数理解析研究所講究録
第 1914 巻 2014 年 94-103



# THE LOWEST EIGENVALUE OF NON-COMMUTATIVE HARMONIC OSCILLATORS

廣島 文生 (九大数理), 佐々木 格 (信州大理工)

ABSTRACT. 調和振動子の非可換化と考えられる非可換調和振動子 $Q(\alpha,\beta)$ を考える. パラメターが $\alpha\neq\beta$ のとき, $Q(\alpha,\beta)$ の最低固有値が単純であることは長い間の未解決問題であった. この論文ではその単純性を示す.

## 1. はじめに

1.1. **新幹線の中で.** 非可換調和振動子は A. Parmeggiani と M. Wakayama [PW01, PW02, PW03] によって調和振動子の非可換化として導入された[1]. 著者は 2012 年 12 月に若山正人氏 (九大 IMI) の非可換調和振動子に関する講演を RIMS で聴講した. そこで知ったのがここで紹介する最低固有値の単純性の問題である. 物理に表れるスピンなどの内部自由度のないハミルトニアンは多くの場合最低固有値に対応する固有ベクトルは節 (ゼロ点) をもたず, 至る所正な関数である. その結果, 互いに直交する固有ベクトルが存在することはなく, 最低固有値は単純になる. またスピンがある場合には対称性から最低固有値が縮退していることがわかることが多い. 果たして非可換調和振動子の最低固有値の縮退度はどうなっているのか? 例えば, 行列系数をもつ物理的に最近脚光を浴びている Rabi 模型

$$\epsilon\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\otimes I+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\otimes x+I\otimes\left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)$$

の最低固有値が $\epsilon\neq 0$ で単純であることは経路積分で示すことが出来る [HH12]. 非可換調和振動子の場合は対称性の議論, 経路積分の議論などが $\alpha=\beta$ のとき [Tan09] 以

*Date*: July 12, 2014.
2000 *Mathematics Subject Classification.* 35P05, 35P15.
*Key words and phrases.* non-commutative harmonic oscillator, multiplicity, the lowest eigenvalue, crossing, no crossing.

[1][Par10] に非可換調和振動子のくわしい解説がある.

外, 上手く出来ず, 摂動論的な議論になってしまい, 結局特別な $\alpha, \beta$ に対してのみ単純性が知られているにすぎなかった.

RIMS で聴講したあと, 福岡に戻る新幹線の中で少し計算してみると, 最低固有値の縮退度が, パラメターのある領域 ($\subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$) で 2 以下であることが示せた. この結果自体は驚くに値しないが, 実はこのとき, 最低固有値に対応する固有ベクトルが偶関数になることに気づいた. 2013 年に研究会を開催する機会があった. そこで再度, 若山正人氏が講演で「最低固有値に対応する固有ベクトルが全て偶関数ならば, 最低固有値は単純」という結果を発表していた. 何ということか. つまり, 単純性をいうためには, 最低固有値に対応する固有ベクトルが偶関数であることを言えばいいことになった. まさにそれがここで述べる結果である.

1.2. **定義など.** 非可換調和振動子は

$$Q = Q(\alpha, \beta) = A \otimes \left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}x^2\right) + J \otimes \left(x\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}\right), \tag{1.1}$$

と定義される

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes L^2(\mathbb{R})$$

上の自己共役作用素である. ここで $A, J \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ で, $A$ は正定値な対称行列, $J$ は歪対称行列. さらに $A + iJ$ は正定値となるものである. [PW02, PW03] で

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

としていいことが示されている. ここで, パラメターは

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \alpha\beta > 1 \tag{1.2}$$

をみたす. この論文では上の $A$ と $J$ を固定する. すぐに次の Lemma が示せる.

**Lemma 1.1.** $Q$ は $D(Q) = \mathbb{C}^2 \otimes (D(d^2/dx^2) \cap D(x^2))$ 上で自己共役で離散固有値 $E_0 \leq E_1 \leq E_2 \leq \cdots \nearrow \infty$ のみもつ.

