

### 三角圏の $A_\infty$ 増強について

千葉大学大学院理学研究科                      梶浦 宏成

Hiroshige Kajiuura

Faculty of Science, Chiba University

ABSTRACT.  $A_\infty$  圏から三角圏を構成する方法が M.Kontsevich のホモロジー的ミラー対称性予想の定式化の際に提案されている. 三角圏がこの方法による  $A_\infty$  圏からの構成を持つ時, 三角圏は  $A_\infty$  増強を持つという. 三角圏が常に  $A_\infty$  増強を持つわけではないことは知られているが, 逆にもし  $A_\infty$  増強を持つならば一意的か? という問題が考えられる. 一般には三角圏の  $A_\infty$  増強は一意的ではない. この事実と, 逆に  $A_\infty$  増強が一意的ないくらかの例に関して, 主に [12] に基づいて論じる.

#### 1. 導入

ミラー対称性予想の圏論的定式化として Kontsevich によって提案されたホモロジー的ミラー対称性 [14] はシンプレクティック多様体  $M$  上の深谷圏  $Fuk(M)$  と  $M$  とミラー双対な複素多様体  $\hat{M}$  上の接続層の成す導来圏  $D^b(coh(\hat{M}))$  の間の等価性である. 深谷圏  $Fuk(M)$  は  $A_\infty$  圏であるため, それと導来圏  $D^b(coh(\hat{M}))$  を比べるために  $A_\infty$  圏  $C$  から三角圏を構成する方法が提案された ([14], Bondal-Kapranov の DG 圏の構成 [2] の  $A_\infty$  圏の場合への一般化にあたる). その三角圏は  $D^b(C)$  と表わされ, しばしば  $C$  の導来圏と呼ばれている. そして,  $Fuk(M)$  と  $D^b(coh(\hat{M}))$  に対し, 三角圏の同値

$$D^b(Fuk(M)) \simeq D^b(coh(\hat{M})) \tag{1}$$

が成り立つというのがホモロジー的ミラー対称性予想の一つの定式化 [14] である.

この  $A_\infty$  圏  $C$  から三角圏  $D^b(C) = Tr(C)$  を構成する方法は以下のステップから成る (3章).

- $C$  の片側捻り複体 (one-sided twisted complex) 達を対象とする  $A_\infty$  圏  $Tw(C)$  を構成する.
- $Tr(C)$  を  $Tw(C)$  のゼロ次のコホモロジーとして定義する.

$$Tr(C) := H^0(Tw(C)).$$

三角圏  $T$  に対し,  $T \simeq Tr(C)$  となるような  $A_\infty$  圏  $C$  が存在するとき,  $Tw(C)$  を  $T$  の  $A_\infty$  増強 ( $A_\infty$ -enhancement) とよぶ. このとき,  $A_\infty$  圏  $C$  は三角圏  $T$  の生成系とみなすことができるだろう. 一般に米田埋め込みによって  $A_\infty$  圏からそれと  $A_\infty$  擬同型な (つまり  $A_\infty$  同値な) DG 圏を構成できるため (cf. [4, 20, 11]),  $A_\infty$  増強が存在することと DG 増強が存

在することは同値であるが、一般に三角圏が必ず DG 増強を持つとは限らない [19]. しかし、接続層の導来圏などの三角圏の主な例においてある程度よい条件のもとでは DG 増強が存在する.

$Tr(C)$  は  $A_\infty$  圏  $C$  の不変量となる. つまり  $C, C'$  が  $A_\infty$  同値であれば三角圏同値  $Tr(C) \simeq Tr(C')$  が存在する (補題 3.2). よって、特定のミラー双対な多様体が与えられたとき、ホモロジー的ミラー対称性 (1) を示す有力な方法のひとつは  $D^b(Fuk(M)), D^b(coh(\hat{M}))$  の生成系としての  $A_\infty$  圏  $C, C'$  をみつけて  $A_\infty$  同値  $C \simeq C'$  を示すことである.

一方、逆の問題として  $A_\infty$  圏  $C$  から三角圏  $Tr(C)$  を構成したときに、情報は失われるであろうか? 実際、互いに  $A_\infty$  同値でない  $A_\infty$  圏  $C, C'$  で、 $A_\infty$  同値  $Tw(C) \simeq Tw(C')$  が存在するような例が通常の圏  $C, C'$  を、微分、高次の  $A_\infty$  積の自明な  $A_\infty$  圏とみなした場合にすでにある (cf. [9]). これは、 $Tw(C)$  の生成系として互いに  $A_\infty$  同値でない 2 つの  $A_\infty$  圏  $C, C'$  が存在することを意味する. 実際、構成法より  $A_\infty$  圏  $Tw(C)$  は  $C$  を充満部分  $A_\infty$  圏として含むが、 $Tw(C) \simeq Tw(C')$  ならば  $C'$  と  $A_\infty$  同値な  $A_\infty$  圏も  $Tw(C)$  の充満部分  $A_\infty$  圏となっているわけである.

このようなわけで、考えるべき問題は、 $A_\infty$  圏  $Tw(C)$  から三角圏  $Tr(C)$  を得る際に情報を失うのかどうかということとなる. つまり、三角圏の  $A_\infty$  増強は存在すれば一意であるだろうか (問題 4.1)?

$Tw(C)$  のゼロ次のコホモロジー  $Tr(C) := H^0(Tw(C))$  とは複体を成す射の空間のゼロ次のコホモロジーをとり、それらの間に  $Tw(C)$  の  $A_\infty$  構造の 2 次の積から誘導される積構造 (射の合成) の構造を入れるということであるため  $Tw(C)$  の高次の  $A_\infty$  積構造がすべて捨てられることとなるので普通に考えるとかなりの情報が失われているように思える. しかし実際には、 $C$  の高次の積構造の情報のかなりのものは  $Tr(C)$  の積構造に反映されて生き残る.  $Tr(C)$  の積構造の具体的表示として定められる  $C$  の捨り積が、一般に次数付き微分代数、あるいは次数付き微分圏  $C$  のマッセイ積やその様々な拡張を含むことを 5 章において説明する.

しかし結局のところ、 $C$  の捨り積は  $C$  の  $A_\infty$  構造を完全に復元するものではない. 実際、 $A_\infty$  同値でない  $A_\infty$  圏  $C, C'$  であって三角圏同値  $Tr(C) \simeq Tr(C')$  が成り立つが、それが  $A_\infty$  同値  $Tw(C) \simeq Tw(C')$  にリフトしない例が存在し、これが  $A_\infty$  増強の一意性の問題 (問題 4.1) の反例を与える [12]. このことについて紹介する (6 章) のが本稿の主な目的である.

[16] において、Lunts と Orlov は十分に広いクラスの三角圏の DG 増強の一意性を示している. しかしここでの DG 増強の一意性とは  $A_\infty$  同値類の一意性ではなく、擬関手 (quasi-functor) という概念によって定義される同値類に関する一意性であるため、本稿の議論とは矛盾はない.

