数理解析研究所講究録
第 1916 巻 2014 年 70-84

不定値計量空間の双対幾何
(A dual geometry on indefinite inner product spaces)

芝浦工業大学　システム理工学部　鈴木 達夫 (Tatsuo Suzuki)*
Shibaura Institute of Technology

御殿場基礎科学研究会　吉澤 真太郎 (Shintaro Yoshizawa)†
Gotemba Theoretical Science Research

1　背景と目的

多変量解析の分野などでは長方形行列を変数とする統計モデルなどが検討されている [F]. 行列変数の力学系, 双対理論も研究されている ([Y] の参考文献). また, X を $m\times n$ の複素行列とすると, 関数

$$f(X)=-\log\det(I_n+X^{*}X) \tag{1.1}$$

はグラスマン多様体 $U(m+n)/U(m)\otimes U(n)$ 上のケーラーポテンシャルである.

そこで, 本報告では不定値対称行列 $J_r=\mathrm{diag}(-1,\cdots,-1,1,\cdots,1)$ (-1 が r 個) および 長方形行列のダブル変数 (V,W) を用いたポテンシャル関数

$$f(V,W):=-\log\det(J_r+WV^T),\quad V,W\in\mathbf{R}^{(n+1)\times m} \tag{1.2}$$

に対する実カテゴリーでの双対理論の構築を試みた.

* *E-mail address*: suzukita@shibaura-it.ac.jp
† *E-mail address*: yzw2003@mail.goo.ne.jp

Remark 1. V, W が列ベクトル $(m=1)$ のとき,

$$\begin{aligned}\det(J_r + WV^T) &= (-1)^r \det(I + J_r WV^T) = (-1)^r(1 + V^T J_r W) \\ &= (-1)^r(1 + \langle V, W\rangle_r),\end{aligned} \tag{1.3}$$

$\langle V, W\rangle_r$: 不定値内積, *i.e.*, $\langle V, W\rangle_r = V^T J_r W = -\sum_{i=0}^{r-1} v_i w_i + \sum_{i=r}^{n} v_i w_i.$

本研究テーマは発展途上でありますが, 研究会「統計多様体の幾何学の新展開」にて講演の機会を与えてくださった研究代表者, 松添博先生及び関係機関の方々に厚く御礼申し上げます.

2 双対幾何の例

双対幾何での典型例である四元数ガウス分布とその実形を quasi-determinant (準行列式) の観点から紹介し, 双対理論を振り返る. 四元数ガウス分布に関しては [L], [VRS] などの先行研究がある. quasi-determinant については [GGRW], [Su], [玉手箱] を参照.

2.1 Study 行列式

四元数や行列代数など多元環の元を成分とする行列には目的に応じて様々な行列式が定義されており, それらを総称して非可換行列式と呼ぶ. ここでは四元数行列式 ([As]) の中の一つとして Study 行列式を用いる.

四元数の集合を $\mathbf{H}$ とする. $a, b, c, d \in \mathbf{H}$ に対し, Study 行列式は次のように定義される ;

$$\mathrm{Sdet}(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = |a|^2|d|^2 + |b|^2|c|^2 - a\bar{c}d\bar{b} - b\bar{d}c\bar{a}. \tag{2.1}$$

$K = \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}$ とし, K 成分の N 次正方行列の集合を $K^{N\times N}$ と表す. $H \in \mathbf{H}^{N\times N}$ に対しては, $H = A + Bj, \quad A, B \in \mathbf{C}^{N\times N}$ と分解して,

$$\mathrm{Sdet}(H) = \det\begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

と定義される.