$\alpha = \beta$ のとき, $Q(\alpha, \beta)$ は 2 つの調和振動子の直和と同型になる;

$$Q(\alpha, \alpha) \cong \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\alpha^2-1}{2}x^2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\alpha^2-1}{2}x^2 \end{pmatrix}.$$

故にこのとき全ての固有値は2重に縮退している.

一方で $\alpha \neq \beta$ のとき, $Q(\alpha,\beta)$ は調和振動子の $q$-変形と見なすことが出来る. ここで $q=\beta/\alpha$ または $q=\alpha/\beta$. また, このとき $Q$ のスペクトルは縮退の様子もこめて非自明である. 最低固有値 $E=E_0$ に対応する固有ベクトルを基底状態と呼ぶ. 非可換調和振動子が定義されて以来の未解決問題に

「$Q(\alpha,\beta)$ の固有値の縮退度を決めよ」

というものがある. いま, $\alpha \neq \beta$ としよう. $E_n = E_n(\alpha,\beta)$ は $n$ 番目の固有値を表すとする. 写像 $c_n : (\alpha,\beta) \mapsto E_n(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}$ は固有値曲線と呼ばれている. 固有値の縮退度を評価することは固有値曲線の交点を調べることに帰着される.

1.3. **今までの研究経過.** 縮退度に関する今までの研究結果を紹介する.

[PW03] で全ての固有値の縮退度はたかだか3であることが示された. また別証明が [Och01] にある.

数値計算レベルでは [NNW02] で交点の様子が調べられている. ここでは最低固有値に交点がないことが示唆された.

[IW07] では

$$\left(n-\frac{1}{2}\right)\min\{\alpha,\beta\}\sqrt{\frac{\alpha\beta-1}{\alpha\beta}} \leq E_{2n-1} \leq E_{2n} \leq \left(n-\frac{1}{2}\right)\max\{\alpha,\beta\}\sqrt{\frac{\alpha\beta-1}{\alpha\beta}}$$

が導かれた. これから $E$ の縮退度は $\beta < 3\alpha$ または $\alpha < 3\beta$ のとき2以下であることがわかる.

[Par04] では $\alpha\beta$ が十分に大きいとき $E$ が単純であることが示された.

[HS12] では $(\alpha,\beta) \in D_{\sqrt{2}} = \{(\alpha,\beta) | \alpha,\beta > \sqrt{2}\}$ で $E$ の縮退度は2以下で, その固有ベクトルは偶関数であることが示された. また, $(\alpha,\beta) \in D$ なるある集合 $D \subset D_{\sqrt{2}}$ で $E$ が単純であることが示された.

[Wak12] で, $\alpha \neq \beta$ のとき基底状態が全て偶関数であれば, $E$ は単純であることが示された. これから [Wak12] と [HS12] を合わせれば, $E$ が $(\alpha,\beta) \in D_{\sqrt{2}}$ で単純であることがわかる.

長い間の未解決問題である $E$ の単純性を $\alpha \neq \beta$ で示すことがこの論文の目的である.

## 2. $Q(\alpha,\beta)$ の分解

2.1. $Q(\alpha,\beta)$ **の分解.** 生成消滅作用素 $a^*, a$ で $Q$ を表すと見通しがよくなる.

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + \frac{d}{dx}), \quad a^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{d}{dx})$$