以下、表記の説明を兼ねて 2 章で  $A_\infty$  圏に関する基本的な定義と性質、3 章で  $A_\infty$  圏から三角圏を構成する方法について必要最低限復習する. これらの準備ののち、4 章で本稿の

主問題を述べ、5章で捻り積を定義し、そのあと6章で  $A_\infty$  増強が一意的でない三角圏の一例を構成する。最後に7章で、 $A_\infty$  増強が一意的であることが簡単に分かるあるクラスの三角圏について議論する。

この原稿において ( $\mathbb{Z}$  次数付き) ベクトル空間といったときは常に一つ固定した標数ゼロの体  $K$  上のものとし、三角圏、 $A_\infty$  圏も  $K$  上のものを考える。

## 2. $A_\infty$ 圏

$A_\infty$  圏とは  $A_\infty$  代数 [21, 22] の元を圏の射に格上げしたものである [3]。つまり、 $A_\infty$  圏  $\mathcal{C}$  とは、対象の集合  $\text{Ob}(\mathcal{C}) = \{X, Y, \dots\}$  と、任意の二つの対象  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  に対して  $\mathbb{Z}$  次数付きベクトル空間  $\mathcal{C}(X, Y) = \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} \mathcal{C}^r(X, Y)$  があり、さらに、次数  $(2-n)$  の多重線形写像

$$m_n : \mathcal{C}(X_1, X_2) \otimes \cdots \otimes \mathcal{C}(X_n, X_{n+1}) \rightarrow \mathcal{C}(X_1, X_{n+1})$$

の集まり  $m := \{m_n\}_{n \geq 1}$  があってそれが  $A_\infty$  構造を定めるもののことをいう。

射の次数をひとつずらす操作 (懸垂) を

$$s : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow s\mathcal{C}(X, Y), \quad (s\mathcal{C})^i(X, Y) := \mathcal{C}^{i+1}(X, Y)$$

と表し、それによって誘導される  $A_\infty$  構造  $sm_n(s^{-1})^{\otimes n}$  を同じ記号  $m_n$  と表すことにするとこれらの次数は  $n$  によらず 1 となる。このとき  $A_\infty$  構造の条件式は

$$0 = \sum_{k+l=n+1} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{|a_{12}|+\dots+|a_{j(j+1)}|} m_k(a_{12}, \dots, a_{j(j+1)}), \quad (2)$$

$$m_l(a_{(j+1)(j+2)}, \dots, a_{(j+l)(j+l+1)}, a_{(j+l+1)(j+l+2)}, \dots, a_{n(n+1)}), \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

となる。ただし  $a_{i(i+1)} \in s\mathcal{C}(X_i, X_{i+1})$  は次数  $|a_{i(i+1)}|$  の射とする。つまり

$$a_{i(i+1)} \in (s\mathcal{C})^{|a_{i(i+1)}|}(X_i, X_{i+1}) = \mathcal{C}^{|a_{i(i+1)}|+1}(X_i, X_{i+1})$$

である。

$A_\infty$  圏  $\mathcal{C}$  で高次の積がない、 $m_3 = m_4 = \dots = 0$ , ものを DG 圏と呼ぶ。

**定義 2.1.**  $A_\infty$  圏  $\mathcal{C}$  は、各対象  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  に対して次数ゼロの射  $1_X \in \mathcal{C}^0(X, X)$  が存在して任意の射  $a_{12}, a_{23}, \dots$  ( $a_{i(i+1)} \in \mathcal{C}(X_i, X_{i+1})$ ) に対して

$$m_2(1_{X_1}, a_{12}) = a_{12} = m(a_{12}, 1_{X_2}),$$

$$m_n(a_{12}, \dots, a_{(i-1)i}, 1_{X_i}, a_{i(i+1)}, \dots, a_{n(n+1)}) = 0 \quad (n \geq 3)$$

となるとき、恒等射を持つ (unital) といわれる。

$A_\infty$  圏における恒等射としてこれより条件の弱い概念がいくらかあり、それらと区別するとき上の条件を満たす  $A_\infty$  圏は **strictly unital** であるといわれる. 本稿では以下  $A_\infty$  圏という上の意味で恒等射を持つ  $A_\infty$  圏のこととする.

任意の  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  に関するコホモロジー  $H(\mathcal{C}(X, Y), m_1)$  上には  $m_2$  から射の (結合的な) 合成が誘導される. こうして得られる  $\mathbb{Z}$  次数付き圏を  $H(\mathcal{C})$  と表す. 特にゼロ次のコホモロジーは積  $m_2$  について閉じていて, このゼロ次のコホモロジーとして得られる圏を  $H^0(\mathcal{C})$  と表す.  $A_\infty$  圏  $\mathcal{C}$  として恒等射を持つものを考えているので  $H(\mathcal{C}), H^0(\mathcal{C})$  は実際普通の意味での圏をなす.

$A_\infty$  圏の間の  $A_\infty$  関手は二つの  $A_\infty$  代数の間の  $A_\infty$  写像の類似として定義される. つまり,  $A_\infty$  関手  $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  とは, 射  $f: \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{C}')$  と, 任意の  $X_1, \dots, X_{k+1} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  に対して定められている次数  $(1-k)$  の多重線形写像

$$f_k: \mathcal{C}(X_1, X_2) \otimes \cdots \otimes \mathcal{C}(X_k, X_{k+1}) \rightarrow \mathcal{C}'(f(X_1), f(X_{k+1})) \quad (3)$$

の集まりであって, それらが  $A_\infty$  写像の条件を満たすもののことである. これも次数をずらした表記で具体的に書くと,

$$\begin{aligned} & \sum_{i \geq 1} \sum_{k_1 + \cdots + k_n = n} m'_i(f_{k_1} \otimes \cdots \otimes f_{k_i})(a_{12}, \dots, a_{n(n+1)}) \\ &= \sum_{\substack{i+l+j=k \\ i+l+j=n}} f_k(\mathbf{1}^{\otimes i} \otimes m_l \otimes \mathbf{1}^{\otimes j})(a_{12}, \dots, a_{n(n+1)}), \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

となる. ただし各  $i = 1, \dots, n-1$  について  $a_{i(i+1)} \in s\mathcal{C}(X_i, X_{i+1})$  とする. つまりここでの  $f_k$  は ( $m_k$  のときと同様に) (3) の  $f_k$  から次数を 1 つずらすことによって誘導されるものであり,  $k$  によらず次数はすべてゼロとなっている.  $n = 1$  のときの条件より  $f_1$  は複体  $(\mathcal{C}(X_1, X_2), m_1)$  から複体  $(\mathcal{C}'(f(X_1), f(X_2)), m'_1)$  への鎖写像を定めていることに注意する. さらに  $n = 2$  のときの条件より  $(f, f_1)$  は  $H(\mathcal{C})$  から  $H(\mathcal{C}')$  への関手を定めることが分かる. これを  $H(f): H(\mathcal{C}) \rightarrow H(\mathcal{C}')$  と書くことにする.

$A_\infty$  代数の間の  $A_\infty$  擬同型写像の拡張として,  $A_\infty$  関手  $f = \{f; f_1, f_2, f_3, \dots\}$  であって,  $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  が全単射かつ  $f_1$  が複体の間の擬同型写像を定めるものを  $A_\infty$  擬同型関手と呼ぶ. 特に  $f_1$  が複体の間の同型写像であるとき  $f$  を  $A_\infty$  同型関手と呼ぶ.

$A_\infty$  圏の間の自然な同値関係として, 普通の意味での圏の間の圏同値の概念と  $A_\infty$  擬同型関手をうまくあわせたものを考えたい.  $H(\mathcal{C})$  が普通の意味での圏を成すことから以下のように定めると実際にこれがよい概念となる.

**定義 2.2.**  $A_\infty$  関手  $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  が  $A_\infty$  同値関手であるとは,  $H(f): H(\mathcal{C}) \rightarrow H(\mathcal{C}')$  が圏同値であるときをいう.  $A_\infty$  同値関手  $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  が存在するとき,  $\mathcal{C}$  と  $\mathcal{C}'$  は  $A_\infty$  同値であるという.

この定義より  $A_\infty$  擬同型関手は  $A_\infty$  同値関手であることが分かる.

$A_\infty$  代数が与えられたとき, それと  $A_\infty$  擬同型な極小  $A_\infty$  代数が必ず存在する [6].  $A_\infty$  圏の場合も全く同様に以下が成り立つ.

**定理 2.3** ( $A_\infty$  圏の極小模型定理).  $A_\infty$  圏  $\mathcal{C}$  が与えられたとき, ある極小  $A_\infty$  圏  $\mathcal{C}'$  と  $A_\infty$  擬同型関手  $f: \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$  が存在する.  $\mathcal{C}$  が恒等射を持つときは,  $\mathcal{C}'$  も恒等射を持ち,  $H(f)$  が圏同型となるものがとれる.