Remark 2. 非可換行列式を統一的に扱う概念として，*I.M. Gelfand and V.S. Retakh(1991)[GR]* によって定義された *quasi-determinant* (準行列式) が有効であり，非可換可積分系や表現論などの分野で用いられている．(例えば [GKLLRT], [GN])

quasi-determinant は行列式の比の非可換化であり，*Schur complement* の一般化でもある．例えば

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

の $(2,2)$-*quasi-determinant* とは

$$|A|_{22} = a_{22} - a_{21}a_{11}^{-1}a_{12}. \tag{2.4}$$

一般に n 次正方行列 $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ に対する (i,j)-quasi-determinant は formal には次のように定義される；

$$A^{-1} = (|A|_{ji}^{-1})_{1\le i,j\le n} \tag{2.5}$$

これを用いると，Study 行列式は首座準小行列式の絶対値の積 (の２乗) に表せる．例えば，$a \neq 0$ の場合，

$$\mathrm{Sdet}(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = |a|^2|d - ca^{-1}b|^2 \tag{2.6}$$

一般の四元数正方行列 $H = A + Bj,\quad A, B \in \mathbf{C}^{N\times N}$ に対する Study 行列式も $|A| \neq 0$ のとき

$$\mathrm{Sdet}(H) = \det\begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix} = |A||\bar{A} + \bar{B}A^{-1}B| \tag{2.7}$$

と表される．

さて，

$$A = A_1 + iA_2,\ B = B_1 + iB_2,\quad A, B \in \mathbf{C}^{N\times N},\quad A_j, B_j \in \mathbf{R}^{N\times N}$$

と分解する．特に，$H = A + Bj \in \mathrm{Herm}(N, \mathbf{H})_+$ (正値四元数エルミート行列) のとき $\det\begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}$ は正の実数で次の関係がある．

$$\mathrm{Sdet}(H) = \det\begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix} = \left\{\det\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & -A_2 & -B_2 \\ -B_1 & A_1 & -B_2 & A_2 \\ A_2 & B_2 & A_1 & B_1 \\ B_2 & -A_2 & -B_1 & A_1 \end{pmatrix}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

これより成分の次数を考慮して，$H \in \mathrm{Herm}(N, \mathbf{H})_+$ に対し，

$$\det H = (\mathrm{Sdet}(H))^{1/2} \tag{2.8}$$

と定義する．

Remark 3.

$$\begin{aligned} H \text{ が四元数エルミート} &\Leftrightarrow A : \text{エルミート},\ B : \text{交代} \\ &\Leftrightarrow A_1 : \text{対称},\ A_2, B_1, B_2 : \text{交代} \\ &\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ -B_1 & A_1 \end{pmatrix} : \text{対称},\ Y = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ B_2 & -A_2 \end{pmatrix} : \text{交代} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} : \text{実対称} \end{aligned}$$

2.2 実ガウス分布と四元数ガウス分布

実ガウス分布の確率密度関数は，$(\mu, \Sigma) \in \mathbf{R}^N \times \mathrm{Sym}(N, \mathbf{R})_+$ に対し，

$$p_{\mathbf{R}}(x; \mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}(\det \Sigma)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\right\} \quad (2.9)$$

であった．これに対し，四元数ガウス分布の確率密度関数は，$(\mu, \Sigma) \in \mathbf{H}^N \times \mathrm{Herm}(N, \mathbf{H})_+$ に対し，

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{H}}(x; \mu, \Sigma) &= \frac{1}{(2\pi)^{2N}(\det \Sigma)^2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\bar{x}-\bar{\mu})^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\right\} \quad (2.10) \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\bar{x}^T \Sigma^{-1} x + \frac{1}{2}\bar{x}^T \Sigma^{-1}\mu + \frac{1}{2}\bar{\mu}^T \Sigma^{-1} x \right. \\ &\qquad \left. - \left(\frac{1}{2}\bar{\mu}^T \Sigma^{-1}\mu + \log((\det \Sigma)^2) + 2N \log 2\pi\right)\right\} \quad (2.11) \end{aligned}$$

ここで，$\det \Sigma := (\mathrm{Sdet}\Sigma)^{\frac{1}{2}}, \qquad \Sigma \in \mathrm{Herm}(N, \mathbf{H})_+$