としよう. このとき $Q$ は

$$Q = A(a^*a + \frac{1}{2}) + \frac{J}{2}(aa - a^*a^*) \tag{2.1}$$

のように表せる. $\mathcal{H}_+$ (resp. $\mathcal{H}_-$) を偶関数の部分空間とする (resp. 奇関数). そして $P_+$ (resp. $P_-$) を $\mathcal{H}_+$ (resp. $\mathcal{H}_-$) への射影とする. $|n\rangle$ を $a^*a$ の $n$ 番目の固有ベクトルとする, i.e., $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^*)^n |0\rangle$. ここで $|0\rangle = \pi^{-1/4}e^{-x^2/2}$. $\mathbb{C}|n\rangle$ を $|n\rangle$ で張られる 1 次元空間とする. その結果 $L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathbb{C}|n\rangle$ が従う. よって全ヒルベルト空間は

$$\mathcal{H} \cong \left\{ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \middle| \, X, Y \in \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbb{C}|n\rangle \right\} \cong \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n, \quad \mathcal{H}_n = \begin{pmatrix} \mathbb{C}|n\rangle \\ \mathbb{C}|n\rangle \end{pmatrix}.$$

以下でこの同型対応は断りなしで使う. $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$, $a^*|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ なので, $aa : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_{n-2}$, $a^*a^* : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_{n+2}$ となる. さらに $a^*a$ は $\mathcal{H}_n$ を不変にしている. よって $Q : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_{n-2} \oplus \mathcal{H}_n \oplus \mathcal{H}_{n+2}$. これらの考察から $Q$ の不変部分空間を見つけることが出来る. $\mathbb{C}|n\rangle$ への直交射影を $|n\rangle\langle n|$ とする. そして

$$P_{\uparrow}(n) = \begin{pmatrix} |n\rangle\langle n| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P_{\downarrow}(n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & |n\rangle\langle n| \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

とする.

$$T_{+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(P_{\uparrow}(4n) + P_{\downarrow}(4n+2)), \qquad T_{+2} = \sum_{n=0}^{\infty}(P_{\downarrow}(4n) + P_{\uparrow}(4n+2)),$$
$$T_{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(P_{\uparrow}(4n+1) + P_{\downarrow}(4n+3)), \qquad T_{-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(P_{\downarrow}(4n+1) + P_{\uparrow}(4n+3)).$$

$|2n\rangle$ は偶関数, $|2n+1\rangle$ は奇関数なので $T_{+1} + T_{+2} = P_+$, $T_{-1} + T_{-2} = P_-$ となる. $\mathcal{H}_{\sigma\mathrm{p}} = \mathrm{Ran}(T_{\sigma\mathrm{p}})$ としよう. このとき $\mathcal{H}$ は

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\sigma=\pm,\mathrm{p}=1,2} \mathcal{H}_{\sigma\mathrm{p}} \tag{2.3}$$

のように分解できる.

**Lemma 2.1** ([HS13]). 作用素 $Q$ は $\mathcal{H}_{\sigma\mathrm{p}}$, $\sigma=\pm$, $\mathrm{p}=1,2$, で *reduce* される.

*Proof.* $a^2P_j(n)\supset P_j(n-2)a^2$, $a^*a^*P_j(n)\supset P_j(n+2)a^*a^*$, $a^*aP_j(n)\supset P_j(n)a^*a$, $n=0,1,2,\cdots$, $j=\uparrow,\downarrow$. がわかる. 明らかに $AP_j(n)=P_j(n)A$, $JP_\uparrow(n)=P_\downarrow(n)J$, $JP_\downarrow(n)=P_\uparrow(n)J$ となる. それで $QT_{\sigma\mathrm{p}}\supset T_{\sigma\mathrm{p}}Q$ となり, 定理が従う. □

$Q_{\sigma\mathrm{p}}=Q\lceil_{\mathcal{H}_{\sigma\mathrm{p}}}$ としよう. このとき

$$Q=\bigoplus_{\sigma=\pm,\mathrm{p}=1,2}Q_{\sigma\mathrm{p}} \tag{2.4}$$

となる.