$\mathcal{C}'$  と  $f$  の具体的構成法も存在する (cf. [15, 7]). 実際,  $A_\infty$  代数のときに知られているこの具体的構成法を,  $\mathcal{C}$  を  $A_\infty$  代数とみなすことによって適用すると, 得られた  $\mathcal{C}'$  上の  $A_\infty$  構造が  $A_\infty$  圏の構造を定めていること (合成できない射の組の上では自明になっている) ことは明らかであり, 同様に  $A_\infty$  擬同型写像も  $A_\infty$  擬同型関手  $\mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$  を定めることが分かる.

$A_\infty$  擬同型だけでなく,  $A_\infty$  同値関手も (名前の通り)  $A_\infty$  圏の間の同値関係を定めることが知られている (cf. [20]). よって, 上の極小模型定理とあわせると, 任意の  $A_\infty$  圏  $\mathcal{C}$  に対し, それと  $A_\infty$  同値な極小  $A_\infty$  圏  $\mathcal{C}'$  で, 任意の  $X, Y \in \mathcal{C}'$  についてこれらが  $H(\mathcal{C}')$  において同型なのは  $X = Y$  のときに限るようなものがとれる. これが  $A_\infty$  圏の  $A_\infty$  同値類の代表元として "最も簡明" なものであるといえる.

### 3. $A_\infty$ 圏から三角圏を構成する方法

三角圏  $\mathcal{T}$  とはある加法圏で, 自己同型  $T: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$  を持ち, ある公理系によって定義される完全三角構造を持つものことである ([5, 13]などを参照). アーベル圏  $\mathcal{C}$  の複体のホモトピー圏  $K(\mathcal{C})$  などの典型的な例において, 完全三角構造は,  $K(\mathcal{C})$  の写像  $u: X \rightarrow Y$ , その写像錘  $C(u)$  と自然に定められる射  $v, w$  によってつくられる「三角」系列

$$\cdots T^{-1}(C(u)) \xrightarrow{T^{-1}(w)} X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} C(u) \xrightarrow{w} T(X) \xrightarrow{T(u)} \cdots \quad (4)$$

と同型なものとして定められる.

ここでは  $A_\infty$  圏  $\mathcal{C}$  から三角圏  $Tr(\mathcal{C})$  を構成する方法について紹介する (DG 圏の場合に Bondal-Kapranov [2],  $A_\infty$  圏の場合への拡張は Kontsevich [14]. [4] も見よ).  $A_\infty$  圏  $\mathcal{C}$  に対して, まずそれを拡大した  $A_\infty$  圏  $Tw(\mathcal{C})$  を構成し, そのゼロ次のコホモロジーとして三角圏  $Tr(\mathcal{C})$  を定義する. ここで  $Tw(\mathcal{C})$  のゼロ次のコホモロジー  $Tr(\mathcal{C})$  とは, 対象は同じとし,

$$\text{Ob}(Tr(\mathcal{C})) = \text{Ob}(Tw(\mathcal{C})),$$

任意の2つの対象  $\alpha, \beta \in \text{Ob}(Tw(\mathcal{C}))$  に対して, 射の空間を

$$Tr(\mathcal{C})(\alpha, \beta) := H^0(Tw(\mathcal{C})^\bullet)(\alpha, \beta)$$

とすることを意味する.  $Tr(\mathcal{C})$  の射の合成は,  $Tw(\mathcal{C})$  の2次の  $A_\infty$  積  $m_2^{Tw}$  から誘導されるものとする.

$$\begin{array}{ccc} \{ A_\infty \text{ 圏 } \mathcal{C} \} & \rightarrow & \{ A_\infty \text{ 圏 } Tw(\mathcal{C}) \} \\ & & H^0 \downarrow \\ & & \{ \text{三角圏 } Tr(\mathcal{C}) \} \end{array}$$

$A_\infty$  圏  $\mathcal{C}$  から  $A_\infty$  圏  $Tw(\mathcal{C})$  は以下の手順で構成される.

1. まず,  $\mathcal{C}$  から別の  $A_\infty$  圏  $\tilde{\mathcal{C}}$  を,  $\mathcal{C}$  の対象の次数をずらしたコピーとそれらの直和 (とゼロ対象) を対象とする  $A_\infty$  圏として定義する.

$$\text{Ob}(\tilde{\mathcal{C}}) = \{ \oplus_{i=1}^l \tilde{X}_i \mid \tilde{X}_i = X_i[r_i], X_i \in \mathcal{C}, r_i \in \mathbb{Z} \}.$$

ここで, 射の空間は, それぞれ  $X, Y \in \mathcal{C}$  に対し, それらの次数をそれぞれ  $n, m$  減らしたものに對し

$$\tilde{C}^r(X[n], Y[m]) := C^{r+(m-n)}(X, Y) \quad (5)$$

と定義し, それを直和達に對し自然に拡張する.  $\mathcal{C}$  の  $A_\infty$  構造  $m$  から自然に定まる  $\tilde{\mathcal{C}}$  の  $A_\infty$  構造を  $\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \dots$  とかく.

2.  $\mathcal{C}$  の片側捻り複体 (one-sided twisted complex)  $(\mathcal{X}, \Phi)$  とは  $\mathcal{X} = \tilde{X}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{X}_l \in \tilde{\mathcal{C}}$  と

$$\Phi = \{ \phi_{ij} \}_{ij=1, \dots, l}, \quad \phi_{ij} = 0 \quad (i \geq j), \quad \phi_{ij} \in (s\tilde{\mathcal{C}})^0(\tilde{X}_i, \tilde{X}_j) \quad (6)$$

の組であって, 以下の  $A_\infty$  モーラー・カルタン方程式を満たすものとする.

$$0 = \tilde{m}_*(\Phi) := \tilde{m}_1(\Phi) + \tilde{m}_2(\Phi, \Phi) + \tilde{m}_3(\Phi, \Phi, \Phi) + \dots$$

3.  $A_\infty$  圏  $Tw(\mathcal{C})$  を  $\mathcal{C}$  中の片側捻り複体達の成す圏として定義する. ここで, 射の空間は  $\tilde{\mathcal{C}}$  のものと同じとし,

$$Tw(\mathcal{C})((\mathcal{X}, \Phi), (\mathcal{X}', \Phi')) := \tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{X}, \mathcal{X}'),$$

$A_\infty$  構造  $m_n^{Tw}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  は

$$m_n^{Tw}(\varphi_{12}, \dots, \varphi_{n(n+1)}) := \sum_{k_1, \dots, k_{n+1} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \tilde{m}_{n+k_1+\dots+k_{n+1}}((\Phi_1)^{k_1}, \varphi_{12}, (\Phi_2)^{k_2}, \dots, (\Phi_n)^{k_n}, \varphi_{n(n+1)}, (\Phi_{n+1})^{k_{n+1}})$$

で与える. ここで  $\alpha_i := (\mathcal{X}_i, \Phi_i) \in Tw(\mathcal{C})$ ,  $\varphi_{i(i+1)} \in (s(Tw(\mathcal{C})))^0(\alpha_i, \alpha_{i+1})$  とする.