と定義される．

2.3 主ポテンシャル関数

Yoshizawa-Tanabe [Y-T] に従い，次の主変数（正準変数）を定義する：

$$\theta_{\mathbf{H}} := \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^{-1}\mu, \quad \Theta_{\mathbf{H}} := \Sigma^{-1} \quad (2.12)$$

このとき，

$$\frac{1}{2}\bar{\mu}^T \Sigma^{-1}\mu + \log((\det \Sigma)^2) = \bar{\theta}_{\mathbf{H}}^T \Theta_{\mathbf{H}}^{-1} \theta_{\mathbf{H}} - \log((\det \Theta_{\mathbf{H}})^2) \quad (2.13)$$

となることに注意する．主ポテンシャル関数は主変数に関して凸となる．

ここまで四元数に注目してきたが，実数，複素数，及び四元数のカテゴリーでのガウス積分を見比べることによって，以下のような統一的な表記ができることがわかる．[SY]

$K = \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}, \quad d = \dim_{\mathbf{R}} K = 1, 2, 4$ とする．主ポテンシャル関数を

$$\varphi_K(\theta_K, \Theta_K) := \bar{\theta}_K^T \Theta_K^{-1} \theta_K - \log((\det \Theta_K)^{d/2}) + 2N \log 2\pi \tag{2.14}$$

と定義する．

2.4 双対ポテンシャル関数

双対変数を

$$\bar{\eta}_K^T := \bar{\theta}_K^T \Theta_K^{-1}, \quad H_K = \bar{H}_K^T := -(\Theta_K^{-1} \theta_K \bar{\theta}_K^T \Theta_K^{-1} + \frac{d}{2} \Theta_K^{-1}) \tag{2.15}$$

と定義する．さらに非退化二次形式を

$$< (\theta_K, \Theta_K), \ (\eta_K, H_K) >:= 2\mathrm{Re}(\bar{\eta}_K^T \theta_K) + \mathrm{Retr}(H_K \Theta_K) \tag{2.16}$$

とし，φ_K の Legendre 双対である，双対ポテンシャル関数を次のように定義する：

$$\begin{aligned} \varphi_K^*(\eta_K, H_K) &:= < (\theta_K, \Theta_K), \ (\eta_K, H_K) > - \varphi_K & (2.17) \\ &= -\frac{d}{2} \log(\det\{-(H_K + \eta_K \bar{\eta}_K^T)\}) - \frac{dN}{2} \log\left(\frac{4}{d} \pi e\right) & (2.18) \end{aligned}$$

2.5 ガウス分布から決まるダイバージェンス

ダイバージェンスは次のように定義される：

$$D_K(p||q) := \varphi_K(\theta_K^{(p)}, \Theta_K^{(p)}) + \varphi_K^*(\eta_K^{(q)}, H_K^{(q)}) - < (\theta_K^{(p)}, \Theta_K^{(p)}),\ (\eta_K^{(q)}, H_K^{(q)}) > \tag{2.19}$$

ここで $K = \mathbf{H}$ のとき $d = \dim_{\mathbf{R}} \mathbf{H} = 4$ として，四元数ガウス分布 $p = (\hat{\mu}, \hat{\Sigma})$ と $q = (\mu, \Sigma) \in \mathbf{H}^N \times \mathrm{Herm}(N, \mathbf{H})_+$ のダイバージェンスは次で与えられる：

$$D_{\mathbf{H}}(p||q) = \frac{1}{2}\left\{ d \cdot \log\left(\frac{\det \hat{\Sigma}}{\det \Sigma}\right) + \mathrm{Retr}(\hat{\Sigma}^{-1}(d \cdot \Sigma + (\mu - \hat{\mu})(\bar{\mu} - \bar{\hat{\mu}})^T)) - dN \right\}. \tag{2.20}$$