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\uparrow$ | ■ | □ | □ | □ | ■ | □ | □ | □ | ■ | □ | □ | □ | ■ | $\cdots$ |
| $\downarrow$ | □ | □ | ■ | □ | □ | □ | ■ | □ | □ | □ | ■ | □ | □ | $\cdots$ |

FIGURE 1. ■ は $T_{+1}$ の値域

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\uparrow$ | □ | □ | ■ | □ | □ | □ | ■ | □ | □ | □ | ■ | □ | □ | $\cdots$ |
| $\downarrow$ | ■ | □ | □ | □ | ■ | □ | □ | □ | ■ | □ | □ | □ | ■ | $\cdots$ |

FIGURE 2. ■ は $T_{+2}$ の値域

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\uparrow$ | □ | ■ | □ | □ | □ | ■ | □ | □ | □ | ■ | □ | □ | □ | $\cdots$ |
| $\downarrow$ | □ | □ | □ | ■ | □ | □ | □ | ■ | □ | □ | □ | ■ | □ | $\cdots$ |

FIGURE 3. ■ は $T_{-1}$ の値域

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\uparrow$ | □ | □ | □ | ■ | □ | □ | □ | ■ | □ | □ | □ | ■ | □ | $\cdots$ |
| $\downarrow$ | □ | ■ | □ | □ | □ | ■ | □ | □ | □ | ■ | □ | □ | □ | $\cdots$ |

FIGURE 4. ■ は $T_{-2}$ の値域

### 2.2. Jacobi 行列表現.

$$U_{+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(P_\uparrow(8n)+P_\downarrow(8n+2))-\sum_{n=0}^{\infty}(P_\uparrow(8n+4)+P_\downarrow(8n+6)) \tag{2.5}$$

としよう. この作用素は $\mathcal{H}_{+1}$ 上のユニタリーで

$$\bar{Q}_{+1}=U_{+1}^{-1}Q_{+1}U_{+1}=T_{+1}\left(A(a^*a+\frac{1}{2})-\frac{\mathrm{S}}{2}(aa+a^*a^*)\right)T_{+1} \tag{2.6}$$

となる．ここで $\mathrm{S}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$．同様にユニタリー $U_{+2},U_{-1},U_{-2}$ で

$$\bar{Q}_{+2}=U_{+2}^{-1}Q_{+1}U_{+2}=T_{+2}\left(A(a^*a+\frac{1}{2})-\frac{\mathrm{S}}{2}(aa+a^*a^*)\right)T_{+2},$$
$$\bar{Q}_{-1}=U_{-1}^{-1}Q_{-1}U_{-1}=T_{-1}\left(A(a^*a+\frac{1}{2})-\frac{\mathrm{S}}{2}(aa+a^*a^*)\right)T_{-1},$$
$$\bar{Q}_{-2}=U_{-2}^{-1}Q_{-2}U_{-2}=T_{-2}\left(A(a^*a+\frac{1}{2})-\frac{\mathrm{S}}{2}(aa+a^*a^*)\right)T_{-2}$$

なるものが構成できる．数列 $a=(a_0,a_1,a_2,\cdots)$ と $b=(b_0,b_1,,b_2,\cdots)$ に対して, Jacobi 行列を次で定義する．

$$J(a,b)=\begin{pmatrix}b_0&a_0&&&0\\a_0&b_1&a_1&&\\&a_1&b_2&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&\ddots\\0&&&\ddots&\ddots\end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

この作用素は $\ell^2=\ell^2(\mathbb{N}_0)$ に作用する．ここで $\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$.

$$a_+(n)=-\sqrt{(2n+1)(2n+2)},\quad a_-(n)=-\sqrt{(2n+2)(2n+3)},\qquad n=0,1,2,\cdots$$
$$b_{+1}(n)=\begin{cases}\alpha(1+4n)&\text{for even } n\\\beta(1+4n)&\text{for odd } n,\end{cases}\qquad b_{+2}(n)=b_{+1}(n)\Big|_{(\alpha,\beta)\to(\beta,\alpha)},$$
$$b_{-1}(n)=\begin{cases}\alpha(3+4n)&\text{for even } n\\\beta(3+4n)&\text{for odd } n,\end{cases}\qquad b_{-2}(n)=b_{-1}(n)\Big|_{(\alpha,\beta)\to(\beta,\alpha)}$$

