数理解析研究所講究録
第1915巻 2014年 158-160

単射であるセルラーオートマトンの性質について

東洋大学　総合情報学部

佐藤　忠一

Tadakazu Sato
Department of Information Science and Arts
Toyo University

1．まえがき

同一の有限オートマトンを一次元（直線上）に並べたネットワーク系を一次元セルラーオートマトンという。各オートマトンは自分の近傍（周辺）のオートマトンの状態を見て同一の局所関数で一斉に変換する。この変換は並列写像と呼ばれ、各オートマトンの状態分布を新しい状態分布に変換する。この並列写像は「単射であれば逆変換が存在する」というセルラーオートマトン特有の性質をもつ。したがって、並列写像は「単射ならば全射である」。また、並列写像が単射となる局所関数の数は非常に少ないことが知られている。
本報告書では局所関数からド・ブルーチングラフを作り、その状態遷移行列の代数的性質すなわち、固有値、行固有ベクトル、列固有ベクトル、トレース、ランクなどを調べることにより、並列写像が単射となる条件を与える。

2．諸定義と基本的性質

一次元セルラーオートマトンCAとは　$CA=<Z,Q,N,f>$の四組で与えられる。
ここで、Zは整数の集合で各オートマトンが配置されている位置の集合表わす。
Qは各オートマトンが取る状態の有限集合、NはZの有限部分集合で近傍と呼ばれる。

写像　$f: Q^{|N|} \to Q$　は　$Q=\{a_1,\cdots,a_m\}$,　$|N|=n$　のとき　m状態、スコープ幅nの局所関数という。$c:Z \to Q$なる写像cを様相といい、各オートマトンの状態の分布を表わす。この様相に局所関数fで一斉に変換すると新しい様相c'は

$$c'(i) = f(c(i), c(i+1), \cdots, c(i+|N|-1)) \quad \text{for all} \quad i \in Z$$

で与えられる。$c \to c'$ なる対応を $f_\infty(c) = c'$ と書く。 $C(Q)$ で様相の集合を表すとシフト写像 $\sigma : C(Q) \to C(Q)$ は $\sigma(c)(i) = c(i+1)$ で定義される。$k \in Z$ に対して、写像 $\sigma^k f_\infty : C(Q) \to C(Q)$ を並列写像という。シフト写像は全単射で f_∞ と可換なので

$$\sigma^k f_\infty \text{ が単射} \Leftrightarrow f_\infty \text{ が単射} \Leftrightarrow {}^\exists \ell \in Z,\ {}^\exists g,\ f_\infty g_\infty \sigma^\ell = I$$

が成立する。ここで、I は恒等写像。局所関数 f と g のスコープ幅は一般には異なる。

3. 局所関数の行列表示

m 状態スコープ幅 n の局所関数 $f : Q^n \to Q$ からド・ブルーチングラフを次のように作る。グラフのノードの集合は Q^{n-1}。ノード $x_1 \cdots, x_{n-1}$ からノード $x_2 \cdots, x_n$ のエッジには $f(x_1 \cdots, x_n)$ の値を付ける有向グラフである。このグラフの状態遷移行列を $A(f)$ で表す。この行列のサイズは $m^{n-1} \times m^{n-1}$。Q の元の連接を乗法とすると Q^* は単位元 1 (null word) をもつモノイドである。モノイドに加法 (or) を入れ、加法,乗法に分配の法則を用いて Q^* から記号列上の非可換環 $R(Q)$ が自然に定義される。$A(f)$ は $R(Q)$ 上の行列である。

定義　m 状態スコープ幅 n の局所関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に対して f は x_j で置換的であるとは x_j 以外の変数を固定して x_j のみの関数とみなしたとき f は単射となる。

性質　$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を m 状態スコープ幅 n の局所関数。$\lambda_m = (a_1 + \cdots + a_m)$ とする。

f は x_1 で置換的 $\Leftrightarrow$ $A(f)$ の異なる行には異なる状態（Q の元）
$\Leftrightarrow$ $A(f)$ の各行の状態の和は λ_m
$\Leftrightarrow$ $(1, \cdots, 1)$ は固有値 λ_m の行固有ベクトル

f は x_n で置換的 $\Leftrightarrow$ $A(f)$ の異なる列には異なる状態（Q の元）
$\Leftrightarrow$ $A(f)$ の各列の状態の和は λ_m
$\Leftrightarrow$ ${}^t(1, \cdots, 1)$ は固有値 λ_m の列固有ベクトル

定理　f を m 状態、スコープ幅 n の局所関数とする。$\lambda_m=(a_1+\cdots+a_m)$ とおくとき次の命題はすべて等価である。

（1）f_∞ は単射である。

（2）$A(f)$ は唯一の非零の固有値　λ_m を持つ。

（3）$trA(f)^s=\lambda_m{}^s$ for all $s\geq 1$

（4）$rankA(f)^n=1$ となる最小の正の整数を k とすると $A(f)^k=v{}^tu$,

ここで v と ${}^tu$ はそれぞれ $A(f)$ の固有値 λ_m の列固有ベクトルと

行固有ベクトルである。又それらの内積は ${}^tuv=\lambda_m{}^k$

注意　上記の定理は局所関数のスコープ幅　n には無関係で状態数　m だけで決まる。

系１　$rankA(f)^n=1$ となる最小の正の整数を k とすると非負の整数　s　に対して次の各命題が成立する。

（1）$A(f)^{k+s}=v(\lambda_m{}^s){}^tu$　for　all　s ≧ 0

（2）f は x_1 で置換的なら　$A(f)^{k+s}=vu{}^t\lambda_m{}^s=A(f)^k\lambda_m{}^s$

（3）f は x_n で置換的なら　$A(f)^{k+s}=\lambda_m{}^s v{}^tu=\lambda_m{}^s A(f)^k$

系２　定理の（３）より、並列写像は単射なら全射である。

系３　上の定理より並列写像の単射性を判定する手順が与えられる。
$rankA(f)^n=1$ となる最小の正の整数を k とすると
$$trA(f)^s=\lambda^s \quad \text{for all s} \quad (1\leq s\leq k\leq m^{n-1}-1)$$
が成立することが単射になる必要十分条件である。

４．参考文献

佐藤、「単射である一次元セルラーオートマトンの標準形」, RIMS 1712, 136～139, 2010