こうして得られる  $A_\infty$  圏  $Tw(\mathcal{C})$  のゼロ次のコホモロジーが三角圏となる.

$$Tr(\mathcal{C}) := H^0(Tw(\mathcal{C})).$$

ここで完全三角構造は以下のように定められる. まず  $Tw(\mathcal{C})$  における射

$$\Psi \in (sTw(\mathcal{C}))^0((\mathcal{Z}, \Phi_{\mathcal{Z}}), (\mathcal{X}, \Phi_{\mathcal{X}}))$$

に対し,  $(\mathcal{Y}, \Phi_{\mathcal{Y}})$ ,

$$\mathcal{Y} := \mathcal{Z} \oplus \mathcal{X}, \quad \Phi_{\mathcal{Y}} := \begin{pmatrix} \Phi_{\mathcal{Z}} & \Psi \\ 0 & \Phi_{\mathcal{X}} \end{pmatrix}$$

は片側捨り複体となる. 実際, これが片側捨り複体となる条件は  $m_1^{Tw}(\Psi) = 0$  と同値である. これより  $A_{\infty}$  圏  $sTw(\mathcal{C})$  の次数  $-1$  の射からなる系列

$$\cdots (\mathcal{Z}, \Phi_{\mathcal{Z}})[-1] \xrightarrow{w[-1]} (\mathcal{X}, \Phi_{\mathcal{X}}) \xrightarrow{u} (\mathcal{Y}, \Phi_{\mathcal{Y}}) \xrightarrow{v} (\mathcal{Z}, \Phi_{\mathcal{Z}}) \xrightarrow{w} \cdots$$

を,  $w[-1]$  を  $\Psi \in (sTw(\mathcal{C}))^0((\mathcal{Z}, \Phi_{\mathcal{Z}}), (\mathcal{X}, \Phi_{\mathcal{X}}))$  から定められる射,  $u, v$  をそれぞれ恒等射  $id_{\mathcal{X}}, id_{\mathcal{Z}}$  から自然に定義されるものとして定義する. このような系列から誘導される  $Tr(\mathcal{C})$  における (次数ゼロの射からなる) 系列と同型な系列を  $Tr(\mathcal{C})$  の完全三角系列として定めると, (アーベル圏における複体のホモトピー圏などの場合と同様に) これらは完全三角構造を定めることがわかる.

**定義 3.1.** 三角圏  $\mathcal{T}$  に対し, 三角圏同値  $\mathcal{T} \simeq Tr(\mathcal{C})$  が存在するような  $A_{\infty}$  圏  $\mathcal{C}$  が存在するとき,  $A_{\infty}$  圏  $Tw(\mathcal{C})$  を  $\mathcal{T}$  の  $A_{\infty}$  増強とよぶ.

構成より,  $\mathcal{C}$  は  $Tw(\mathcal{C})$  の充満部分圏である. 三角圏  $\mathcal{T}$  に対して,  $\mathcal{T} \simeq Tr(\mathcal{C})$  となる  $A_{\infty}$  圏  $\mathcal{C}$  があれば, それは  $\mathcal{T}$  の生成子と見なすことができる.

この構成より, 以下のことが比較的簡単に示せる.

**補題 3.2** ([20, Lemma 3.25]).  $A_{\infty}$  圏  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  が  $A_{\infty}$  同値ならば,  $A_{\infty}$  同値  $Tw(\mathcal{C}) \simeq Tw(\mathcal{C}')$  が存在する. つまり三角圏同値  $Tr(\mathcal{C}) \simeq Tr(\mathcal{C}')$  が存在する.

今  $H(Tw(\mathcal{C}))^i(X, Y) \simeq H(Tw(\mathcal{C}))^0(X, T^i Y)$  などが成り立っているので  $H(Tw(\mathcal{C}))$  は  $Tr(\mathcal{C}) = H^0(Tw(\mathcal{C}))$  から復元できる. よって,  $A_{\infty}$  同値の定義より  $Tw(\mathcal{C}) \simeq Tw(\mathcal{C}')$  ならば圏同値  $H(Tw(\mathcal{C})) \simeq H(Tw(\mathcal{C}'))$  が存在するが, それは圏同値  $Tr(\mathcal{C}) \simeq Tr(\mathcal{C}')$  が存在することと同値である. その圏同値が完全三角構造を保つことは直接確認できる.

この補題 3.2 の「 $\mathcal{C} \sim \mathcal{C}'$  ならば  $Tw(\mathcal{C}) \simeq Tw(\mathcal{C}')$ 」という部分を示すには, これを

- (i)  $\mathcal{C}$  と  $\mathcal{C}'$  が  $A_{\infty}$  擬同型である場合,
- (ii)  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  がともに極小  $A_{\infty}$  圏の場合

に分けて示すのがひとつの明快な方針であろう. (i) の場合に成り立てば, 極小模型定理より補題 3.2 は (より簡単な) (ii) の場合に帰着できる. (i) の証明は例えば [12, Theorem 4.1] にある.

#### 4. $A_{\infty}$ 増強の一意性問題

一般に三角圏  $\mathcal{T}$  が  $A_{\infty}$  増強を持つとき,  $A_{\infty}$  増強は  $A_{\infty}$  同値を除いて一意的であるかどうかという本稿の主問題を考える. より正確には, 以下の問題を考える.

**問題 4.1.**  $A_\infty$  圏  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  と三角圏同値  $\phi: Tr(\mathcal{C}) \rightarrow Tr(\mathcal{C}')$  が与えられたとき,  $A_\infty$  同値関手  $\tilde{\phi}: Tw(\mathcal{C}) \rightarrow Tw(\mathcal{C}')$  であって図式

$$\begin{array}{ccc} Tw(\mathcal{C}) & \overset{\tilde{\phi}}{\dashrightarrow} & Tw(\mathcal{C}') \\ H^0 \downarrow & & \downarrow H^0 \\ Tr(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\phi} & Tr(\mathcal{C}') \end{array} \quad (7)$$

を可換にするものが必ず存在するであろうか?

ただし, この図式が可換であるとは合成  $\phi \circ H^0$  と  $H^0 \circ \tilde{\phi}$  が, (これらは  $A_\infty$  関手でも普通の意味での関手でもないが) 関手の自然同値と同じような意味で同値である, つまり正確には以下のこととする.

- 任意の対象  $\alpha \in Tw(\mathcal{C})$  に対し,  $\phi \circ H^0(\alpha)$  と  $H^0 \circ \tilde{\phi}(\alpha)$  が  $Tr(\mathcal{C}')$  において同型である. この同型を  $\theta_\alpha: \phi \circ H^0(\alpha) \rightarrow H^0 \circ \tilde{\phi}(\alpha)$  と書くことにする.
- 任意の対象  $\alpha, \beta \in Tw(\mathcal{C})$  と  $m_1^{Tw}$  閉な射  $\Psi \in (Tw(\mathcal{C}))^0(\alpha, \beta)$  について

$$\begin{array}{ccc} \phi \circ H^0(\alpha) & \xrightarrow{\phi \circ H^0(\Psi)} & \phi \circ H^0(\beta) \\ \theta_\alpha \downarrow & & \downarrow \theta_\beta \\ H^0 \circ \tilde{\phi}(\alpha) & \xrightarrow{H^0 \circ \tilde{\phi}(\Psi)} & H^0 \circ \tilde{\phi}(\beta) \end{array} \quad (8)$$

が可換となる.

このような  $\tilde{\phi}$  が存在するとき,  $\tilde{\phi}$  を  $\phi$  のリフトと呼ぶ.

実はこの問題の答えは否定的である. 実際, 以下のようなものが反例を与える.

**定理 4.2** ([12, Theorem 5.5]).  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  を以下のような極小  $A_\infty$  圏とする.

- $H(\mathcal{C}), H(\mathcal{C}')$  それぞれにおいて, 相異なる対象は同型でない.
- 三角圏同型  $\phi: Tr(\mathcal{C}) = Tr(\mathcal{C}')$  が存在する.
- その三角圏同型の制限が充満部分圏の同型  $H^0(\mathcal{C}) = H^0(\mathcal{C}')$  を与えている.

このとき,  $\mathcal{C}$  と  $\mathcal{C}'$  が  $A_\infty$  同型でなければ  $\phi$  のリフト  $\tilde{\phi}: Tw(\mathcal{C}) \rightarrow Tw(\mathcal{C}')$  は存在しない.

簡単にいうと, もしリフト  $\tilde{\phi}: Tw(\mathcal{C}) \rightarrow Tw(\mathcal{C}')$  が存在するならばその制限として  $A_\infty$  同値関手  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  が存在するはずで, 今  $\mathcal{C}$  と  $\mathcal{C}'$  の条件より  $A_\infty$  同値関手  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  が存在するならばそれは  $A_\infty$  同型である. これより, リフト  $\tilde{\phi}$  が存在することは仮定と矛盾することがいえる.