として $a_\sigma=(a_\sigma(0),a_\sigma(1),\cdots)$, $b_{\sigma\mathrm{p}}=(b_{\sigma\mathrm{p}}(0),b_{\sigma\mathrm{p}}(1)\cdots)$ とおく．Jacobi 行列 $\widehat{Q}_{\sigma\mathrm{p}}$ を

$$\widehat{Q}_{\sigma\mathrm{p}}=\frac{1}{2}J(a_\sigma,b_{\sigma\mathrm{p}}) \tag{2.8}$$

によって定義する．集合 $\left\{\begin{pmatrix}|4n\rangle\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\|4n+2\rangle\end{pmatrix},n=0,1,2,....\right\}$ は $\mathcal{H}_{+1}$ の完全正規直交系になる．$e_n=(\delta_{n,j})_{j=0}^{\infty}\in\ell^2$ は $\ell^2$ の標準的な基底．ユニタリー作用素 $Y_{+1}:\mathcal{H}_{+1}\to\ell^2$ を $Y_{+1}\begin{pmatrix}|4n\rangle\\0\end{pmatrix}=e_{2n}$, $Y_{+1}\begin{pmatrix}0\\|4n+2\rangle\end{pmatrix}=e_{2n+1}$ で定める．そうすると $\bar{Q}_{+1}$ を $\widehat{Q}_{+1}=Y_{+1}\bar{Q}_{+1}Y_{+1}^{-1}$ と思える．同様にユニタリー作用素を定義して次の Lemma をえる．

**Lemma 2.2** (Jacobi 行列表現 [HS13]). *$Q_{\sigma\mathrm{p}}$ は Jacobi 行列 $\widehat{Q}_{\sigma\mathrm{p}}$ に同値.*

$\alpha=\beta$ のとき $\widehat{Q}_{\sigma 1}=\widehat{Q}_{\sigma 2}$ になる. 具体的には $\widehat{Q}_{\sigma \mathrm{p}}$ は次のように与えられる.

$$\widehat{Q}_{+1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha & -\sqrt{1\cdot 2} & & & & & 0 \\ -\sqrt{1\cdot 2} & 5\beta & -\sqrt{3\cdot 4} & & & & \\ & -\sqrt{3\cdot 4} & 9\alpha & -\sqrt{5\cdot 6} & & & \\ & & -\sqrt{5\cdot 6} & 13\beta & -\sqrt{7\cdot 8} & & \\ & & & -\sqrt{7\cdot 8} & 17\alpha & -\sqrt{9\cdot 10} & \\ & & & & -\sqrt{9\cdot 10} & 21\beta & \ddots \\ 0 & & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$\widehat{Q}_{+2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \beta & -\sqrt{1\cdot 2} & & & & & 0 \\ -\sqrt{1\cdot 2} & 5\alpha & -\sqrt{3\cdot 4} & & & & \\ & -\sqrt{3\cdot 4} & 9\beta & -\sqrt{5\cdot 6} & & & \\ & & -\sqrt{5\cdot 6} & 13\alpha & -\sqrt{7\cdot 8} & & \\ & & & -\sqrt{7\cdot 8} & 17\beta & -\sqrt{9\cdot 10} & \\ & & & & -\sqrt{9\cdot 10} & 21\alpha & \ddots \\ 0 & & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$\widehat{Q}_{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3\alpha & -\sqrt{2\cdot 3} & & & & & 0 \\ -\sqrt{2\cdot 3} & 7\beta & -\sqrt{4\cdot 5} & & & & \\ & -\sqrt{4\cdot 5} & 11\alpha & -\sqrt{6\cdot 7} & & & \\ & & -\sqrt{6\cdot 7} & 15\beta & -\sqrt{8\cdot 9} & & \\ & & & -\sqrt{8\cdot 9} & 19\alpha & -\sqrt{10\cdot 11} & \\ & & & & -\sqrt{10\cdot 11} & 23\beta & \ddots \\ 0 & & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$\widehat{Q}_{-2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3\beta & -\sqrt{2\cdot 3} & & & & & 0 \\ -\sqrt{2\cdot 3} & 7\alpha & -\sqrt{4\cdot 5} & & & & \\ & -\sqrt{4\cdot 5} & 11\beta & -\sqrt{6\cdot 7} & & & \\ & & -\sqrt{6\cdot 7} & 15\alpha & -\sqrt{8\cdot 9} & & \\ & & & -\sqrt{8\cdot 9} & 19\beta & -\sqrt{10\cdot 11} & \\ & & & & -\sqrt{10\cdot 11} & 23\alpha & \ddots \\ 0 & & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