Remark 4. *(2.20)* の d を 1 とすると実 N 変数ガウス分布に対するダイバージェンスが得られる．従って，実 $4N$ 変数ガウス分布の場合，$p = (\hat{\mu}, \hat{\Sigma})$，$q = (\mu, \Sigma) \in \mathbf{R}^{4N} \times Sym(4N, \mathbf{R})_+$ に対し，

$$D_{\mathbf{R}}(p||q) = \frac{1}{2}\left\{ \log\left(\frac{\det \hat{\Sigma}}{\det \Sigma}\right) + tr(\hat{\Sigma}^{-1}(\Sigma + (\mu - \hat{\mu})(\mu - \hat{\mu})^T)) - 4N \right\} \tag{2.21}$$

と比較することにより，

$$\{\text{四元数 } N \text{ 次正方行列}\} \quad \subset \quad \{\text{実 } 4N \text{ 次正方行列}\} \tag{2.22}$$

という部分空間への制限がダイバージェンスの表示 *(2.20)* に反映されていると考えられる．

3 準備：vec-作用素とテンソル積

さて，行列変数のポテンシャルの計算に向けて，線形代数の準備をする [HJ].

$X \in \mathbf{R}^{m\times n}$ に対して，vec-作用素 vec(X) を次のように定義する：

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{に対し，} \quad \mathrm{vec}(X) = \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{m1} \\ \vdots \\ x_{1n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{mn\times 1} \tag{3.1}$$

Proposition 1.

$$vec(X^T) = P(m,n)vec(X) \qquad \forall X \in \mathbf{R}^{m\times n} \tag{3.2}$$

ここで，$P(m,n)$ は ***vec-permutation* 行列**と呼ばれる mn 次正方行列で，次で定義される：

$$P(m,n) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} E_{ij} \otimes E_{ij}^T, \qquad E_{ij} \text{ は } m \text{ 行 } n \text{ 列の行列単位} \tag{3.3}$$

例えば，

$$P(3,2) = E_{11}\otimes E_{11}^T + E_{12}\otimes E_{12}^T + E_{21}\otimes E_{21}^T + E_{22}\otimes E_{22}^T + E_{31}\otimes E_{31}^T + E_{32}\otimes E_{32}^T \tag{3.4}$$

$$= \begin{pmatrix} E_{11}^T & E_{12}^T \\ E_{21}^T & E_{22}^T \\ E_{31}^T & E_{32}^T \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{3.6}$$

vec-permutation 行列は次のような性質を持つ.

$$P(m,1)=I_m,\quad P(1,n)=I_n,\quad P(m,n)=P(n,m)^T=P(n,m)^{-1} \tag{3.7}$$

Hesse 行列を抜き出すために, 以下の公式を用いる :

Proposition 2. 一般に, $A\in\mathbf{R}^{m\times n}$, $B\in\mathbf{R}^{p\times q}$ に対し, 次が成り立つ.

$$B\otimes A=P(p,m)[A\otimes B]P(n,q) \tag{3.8}$$

特に $p=q=k$, $m=n$ として,

$$B\otimes A=P(k,n)[A\otimes B]P(n,k),\quad A\in\mathbf{R}^{n\times n},\ B\in\mathbf{R}^{k\times k} \tag{3.9}$$

さらに

$$tr\ (AXBY^T)=vec^T(Y)[B^T\otimes A]vec(X) \tag{3.10}$$

が成り立つ.

4 主ポテンシャルとその Hessian

$\mathbf{R}^{(n+1)\times m}\times\mathbf{R}^{(n+1)\times m}$ の開部分多様体

$$M:=\{(V,W)\in\mathbf{R}^{(n+1)\times m}\times\mathbf{R}^{(n+1)\times m}|\ \det(J_r+WV^T)>0\} \tag{4.1}$$

を考え, M 上の関数

$$f(V,W):=-\log\det(J_r+WV^T)=-\mathrm{tr}\ \log(J_r+WV^T) \tag{4.2}$$

の 2 階微分を計算する.