6章では, 問題 4.1 の反例として, 上の定理 4.2 の条件を満たす極小  $A_\infty$  圏の組  $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$  を与える.  $A_\infty$  圏の組  $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$  が与えられたとき, 三角圏同値  $Tr(\mathcal{C}) \simeq Tr(\mathcal{C}')$  が成り立つか



どうかをみるために  $Tr(C)$ ,  $Tr(C')$  の積構造 (射の合成の構造) をみる必要があり, その積構造に対応するものとしてまず次章 (5 章) において  $A_\infty$  圏の捻り積を定義する.

### 5. $A_\infty$ 圏の捻り積

**定義 5.1.**  $C$  をある  $A_\infty$  圏とする. 2 つの  $C$  の片側捻り複体  $(\mathcal{X}^-, \Phi^-)$ ,  $(\mathcal{X}^+, \Phi^+)$  であって,  $\mathcal{X}^- = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$ ,  $\mathcal{X}^+ = \mathcal{Y} \oplus \mathcal{Z}$ ,

$$\Phi^- = \begin{pmatrix} \Phi_{\mathcal{X}} & \Phi_{\mathcal{X}\mathcal{Y}} \\ 0 & \Phi_{\mathcal{Y}} \end{pmatrix}, \quad \Phi^+ = \begin{pmatrix} \Phi_{\mathcal{Y}} & \Phi_{\mathcal{Y}\mathcal{Z}} \\ 0 & \Phi_{\mathcal{Z}} \end{pmatrix}$$

となるものが与えられているとする. ただし  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$ ,  $\mathcal{Z}$  はゼロ対象ではないとする.

$$\Phi := \begin{pmatrix} \Phi_{\mathcal{X}} & \Phi_{\mathcal{X}\mathcal{Y}} & 0 \\ 0 & \Phi_{\mathcal{Y}} & \Phi_{\mathcal{Y}\mathcal{Z}} \\ 0 & 0 & \Phi_{\mathcal{Z}} \end{pmatrix},$$

とし,

$$\tilde{m}_*(\Phi) := \tilde{m}_1(\Phi) + \tilde{m}_2(\Phi, \Phi) + \tilde{m}_3(\Phi, \Phi, \Phi) + \dots$$

を再び  $\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y} \oplus \mathcal{Z}$  のブロック行列に分解したときの  $\mathcal{X}$ - $\mathcal{Z}$  ブロック成分 (右上隅のブロック成分) を  $C$  における捻り積  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}; \Phi)$  とよぶ.

$(\mathcal{X}^-, \Phi^-)$ ,  $(\mathcal{X}^+, \Phi^+)$  は片側捻り複体であるので  $\Phi_{\mathcal{X}}$ ,  $\Phi_{\mathcal{Y}}$ ,  $\Phi_{\mathcal{Z}}$  はそれぞれ対角成分が自明な上三角行列であり,  $\Phi$  もそうである. 特に,  $(\mathcal{X}, \Phi_{\mathcal{X}})$ ,  $(\mathcal{Y}, \Phi_{\mathcal{Y}})$ ,  $(\mathcal{Z}, \Phi_{\mathcal{Z}})$  は片側捻り複体であり,  $\Phi_{\mathcal{X}\mathcal{Y}}$  は  $(\mathcal{X}, \Phi_{\mathcal{X}})$  から  $(\mathcal{Y}, \Phi_{\mathcal{Y}})$  への  $m_1^{Tw}$  閉形式,  $\Phi_{\mathcal{Y}\mathcal{Z}}$  は  $(\mathcal{Y}, \Phi_{\mathcal{Y}})$  から  $(\mathcal{Z}, \Phi_{\mathcal{Z}})$  への  $m_1^{Tw}$  閉形式である. よって捻り積  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}; \Phi)$  は  $sTw(C)$  における積  $m_2^{Tw}(\Phi_{\mathcal{X}\mathcal{Y}}, \Phi_{\mathcal{Y}\mathcal{Z}})$  に他ならない. よって,  $\tilde{m}_*(\Phi)$  は  $\mathcal{X}$ - $\mathcal{Z}$  ブロック成分以外は自明であり, 捻り積  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}; \Phi)$  は  $(\mathcal{X}, \Phi_{\mathcal{X}})$  から  $(\mathcal{Z}, \Phi_{\mathcal{Z}})$  への  $m_1^{Tw}$  閉形式である.

これらの捻り積は DG 圏のマッセイ積とその  $A_\infty$  圏の場合への自然な一般化を含む. それについて以下の簡単な例でみてみよう.

**例 5.2** (DG 圏のマッセイ積 (cf. Gelfand-Manin[5])).  $C$  を DG 圏とする. 対象  $X_1, X_2, X_3, X_4 \in C$  に対し,  $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3, \tilde{X}_4 \in \tilde{C}$  をそれらの次数をいくらかずらしたものとする. つまり,  $\tilde{X}_i := X_i[r_i]$ ,  $r_i \in \mathbb{Z}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  とする. ゼロ次  $\tilde{m}_1$  閉形式  $\rho_{i(i+1)} \in (s\tilde{C})^0(\tilde{X}_i, \tilde{X}_{i+1})$ ,  $i = 1, 2, 3$  であって, コホモロジー上で

$$[\rho_{12} \cdot \rho_{23}] = 0, \quad [\rho_{23} \cdot \rho_{34}] = 0$$

となるものを考えよう. ここで  $\cdot$  は DG 圏  $\tilde{C}$  における積とする. 射  $h_{13} \in s\tilde{C}^0(\tilde{X}_1, \tilde{X}_3)$ ,  $h_{24} \in s\tilde{C}^0(\tilde{X}_2, \tilde{X}_4)$  であって

$$d(h_{13}) = -\rho_{12} \cdot \rho_{23}, \quad d(h_{24}) = -\rho_{23} \cdot \rho_{34} = 0$$

となるものをとる. このとき,  $\mathcal{C}$  の捻り積  $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2 \oplus \tilde{X}_3, \tilde{X}_4; \Phi)$ ,

$$\Phi := \begin{pmatrix} 0 & \rho_{12} & h_{13} & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{23} & h_{24} \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を考えよう.

$$\begin{aligned} \tilde{m}_*(\Phi) &= d(\Phi) + \Phi \cdot \Phi \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & d(h_{13}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d(h_{24}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \rho_{12} \cdot \rho_{23} & h_{13} \cdot \rho_{34} + \rho_{12} \cdot h_{24} \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{23} \cdot \rho_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & h_{13} \cdot \rho_{34} + \rho_{12} \cdot h_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より, この (1,4) 成分として得られる捻り積はマッセイ積に他ならない.

次に, 上の例の  $A_\infty$  圏の場合の対応物についてみる.