**Lemma 2.3.** $Q_{\sigma\mathrm{p}}$, $\sigma=\pm$, $\mathrm{p}=1,2$, の固有値は単純である.

*Proof.* $\lambda$ を $\widehat{Q}_{+1}$ の固有値で $u=(u_n)_{n=0}^{\infty}\in\ell^2$ を固有ベクトルとする. このとき漸化式

$$u_{n+1}=a_+(n)^{-1}\left((\lambda-b_{+1}(n))u_n-a_+(n-1)u_{n-1}\right),\quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.9}$$

$$u_{-1}=0 \tag{2.10}$$

が従う. $a_+(n)\neq 0$ に注意せよ. (2.9)-(2.10) の解は $u_0\in\mathbb{C}$ によって一意的に決まる. その結果 $\widehat{Q}_{+1}$ の固有値は単純である. 他の場合も同様に示せる. □

$\lambda_{\sigma\mathrm{p}}(n)=\lambda_{\sigma\mathrm{p}}(n,\alpha,\beta)$ を第 $n$ 番目の $Q_{\sigma\mathrm{p}}$ の固有値とする. このとき $\{\lambda_{\sigma\mathrm{p}}(n)\}_{n=0}^{\infty}=$ *Spec*$(Q_{\sigma\mathrm{p}})$, $\lambda_{\sigma\mathrm{p}}(n)\leq\lambda_{\sigma\mathrm{p}}(n+1)$. 次の Corollary が従う.

**Corollary 2.4.** 固有値曲線 $F\ \{(\alpha,\beta)\mapsto\lambda_{\sigma p}(n)=\lambda_{\sigma p}(n,\alpha,\beta), n=0,1,2,3,\cdots\}$ は交点を持たない. つまり任意の $(\alpha,\beta)$ と $n\neq m$ に対して, $\lambda_{\sigma p}(n,\alpha,\beta)\neq\lambda_{\sigma p}(m,\alpha,\beta)$.

## 3. 最低固有値の単純性

この論文の主定理は以下である.

**Theorem 3.1.** [HS13] $\alpha\neq\beta$ とする. このとき $Q(\alpha,\beta)$ の最低固有値は単純である.

この定理を証明するために次の Proposition を応用する.

**Proposition 3.2.** *次の (1),(2) を仮定する: (1)* $\alpha\neq\beta$*; (2)* 全ての $Q$ 基底状態が偶関数. このとき $Q(\alpha,\beta)$ の最低固有値は単純である.

*Proof.* [Wak12] をみよ. □

$Q_\sigma=Q_{\sigma 1}\oplus Q_{\sigma 2}$, $\sigma=+,-$ とする. このとき $Q$ は遇と奇に直和分解できる: $Q=Q_+\oplus Q_-$. $E_\sigma=\inf Spec(Q_\sigma)$ としよう.

**Lemma 3.3.** $u=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$ を $Q$ の固有ベクトルとする. このとき $u_j\in C^3(\mathbb{R})$.