M 内の曲線 $(V,W)=(V(t),W(t))$ に対し,

$$\frac{df}{dt}=-\mathrm{tr}\ \left((J_r+WV^T)^{-1}(\frac{dW}{dt}V^T+W\frac{dV^T}{dt})\right) \tag{4.3}$$

ここで $A\equiv J_r+WV^T$ とおく. このとき, 接ベクトル $(X,Y)\in T_{(V,W)}M$ に対し 1 階微分は

$$\frac{df}{dt}(X,Y)=-\mathrm{tr}\ \left[A^{-1}(YV^T+WX^T)\right]=-\mathrm{tr}\ \left[YV^TA^{-1}+A^{-1}WX^T\right] \tag{4.4}$$

同様にして２階微分を計算すると，$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2) \in T_{(V,W)}M$ に対し

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2 f}{dt^2}(X_1, Y_1; X_2, Y_2) \\
&= \operatorname{tr}\left[A^{-1}(Y_1 V^T + W X_1^T) A^{-1}(Y_2 V^T + W X_2^T)\right] + \operatorname{tr}\left[A^{-1}(Y_1 X_2^T + Y_2 X_1^T)\right] \quad (4.5) \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{vec}^T(X_2) & \mathrm{vec}^T(Y_2) \end{pmatrix} \times \\
&\begin{pmatrix} P(m, n+1)[(A^{-1}W) \otimes (A^{-1}W)^T] & (I + V^T A^{-1} W)^T \otimes A^{-1} \\ (I + V^T A^{-1} W) \otimes (A^{-1})^T & P(m, n+1)[(V^T A^{-1})^T \otimes (V^T A^{-1})] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{vec}(X_1) \\ \mathrm{vec}(Y_1) \end{pmatrix} \quad (4.6)
\end{aligned}$$

Theorem 3. 上記の $2m(n+1)$ 次の *Hesse* 行列が正定値であるための必要十分条件は，

$$(i) \quad P(m, n+1)[(A^{-1}W) \otimes (A^{-1}W)^T] > 0, \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}(ii) \quad & P(m, n+1)\{[(V^T A^{-1})^T \otimes (V^T A^{-1})] \\ & -[(A^{-1})^T \otimes (I + V^T A^{-1} W)][(A^{-1}W)^T \otimes (A^{-1}W)]^{-1}[(I + V^T A^{-1} W)^T \otimes A^{-1}]\} > 0\end{aligned} \tag{4.8}$$

5 双対ポテンシャル関数

(4.4) より双対変数 (P, Q) を

$$P := -A^{-1}W,\ Q^T := -V^T A^{-1} \quad \text{つまり} \quad P := -A^{-1}W,\ Q := -(A^T)^{-1}V \tag{5.1}$$

と定義する．

以後，簡単のため $m = 1$ とする．すなわち

$$V = (v_0, v_1, \cdots, v_n)^T,\ W = (w_0, w_1, \cdots, w_n)^T.$$

このとき，$V^T J_r W =: \langle V, W \rangle_r$ （符号が r の不定値内積）となるので，$A = J_r + WV^T$ の行列式 $|A|$ は，ある種の双対性

$$\det(I + XY^T) = \det(I + Y^T X) \tag{5.2}$$

と $|J_r| = (-1)^r$ に注意して,

$$|A| = (-1)^r(1 + (V^T J_r W)) = (-1)^r(1 + \langle V, W\rangle_r), \tag{5.3}$$

さらに A の余因子行列 $\tilde{A} = |A|A^{-1}$ は

$$\tilde{A} = (-1)^r[J_r + \{(V^T J_r W)J_r - (J_r W)(J_r V)^T\}] \tag{5.4}$$

で与えられる．さらに

$$\{(V^T J_r W)J_r - (J_r W)(J_r V)^T\}W = O \tag{5.5}$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned} P &= -A^{-1}W = -\frac{1}{|A|}\tilde{A}W = (-1)^{r+1}\frac{1}{|A|}J_r W && (5.6)\\ &= \frac{(-1)^{r+1}}{(-1)^r(1+\langle v, w\rangle_r)}(-w_0, -w_1, \cdots, -w_{r-1}, w_r, \cdots, w_n)^T && (5.7)\\ &= \left(-\frac{\partial}{\partial v_i}\log((-1)^r(1+\langle V, W\rangle_r))\right)_{i=0,1,\cdots,n}. && (5.8) \end{aligned}$$

