratic Optimization Problem, J.Nonlinear Analysis and Optimization, 2(2011), 93-103.

◇ S.Iwamoto and M.Yasuda; Golden optimal value in discrete-time dynamic optimization processes, RIMS Kokyuroku, Volume 1559, 2007, Pages 56-66.

◇ A.Benavoli, L.Chisci, A.Farina; Fibonacci sequence, golden section, Kalman filter and optimal control, Signal Processing 89(2009), 1483-1488.

## 7 デカルトの 4 円定理にも

ルネ・デカルト (1596-1650) がエリーザベト女王に捧げたという 4 円定理とは互いに外接する 3 つの円の内側に 4 番目の円を描くとき、これらの半径の関係式を述べたものである。

いま半径を、$r_i, i = 1,2,3,4$ とすると、

$$\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{r_4^2}\right)$$

あるいは

$$r_4 = \frac{r_1 r_2 r_3}{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1 + 2\sqrt{r_1 r_2 r_3 (r_1 + r_2 + r_3)}}$$

というものである。１９２１年のノーベル化学賞授賞者, フレデリック・ソディ（英国,1877～1956）によるソディの公式ともよばれる。ここで $r_3 \to \infty$, $r_4 = r$ とおくと、直線 ($r_3 \to \infty$：半径が無限大であるときには直線とみなす) 上の並んだ 2 円 ($r_1$ と $r_2$) の挟まれた円の半径 $r$ に対しての関係式、

$$\frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \tag{25}$$

すなわち和算にもよく表れる円の反転公式となる（深川英俊、ダン・ペドー著; 日本の幾何ー何題解けますか？（森北出版)）。

これを再帰関係式と考え、繰り返して 2 円に挟まれ、外接する円の半径を $r_i, i = 1,2,\cdots$ としていくと、$k_n = \dfrac{1}{\sqrt{r_n}}$ とおくと、$k_n = k_{n-1} + k_{n-2}$ であるから、フィボナッチ漸化式であり、フィボナッチ列 $\{F_n\}$ から $k_n = F_{n-1}k_2 + F_{n-2}k_1$ を得る。よって $n$ 番目の半径が、初期とした 2 円の半径 $r_1, r_2$ とフィボナッチ数列をもちいて

$$\frac{1}{\sqrt{r_n}} = \frac{F_{n-1}}{\sqrt{r_2}} + \frac{F_{n-2}}{\sqrt{r_1}} \tag{26}$$

と表されることがわかる。

(以上)