*Proof.* 固有値方程式 $A\left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}x^2\right)u+J\left(x\frac{d}{dx}+\frac{1}{2}\right)u=\lambda u$ から

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\frac{d^4}{dx^4}u&=\left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\right)\left\{\lambda A^{-1}-\frac{x^2}{2}-A^{-1}J\left(x\frac{d}{dx}+\frac{1}{2}\right)\right\}u\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{d^2}{dx^2},\frac{x^2}{2}+A^{-1}Jx\frac{d}{dx}\right]u+\left\{\lambda A^{-1}-\frac{x^2}{2}-A^{-1}J\left(x\frac{d}{dx}+\frac{1}{2}\right)\right\}^2u\\&=\left(x\frac{d}{dx}+\frac{1}{2}\right)u+A^{-1}J\frac{d^2}{dx^2}u+\left\{\lambda A^{-1}-\frac{x^2}{2}-A^{-1}J\left(x\frac{d}{dx}+\frac{1}{2}\right)\right\}^2\end{aligned}\tag{3.1}$$

が超関数の意味でわかる. $u_j\in D(x^2)\cap D(d^2/dx^2)$ に注意する. $x^2u_j, d^2u_j/dx^2\in L^2(\mathbb{R})$ なので, $u_j\in W^{4,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ が (3.1) からわかる. ソボレフの埋蔵定理から $u_1,u_2\in C^3(\mathbb{R})$ が従う. □

**Lemma 3.4.** $E_+\leq E_-$ が従う.

*Proof.* $\Phi_- = \begin{pmatrix}\Phi_{-1}\\ \Phi_{-2}\end{pmatrix}$ を規格化された $Q_-$ の基底状態とする. $\Phi_{-j}$, $j=1,2$, は奇関数である. 偶関数 $\widetilde{\Phi}_- \in \mathcal{H}_+$ を

$$\widetilde{\Phi}_- = \begin{pmatrix}\widetilde{\Phi}_{-1}\\ \widetilde{\Phi}_{-2}\end{pmatrix}, \quad \widetilde{\Phi}_{-j}(x) = \begin{cases}\Phi_{-j}(x), & \text{if } x \geq 0,\\ -\Phi_{-j}(x), & \text{if } x < 0.\end{cases}$$

で定義する. $\widetilde{\Phi}_{-j} \in D(-d^2/dx^2)$ と

$$\|(d/dx)\widetilde{\Phi}_{-j}\|^2 = \|(d/dx)\Phi_{-j}\|^2, \quad \left(\widetilde{\Phi}_{-j'}, x\frac{d}{dx}\widetilde{\Phi}_{-j}\right) = \left(\widetilde{\Phi}_{-j'}, x\frac{d}{dx}\widetilde{\Phi}_{-j}\right), \quad j', j = 1, 2$$

に注意する. そうすると

$$E_+ \leq \left(\widetilde{\Phi}_-, Q\widetilde{\Phi}_-\right) = (\Phi_-, Q\Phi_-) = E_-. \tag{3.2}$$

故に $E_+ \leq E_-$. □

**Lemma 3.5.** $E_+ < E_-$ が従う.

*Proof.* $E_+ = E_-$ と仮定する. このとき (3.2) から $E_+ = \left(\widetilde{\Phi}_-, Q\widetilde{\Phi}_-\right)$. これは $\widetilde{\Phi}_-$ が $Q_+$ の基底状態であることに他ならない. 一方 $\widetilde{\Phi}_-$ は $Q$ の固有ベクトルでその固有値は $E_+$. よって $\widetilde{\Phi}_{-j} \in C^3(\mathbb{R})$. $\widetilde{\Phi}$ を規格化して $\|\widetilde{\Phi}\| = 1$ とする. $\Phi_{-j}$ が奇であるから (resp. $\widetilde{\Phi}_{-j}$ は遇), 次が従う. $\Phi_-(0) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \widetilde{\Phi}_-(0)$ (resp. $\frac{d}{dx}\widetilde{\Phi}_{-j}(0) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$). ゆえに $\widetilde{\Phi}_{-j}$ は常微分方程式