Q の方も同様に

$$\begin{aligned} Q &= (-1)^{r+1}\frac{1}{|A|}J_r V && (5.9)\\ &= \left(-\frac{\partial}{\partial w_i}\log((-1)^r(1+\langle V, W\rangle_r))\right)_{i=0,1,\cdots,n} && (5.10) \end{aligned}$$

が成り立つ．これにより，$\{P, Q\}$ は，アファイン座標系 $\{V, W\}$ の双対アファイン座標系とみなせる．

さて，$P = -A^{-1}W$, $Q^T = -V^T A^{-1}$ に対し,

$$|A| = (-1)^r(1 + \langle V, W\rangle_r) \tag{5.11}$$

及び

$$\langle P, Q\rangle_r = \frac{1}{|A|^2}\langle V, W\rangle_r \tag{5.12}$$

$$\Rightarrow \quad |A| = \frac{(-1)^r \pm \sqrt{1 - 4\langle P, Q\rangle_r}}{2\langle P, Q\rangle_r} \tag{5.13}$$

ここでは r が奇数のときを考える．$|A|>0$ の条件から，双対変数 (P,Q) の範囲と $|A|$ のプラスマイナスの符号を次のようにとる．

$$\langle P,Q\rangle_r<0, \quad |A|=\frac{-1-\sqrt{1-4\langle P,Q\rangle_r}}{2\langle P,Q\rangle_r} \tag{5.14}$$

さらに非退化二次形式を

$$\langle (V,W),(P,Q)\rangle := \mathrm{tr}\ \left[WQ^T+PV^T\right] \tag{5.15}$$

とおき，双対ポテンシャル関数を次のように定義する：

$$\begin{aligned} f^*(P,Q) &:= \langle (V,W),(P,Q)\rangle - f \\ &= -1-\sqrt{1-4\langle P,Q\rangle_r}+\log\frac{-1-\sqrt{1-4\langle P,Q\rangle_r}}{2\langle P,Q\rangle_r} \end{aligned} \tag{5.16}$$

6 ダイバージェンス

ダイバージェンスは次のように定義される：

$$D(V_1,W_1||P_2,Q_2) := f(V_1,W_1)+f^*(P_2,Q_2)-\langle (V_1,W_1),(P_2,Q_2)\rangle \tag{6.1}$$

$$= \frac{\langle V_1,W_2\rangle_r+\langle V_2,W_1\rangle_r-2\langle V_2,W_2\rangle_r}{1+\langle V_2,W_2\rangle_r}-\log\frac{1+\langle V_1,W_1\rangle_r}{1+\langle V_2,W_2\rangle_r} \tag{6.2}$$

$$= \frac{x_{12}+x_{21}-2x_{22}}{1+x_{22}}-\log\frac{1+x_{11}}{1+x_{22}} \tag{6.3}$$

ここで $x_{ij}:=\langle V_i,W_j\rangle_r$ とおいた．

7 Legendre 変換と擬球

$r = 1$, $V = W \in \mathbf{R}^{(n+1)\times 1}$, $A^T = (J_r + VV^T)^T = A$, $P = Q = -A^{-1}V$ とする．$(\mathbf{R}^{(n+1)\times 1}, \langle\ ,\ \rangle_1)$ をミンコフスキー空間 $\mathbf{R}_1^{n+1}$ と考え，パラメータ $\alpha > 0$ を導入して次のポテンシャル関数を考える：

$$f_\alpha(V) := -\log\det(J_1 + \alpha VV^T) = -\log\{-(1 + \alpha\langle V, V\rangle_1)\} \tag{7.1}$$