**例 5.3** ((極小)  $A_\infty$  圏におけるマッセイ積).  $\mathcal{C}$  を極小  $A_\infty$  圏とする. このとき, 射の空間のコホモロジーは射の空間それ自身に一致することに注意する. 例 5.2 と同様, 対象  $X_1, X_2, X_3, X_4 \in \tilde{\mathcal{C}}$  に対し,  $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3, \tilde{X}_4 \in \tilde{\mathcal{C}}$  をそれらの次数をいくらかずらしたものとす. 射  $\rho_{i(i+1)} \in s\tilde{\mathcal{C}}^0(\tilde{X}_i, \tilde{X}_{i+1})$ ,  $i = 1, 2, 3$  が

$$\rho_{12} \cdot \rho_{23} = 0, \quad \rho_{23} \cdot \rho_{34} = 0$$

を満たしているとする. このとき, 捻り積  $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2 \oplus \tilde{X}_3, \tilde{X}_4; \Phi)$ ,

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & \rho_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を考えよう.

$$\tilde{m}_*(\Phi) = \tilde{m}_3(\Phi, \Phi, \Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \tilde{m}_3(\rho_{12}, \rho_{23}, \rho_{34}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より、捻り積として  $\tilde{m}_3(\rho_{12}, \rho_{23}, \rho_{34})$  が得られた。

これをマッセイ積の  $A_\infty$  圏の場合の対応物とみるのは自然であろう。実際、例 5.3 における極小  $A_\infty$  圏  $\mathcal{C}$  を例 5.2 における DG 圏  $\mathcal{C}$  の極小模型であるとする。特に、定理 2.3 で述べたように極小模型の具体的構成法があり、例 5.3 における極小  $A_\infty$  圏  $\mathcal{C}$  が例 5.2 における DG 圏  $\mathcal{C}$  からその方法によって構成される極小  $A_\infty$  圏とすると、この同一視によって、例 5.2, 5.3 における捻り積が一致する [12]。

例 5.2, 5.3 のどちらの場合も、捻り積  $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2 \oplus \tilde{X}_3, \tilde{X}_4; \Phi)$  は  $Tr(\mathcal{C})$  における射の合成

$$[\rho_{12} \cdot \rho_{34}] : (\tilde{X}_1, 0) \rightarrow (\tilde{X}_{23}, \Phi_{\tilde{X}_{23}}) \rightarrow (\tilde{X}_4, 0), \quad \tilde{X}_{23} := \tilde{X}_2 \oplus \tilde{X}_3, \quad \Phi_{\tilde{X}_{23}} := \begin{pmatrix} 0 & \rho_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

に対応するものである。

捻り積はさらに、マッセイ積の一般化である高次マッセイ積、さらにその一般化である行列マッセイ積 ([17]) を含む ([10, 12])。捻り積の中には行列マッセイ積にも対応しないものも存在するのだが、それでも捻り積からもとの  $A_\infty$  構造を完全に復元することはできない。後で構成する問題 4.1 の反例 (例 6.1) において、どの捻り積にも (以下の意味で陽に) 寄与しないが  $A_\infty$  同値で消すことのできない高次  $A_\infty$  積を構成する。

捻り積  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}; \Phi)$  は  $(sTw(\mathcal{C}))^1((\mathcal{X}, \Phi_{\mathcal{X}}), (\mathcal{Z}, \Phi_{\mathcal{Z}}))$  の  $m_1^{Tw}$  閉形式である。これらから  $Tr(\mathcal{C})$  における積構造をみるために、 $(sTw(\mathcal{C}))^1((\mathcal{X}, \Phi_{\mathcal{X}}), (\mathcal{Z}, \Phi_{\mathcal{Z}}))$  の  $m_1^{Tw}$  完全形式の成す空間を

$$B^1((\mathcal{X}, \Phi_{\mathcal{X}}), (\mathcal{Z}, \Phi_{\mathcal{Z}})) =: B^1$$

と表すことにする。

捻り積の定義より以下を得る。

**定理 5.4.**  $\mathcal{C}$  と  $\mathcal{C}'$  を同じ対象と射からなる  $A_\infty$  圏とする。 ( $Ob(\mathcal{C}) = Ob(\mathcal{C}')$  かつ任意の  $X, Y \in Ob(\mathcal{C}) = Ob(\mathcal{C}')$  について  $\mathcal{C}^i(X, Y) \simeq \mathcal{C}'^i(X, Y)$ .)  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  が以下を満たせば、この  $\mathcal{C}$  と  $\mathcal{C}'$  の対象と射の同一視は圏同型  $\mathcal{C} \simeq \mathcal{C}'$  を定め、さらにそれは三角圏同型  $Tr(\mathcal{C}) \simeq Tr(\mathcal{C}')$  に拡張する。

- $(\mathcal{X}, \Phi_{\mathcal{X}})$  が  $\mathcal{C}$  における片側捻り複体であるとき、またそのときに限り  $(\mathcal{X}, \Phi_{\mathcal{X}})$  は  $\mathcal{C}'$  における片側捻り複体である。
- 任意の 2 つの片側捻り複体  $(\mathcal{X}, \Phi_{\mathcal{X}}), (\mathcal{Z}, \Phi_{\mathcal{Z}})$  について、 $B^1$  は  $\mathcal{C}$  におけるものと  $\mathcal{C}'$  におけるもので一致する。
- 任意の捻り積  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}; \Phi)$  の  $\mathcal{C}$  におけるものは  $\mathcal{C}'$  におけるものと  $B^1$  を除いて一致する。

□

よって、この定理の条件を満たす2つの極小  $A_\infty$  圏  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  であって、互いに  $A_\infty$  同型でないものを構成すれば定理 4.2 よりそれが問題 4.1 に対する反例となる。

## 6. 反例

問題 4.1 の反例を [12] において構成したが、そこでは次数に関して間違いを含む（下の注意 6.4 参照）。以下がそれを訂正したものである。

例 6.1. 極小  $A_\infty$  圏  $s\mathcal{C}$  を以下で定める。

$$X_0 \xrightarrow{\rho_{01}} X_1 \xrightarrow{\rho_{12}} X_2 \xrightarrow{\rho_{23}} X_3 \xrightarrow{\rho_{34}} X_4 \xrightarrow{\rho_{45}} X_5 \xrightarrow{\rho_{56}} X_6 \xrightarrow{\rho_{67}} X_7.$$

$\mathcal{C}$  の対象は  $X_0, X_1, \dots, X_6, X_7$  とする。

- (i) 射の空間  $s\mathcal{C}(X_i, X_{i+1})$ ,  $i = 0, \dots, 6$  は次数ゼロの基底  $\rho_{i(i+1)}$  で張られる 1 次元ベクトル空間とする。（ここまでが上の図に対応する）。
- (ii) 射の空間  $s\mathcal{C}(X_i, X_{i+2})$  を,  $i = 2, 3$  のとき, 次数 1 の基底  $\rho_{i(i+2)}$  と次数ゼロの基底  $\sigma_{i(i+2)}$  で張られる 2 次元ベクトル空間とし, その他の  $i$  の場合は  $s\mathcal{C}(X_i, X_{i+2}) = 0$  とする。
- (iii) 射の空間  $s\mathcal{C}(X_1, X_4)$ ,  $s\mathcal{C}(X_3, X_6)$  はそれぞれ基底  $\rho_{14}, \rho_{36}$  で張られる次数 1 の 1 次元ベクトル空間とする。それ以外 ( $i \neq 1, 3$ ) のときは  $s\mathcal{C}(X_i, X_{i+3}) = 0$  とする。
- (iv) 射の空間  $s\mathcal{C}(X_0, X_4)$ ,  $s\mathcal{C}(X_3, X_7)$  はそれぞれ次数 1 の基底  $\rho_{04}, \rho_{37}$  で張られる 1 次元ベクトル空間とする。それ以外 ( $i \neq 0, 3$ ) のときは  $s\mathcal{C}(X_i, X_{i+4}) = 0$  とする。
- (v)  $i = 0, 1, 2$  すべてについて  $s\mathcal{C}(X_i, X_{i+5}) = 0$  とする。
- (vi)  $i = 0, 1$  どちらの場合も  $s\mathcal{C}(X_i, X_{i+6}) = 0$  とする。
- (vii)  $s\mathcal{C}(X_0, X_7)$  は次数 2 の基底  $\rho_{07}$  で張られる 1 次元ベクトル空間とする。

さらに各  $i = 0, 1, \dots, 6, 7$  に対し,  $s\mathcal{C}(X_i, X_i)$  は恒等射  $s(id_{X_i})$  で張られる次数マイナス 1 の 1 次元ベクトル空間とし,  $i > j$  のときは  $s\mathcal{C}(X_i, X_j) = 0$  とする。