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix}\widetilde{\Phi}_{-1}\\ \widetilde{\Phi}_{-2}\\ \widetilde{\Phi}'_{-1}\\ \widetilde{\Phi}'_{-2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ x^2 + \frac{2E_+}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha} & 0 & -\frac{2x}{\alpha}\\ \frac{1}{\beta} & x^2 - \frac{2E_+}{\beta} & \frac{2x}{\beta} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{\Phi}_{-1}\\ \widetilde{\Phi}_{-2}\\ \widetilde{\Phi}'_{-1}\\ \widetilde{\Phi}'_{-2}\end{pmatrix} \tag{3.3}$$

$$\begin{pmatrix}\widetilde{\Phi}_{-1}(0)\\ \widetilde{\Phi}_{-2}(0)\\ \widetilde{\Phi}'_{-1}(0)\\ \widetilde{\Phi}'_{-2}(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \tag{3.4}$$

に従う. (3.3) の右辺は $(\widetilde{\Phi}_{-1}, \widetilde{\Phi}_{-2}, \widetilde{\Phi}'_{-1}, \widetilde{\Phi}'_{-2}, x)$ についてなめらかなので微分方程式 (3.3) は一意的な解 $\begin{pmatrix}\widetilde{\Phi}_{-1}(x)\\ \widetilde{\Phi}_{-2}(x)\\ \widetilde{\Phi}'_{-1}(x)\\ \widetilde{\Phi}'_{-2}(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ をもつ. これは $\|\widetilde{\Phi}_-\| = 1$ に矛盾する. よって $E_+ < E_-$. □

*Theorem 3.1* の証明. $\alpha \neq \beta$ とする. Proposition 3.2 によって $\ker(Q-E) \subset \mathcal{H}_+$ を示せば十分. Lemma 3.4 から, $E_+ < E_-$. よって基底状態は遇関数になる. よって定理が従う. □

## REFERENCES


[HH12] M. Hirokawa and F. Hiroshima, Absence of energy level crossing for the ground state energy of the Rabi model, arXiv:1207.4020, preprint, 2012.

[HS12] F. Hiroshima and I. Sasaki, Multiplicity of the lowest eigenvalue of non-commutative harmonic oscillators, *Kyushu J. Math.* **67** (2013), 355–366.

[HS13] F. Hiroshima and I. Sasaki, Spectral analysis of non-commutative harmonic oscillators: the lowest eigenvalue and crossing, to appear in JMAA.

[IW07] T. Ichinose and M. Wakayama, On the spectral zeta function for the non-commutative harmonic oscillator, *Rep. Math. Phys.*, **59** (2007), 421–432.

[NNW02] K. Nagatou, M. T. Nakao and M. Wakayama, Verified numerical computations for eigenvalues of non-commutative harmonic oscillators, *Num. Funct. Anal. and Opt.* , **23** (2002), 633-650,

[Och01] H. Ochiai, Non-commutative harmonic oscillators and Fuchsian ordinary differential operators, *Commun. Math. Phys.*, **217** (2001), 357–373,

[Par04] A. Parmeggiani, On the spectrum and the lowest eigenvalue of certain non-commutative harmonic oscillators, *Kyushu J. Math.*, **58** (2004), 277–322.

[Par10] A. Parmeggiani, Spectral theory of non-commutative harmonic oscillators: an introduction, *Lecture Notes in Mathematics*, **1992** Springer-Verlag, 2010.

[PW01] A. Parmeggiani and M. Wakayama, Oscillator representations and systems of ordinary differential equations, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **98** (2001), 26–30.

[PW02] A. Parmeggiani and M. Wakayama, Non-commutative harmonic oscillator I, *Form Math.*, **14** (2002), 539–604.

[PW03] A. Parmeggiani and M. Wakayama, Non-commutative harmonic oscillator II, *Form Math.*, **15** (2003), 669–690.

[Tan09] S. Taniguchi, A Wiener integral approach to non-commuttive harmonic oscillators, *Kyushu J. Math.* **63** (2009), 347–352.

[Wak12] M. Wakayama, Simplicity of the lowest eigenvalue of non-commutative harmonic oscillators and the Riemann scheme of a certain Heun's differential equation, preprint, 2013.