変数 V と双対変数 P の関係は，

$$\langle P, P\rangle_1 = \frac{4\alpha^2\langle V, V\rangle_1}{(1 + \alpha\langle V, V\rangle_1)^2} \tag{7.2}$$

$\langle V, V\rangle_1$ と $\langle P, P\rangle_1$ の対応は一般の点では一対一ではないが，"極大点"で一対一となり，$\alpha = \dfrac{1}{c^2}$ とおくと，pseudo-sphere (de Sitter space)

$$S_1^n(c^2) = \{V \in \mathbf{R}_1^{n+1} |\ \langle V, V\rangle_1 = c^2\}$$

と

$$S_1^n\left(\frac{1}{c^2}\right) = \left\{P \in (\mathbf{R}_1^{n+1})^* |\ \langle P, P\rangle_1 = \frac{1}{c^2}\right\}$$

が対応する．

8 まとめと展望

- ガウス分布の双対幾何を実数，複素数，および四元数のカテゴリーで比較したこれまでの結果を紹介した．これらの結果と対応するパラメータ空間の幾何との関係を理解することは今後の課題である．

- 不定値対称行列，および長方形行列のダブル変数 (V, W) を用いたポテンシャル関数に対する実カテゴリーでの双対理論の構築を試みた．今後はこの応用を考察していく．

参考文献

[AN] 甘利俊一，長岡浩司，情報幾何の方法, 岩波講座応用数学 12(1993).

[As] H. Aslaksen, *Quaternionic Determinants*, The Mathematical Intelligencer 18, (1996) 57-65.

[F] Roger H. Farrell, *Multivariate Calculation*, Springer-Verlag, 1984.

[GR] I. Gelfand and V. Retakh, *Determinants of matrices over noncommutative rings*, Funct. Anal. Appl. 25 (1991), no.2, 91-102.

[GGRW] I. Gelfand, S. Gelfand, V. Retakh, R. Wilson, *Quasideterminants*, Adv. in Math 193 (2005) no.1, 56-141, math.QA/0208146.

[GKLLRT] I. Gelfand, D. Krob, A. Lascoux, B. Leclerc, V. Retakh, J. Thibon, *Noncommutative symmetric functions*, Adv. Math. 112 (2) (1995) 218-348, hep-th/9407124.

[GN] C.Gilson, J.Nimmo, *On a direct approach to quasideterminant solutions of a noncommutative KP equation*, J. Phys. A: Math. Theor. 40 (2007) 3839-3850, nlin.SI/0701027.

[HJ] R.A.Horn and C.R.Johnson, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1994.

[L] M. T. Loots, *The development of the quarternion normal distribution*, master's thesis at the University of Pretoria (2010).

[S] 志磨裕彦，ヘッセ幾何学, 裳華房, 2001.

[Su] T. Suzuki, *Noncommutative Spectral Decomposition with Quasideterminant*, Adv. in Math.,Vol.217/5 (2008), 2141-2158, math/0703751.

[SY] T. Suzuki and S. Yoshizawa, in progress.

[玉手箱] 藤井一幸・鈴木達夫・浅田 明・待田芳徳・岩井敏洋 著 「数理の玉手箱」, 遊星社, 2010.

[VRS] J. Via, D. Ramirez and I. Santamaria, *Properness and Widely Linear Processing of Quaternion Random Vectors*, IEEE Transactions on Information Theory, Vol. 56, No. 7(2010), 3502-3515.

[Y] S. Yoshizawa , *Legendre dualities between matrix subspace flows*, Mathematical System Theory, (2013), 471-478.

[Y-T] S. Yoshizawa and K. Tanabe, *Dual differential geometry associated with the Kullback-Leibler informaion on the Gaussian distributions and its 2-parameter deformations*, SUT Journal of Mathematics, vol.35, No.1 (1999), 113-137.