ある  $\epsilon \in K$  を固定し,  $\mathcal{C}$  の極小  $A_\infty$  構造（つまり  $m_1 = 0$ ）を以下のように定める。恒等元  $s(id_{X_i})$  を含む積  $m_2$  を除いて非自明な  $A_\infty$  積を

$$m_2(\rho_{23}, \rho_{34}) = \rho_{24}, \quad m_2(\rho_{34}, \rho_{45}) = \rho_{35},$$

$$m_2(\rho_{12}, \sigma_{24}) = \rho_{14}, \quad m_2(\sigma_{35}, \rho_{56}) = \rho_{36}$$

$$m_3(\rho_{12}, \rho_{23}, \rho_{34}) = \epsilon \cdot \rho_{14}, \quad m_3(\rho_{34}, \rho_{45}, \rho_{56}) = -\epsilon \cdot \rho_{36}$$

$$m_3(\rho_{01}, \rho_{12}, \sigma_{24}) = -\rho_{04}, \quad m_3(\sigma_{35}, \rho_{56}, \rho_{67}) = -\rho_{37}$$

$$m_4(\rho_{04}, \rho_{45}, \rho_{56}, \rho_{67}) = \rho_{07} = m_4(\rho_{01}, \rho_{12}, \rho_{23}, \rho_{37})$$

$$m_5(\rho_{01}, \rho_{14}, \rho_{45}, \rho_{56}, \rho_{67}) = \rho_{07} = m_5(\rho_{01}, \rho_{12}, \rho_{23}, \rho_{36}, \rho_{67})$$

このとき、非自明な  $A_\infty$  関係式が以下のように存在する.

$$\begin{aligned} m_5(\rho_{01}, m_3(\rho_{12}, \rho_{23}, \rho_{34}), \rho_{45}, \rho_{56}, \rho_{67}) + m_5(\rho_{01}, \rho_{12}, \rho_{23}, m_3(\rho_{34}, \rho_{45}, \rho_{56}), \rho_{67}) &= 0, \\ m_5(\rho_{01}, m_2(\rho_{12}, \sigma_{24}), \rho_{45}, \rho_{56}, \rho_{67}) + m_4(m_3(\rho_{01}, \rho_{12}, \sigma_{24}), \rho_{45}, \rho_{56}, \rho_{67}) &= 0, \\ m_5(\rho_{01}, \rho_{12}, \rho_{23}, m_2(\sigma_{35}, \rho_{56}), \rho_{67}) + m_4(\rho_{01}, \rho_{12}, \rho_{23}, m_3(\sigma_{35}, \rho_{56}, \rho_{67})) &= 0. \end{aligned}$$

この極小  $A_\infty$  圏を  $sC_\epsilon$  と表すことにする.

$\epsilon = 0$  のときの  $C_0$  と  $\epsilon \neq 0$  のときの  $C_\epsilon$  の組  $(C_0, C_\epsilon)$  が反例を与えることとなる. 簡単のため  $\epsilon \neq 0$  のときのものとして  $\epsilon = 1$  を考える.

**命題 6.2** ([12, Proposition 4.21]).  $A_\infty$  圏の組  $(C_0, C_1)$  は定理 5.4 の条件 (i), (ii), (iii) を満たす.

**命題 6.3** ([12, Proposition 4.22]). この極小  $A_\infty$  圏  $C_0, C_1$  は互いに  $A_\infty$  同型でない.

この2つの命題の証明は省略するが、要点をいうと、命題 6.2 は  $\epsilon$  に依存する2つの3次  $A_\infty$  積  $m_3$  の捻り積 (定義 5.1) への寄与が空間  $B^1$  に含まれるもののみとなることから従う. 命題 6.3 に関しては地道に  $A_\infty$  同型がないことをいわなければならないのであるが、今射の空間が  $i > j$  のときは  $sC(X_i, X_j) = 0$  という性質を満たし、つまり  $C_\epsilon$  は順序付き  $A_\infty$  圏と呼ばれるものになっている (cf. [20]) ので証明できるレベルのものになっている.

この2つの命題と定理 4.2 より、この  $(C_0, C_1)$  が問題 4.1 の反例となっていることがいえた.

**注意 6.4.** [12] においてこの反例を与えたが、そこでは上の射の次数について (iii) の部分がひとつずれていて、それに伴い (vii) の部分の次数もひとつずれている. [12, Example 4.20] におけるこの間違いを上のように訂正すべきであるが、上の命題 6.2 には影響なく、また命題 6.3 も変更なく同様に証明できることが Deroen Maes によって知らされた [18].

## 7. $A_\infty$ 増強の一意的な三角圏の例について

$A_\infty$  圏  $C$  に対し、 $H(C)$  は次数付き圏を成すが、その射の合成を2次の  $A_\infty$  構造とみなすことによって  $H(C)$  を高次 (3次以上) の  $A_\infty$  構造が自明な極小  $A_\infty$  圏とみなすことができる. 今、この意味で、 $A_\infty$  圏  $C$  として  $H(C)$  と  $A_\infty$  擬同型であるようなものを考えよう. 有理ホモトピー論に由来してこのような  $A_\infty$  圏は形式的であると呼ぶのが自然であろうが、とにかく  $C$  に極小模型定理 (定理 2.3) を適用すると  $C$  と  $A_\infty$  擬同型な極小  $A_\infty$  圏  $C$  で高次の  $A_\infty$  構造  $m'_3, m'_4, \dots$  が自明なものがとれるということであり、つまり  $C$  は本質的には高次の積を持たないということである.  $C$  が形式的な  $A_\infty$  圏のとき、補題 3.2 より三角圏同値  $Tr(C) \simeq Tr(H(C))$  が存在し、 $Tr(C)$  が  $H(C)$  のみから決まっていることを意味する.

今次数付き圏  $H(C)$  に, その射の合成を 2 次の  $A_\infty$  構造とする極小  $A_\infty$  圏の構造がどのくらいあるかについて考えてみよう. このようにしてできる極小  $A_\infty$  圏を次数付き圏  $H(C)$  の  $A_\infty$  拡張と呼ぶことにしよう. 高次の  $A_\infty$  積を自明とみなした  $A_\infty$  圏  $H(C)$  自身が  $A_\infty$  拡張のひとつの例であるが, 一般にはそれ以外にもあるだろう. 次数付き圏  $H(C)$  の任意の  $A_\infty$  拡張が  $A_\infty$  圏  $H(C)$  と  $A_\infty$  同型であるとき, 次数付き圏  $H(C)$  の  $A_\infty$  拡張は自明であるということにする. (次数付き圏  $H(C)$  の  $A_\infty$  拡張が自明ならば必ず  $C$  は  $A_\infty$  圏  $H(C)$  と  $A_\infty$  擬同型, つまり形式的である.)

以下, 次数付き圏  $H(C)$  の  $A_\infty$  拡張が自明な  $A_\infty$  圏  $C$  について考える. 例えば  $A_\infty$  圏  $C$  で  $H(C) = H^0(C)$  となるものを考える. つまり, すべての  $X, Y \in C$  に対して  $i \neq 0$  ならば

$$(H(C))^i(X, Y) = 0 \quad (9)$$

である. このとき, 次数勘定から,  $C$  の極小模型の高次の  $A_\infty$  積は自明となるので次数付き圏  $H(C)$  の  $A_\infty$  拡張は自明である.

次数付き圏  $H(C)$  の  $A_\infty$  拡張が自明な  $A_\infty$  圏  $C$  について, 三角圏  $T := Tr(C) = Tr(H(C))$  の  $A_\infty$  増強について考えよう.  $Tw(C)$  と別の  $A_\infty$  増強  $D$  が存在したとする. つまり三角圏同値  $\phi: T = H^0(Tw(C)) \rightarrow H^0(D)$  が存在したとする. これは (次数付き) 圏同値  $H(Tw(C)) \simeq H(D)$  が存在することを意味し, この制限として充満部分圏の同値  $H(C) \simeq H(C')$  が得られるように  $D$  の充満部分  $A_\infty$  圏  $C'$  をとると,  $A_\infty$  同値の列

$$C \simeq H(C) \simeq H(C') \simeq C'$$

が存在する. 特に  $H(C') \simeq C'$  は  $A_\infty$  擬同型であり, それは次数付き圏  $H(C') \simeq H(C)$  の  $A_\infty$  拡張が自明であり, ゆえに  $H(C')$  をコホモロジーとして持つ  $A_\infty$  圏  $C'$  は形式的であることから従う. 一方  $Tw(C')$  は  $D$  の充満部分  $A_\infty$  圏であるので対応する  $A_\infty$  関手を  $\iota: Tw(C') \rightarrow D$  を表す. このとき図式

$$\begin{array}{ccccc} Tw(C) & \xrightarrow{\simeq} & Tw(C') & \xrightarrow{\iota} & D \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ T & \xrightarrow{\simeq} & Tr(C) & \xrightarrow{H^0(\iota)} & H^0(D) \end{array} \quad (10)$$

が得られ, 特に上の段の矢印は  $A_\infty$  関手, 下の段の矢印は三角関手であり, 問題 4.1 の意味で可換である. 左側の可換図式は上の  $A_\infty$  擬同型の列に補題 3.2 を適用して得られるものであり, 右側の可換図式は  $\iota$  の定義から自然に得られるものである. 今  $H^0(\iota)$  は (充満忠実) 三角関手であり, これと三角圏同値関手  $Tr(C) \rightarrow Tr(C')$  との合成 (図 10 の下段の関手の合成) を  $\phi: Tr(C) \rightarrow H^0(D)$  と表すとこの三角関手  $\phi$  の  $H^0(C) \subset Tr(C)$  への制限は  $\phi$  の  $H^0(C)$  への制限と一致する. 特に  $H^0(C)$  は  $T = Tr(C)$  の生成系であるので  $\phi$  と  $\phi$  は自然同

値であり、このことと図 10 より  $\phi'$  が、つまり  $\phi$  がリフト  $Tw(C) \rightarrow D$  を持つことが分かった。以上をまとめると：

**定理 7.1.**  $C$  を次数付き圏  $H(C)$  の  $A_\infty$  拡張が自明な  $A_\infty$  圏とするとき、三角圏  $Tr(C)$  の  $A_\infty$  増強は一意的である。

この事実は [12] の議論に陰に含まれるものではあるが、[12] では主に上のような  $C$  としてより性質のよい状況として、 $H(C) \subset Tr(C)$  が三角圏  $Tr(C)$  における強例外的生成系 (full strongly exceptional collection) の場合について議論している。

まず次数付き圏  $H(C)$  の  $A_\infty$  拡張が自明な  $A_\infty$  圏  $C$  の例として上で述べた  $H(C) = H^0(C)$  なるものについて考えよう。このとき  $Tr(C)$  は代数

$$A := \bigoplus_{X, Y \in C} (H(C))^0(X, Y)$$

によって決定されることとなる。

一方、( $H(C)$  のそれぞれの射の空間が有限次元である) 一般の  $A_\infty$  圏  $C$  について、 $C$  の対象が有限個で、それらを  $E_1, \dots, E_n \in C$  と表したとき、任意の  $i$  について  $H(C)(E_i, E_i) \simeq K$  かつ任意の  $i > j$  について

$$H(C)(E_i, E_j) = 0$$

となるとき、( $E_1, \dots, E_n$ ) は三角圏  $Tr(C)$  の例外的生成系といわれるものを定めている (これはほぼ定義そのもの [1, 2], cf. [11])。特に例外的生成系 ( $E_1, \dots, E_n$ ) がさらに任意の  $i < j$  と  $k \neq 0$  について

$$(H(C))^k(E_i, E_j) = 0$$

を満たすとき、( $E_1, \dots, E_n$ ) は  $Tr(C)$  における強例外的生成系となる ([1, 2], cf. [11])。この  $C$  が強例外的生成系を成す場合は、 $C$  は上の  $H(C) = H^0(C)$  を満たすもののうちのかなり性質のよいものであり、このとき  $Tr(C)$  は有限次元代数  $A$  上の有限生成左加群の成す導来圏  $D^b(\text{mod-}A)$  と同値となり ([1, 2], cf. [11])、つまりこのとき導来圏  $D^b(\text{mod-}A)$  の  $A_\infty$  増強は一意的であることがいえる。([12, 系 5.6])。もう少し一般の状況で、 $A$  がホモロジー次元の有限な有限次元代数のときも、同様に  $Tr(C) \simeq D^b(\text{mod-}A)$  となり、この  $A_\infty$  増強が一意的であることとなる。

最後に定理 7.1 から簡単に得られる事実を 2 つ並べておく。

**系 7.2.**  $H(C) = H^0(C)$  なる  $A_\infty$  圏  $C$  に対し、三角圏  $Tr(C)$  の  $A_\infty$  増強は一意的である。

**系 7.3.**  $C$  が 3 つ以下の対象から成る  $A_\infty$  圏で  $Tr(C)$  の例外的生成系を成すとき、三角圏  $Tr(C)$  の  $A_\infty$  増強は一意的である。

実際、次数付き圏  $H(C)$  の  $A_\infty$  拡張が一意的であることは系 7.2 の場合は上で述べた通りであるが、系 7.3 の場合も、3 つ以上の射の  $A_\infty$  積が存在しないことから明らかである。

## 8. おわりに

ホモロジー的ミラー対称性を議論する際も（個人的には） $A_\infty$  圏の同値性がより本質的であるように思え（例えば [15, 8]），三角圏の同値性は単にそれから従う結果のように思える．実際，本稿で議論したように， $A_\infty$  圏  $Tw(C)$  から三角圏  $Tr(C)$  に落とすと一般には情報が失われるわけだから， $Tw(C)$  が考えるべき最も基本的なものなのではないかと思えてくる．しかし， $Tw(C)$  は一般に  $C$  と比べて対象の数が膨大である． $Tr(C)$  と比べても，高次の積構造も残っているし，射もすべての次数のものを含んでいる．次数に関しては  $H(Tw(C))$  は  $H^0(Tw(C)) = Tr(C)$  から復元できるわけだし，高次の積を捨てて三角圏  $Tr(C)$  にしてしまっても  $A_\infty$  圏  $Tw(C)$  のかなりの情報が含まれている（cf. [12]）わけなので， $Tw(C)$  は何か情報のダブった，無駄の多い形で定義されている．このようなわけで，何か  $Tw(C)$  と等価な情報を持つものの別の定式化を探すべきなのかもしれない．

一方，今回例 6.1 において構成した  $A_\infty$  増強の一意的でない三角圏などが，例えば何らかの多様体上の接続層の導来圏や行列因子化の成す三角圏として得られるものなのかどうかは今のところ分かっていない．例 6.1 の  $C_\epsilon$  は順序付き  $A_\infty$  圏であり，つまり  $C_\epsilon$  は  $Tr(C_\epsilon)$  の例外的生成系を成すので， $Tr(C_\epsilon)$  がセール関手を持つ（[1], cf.[11]）という意味である程度性質のよいものではあるが，どのクラスの三角圏がどのような幾何から得られるものであるのか？ などということも興味深い問題だと思っている．つまり，それぞれの幾何から三角圏を定める方法を固定したとき， $A_\infty$  増強の一意的な幾何がどのくらいあるのか？ もし  $A_\infty$  増強の一意的でない幾何の方が”十分例外的”なようであれば，一旦それらを例外的であるとし，例外的でない幾何に対して  $A_\infty$  圏でなく三角圏のみを考えるという方向性が妥当なのかもしれない．

## REFERENCES

- [1] A. Bondal, Representations of associative algebras and coherent sheaves. (Russian) *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 53:25–44, 1989; translation in *Math. USSR-Izv.* 34:23–42, 1990; *Helices, representations of quivers and Koszul algebras. Helices and vector bundles*, 75–95, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 148, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
- [2] A. Bondal and M. Kapranov, Enhanced triangulated categories. *Math. USSR Sbornik* 70:93–107, 1991.
- [3] K. Fukaya. Morse homotopy,  $A^\infty$ -category, and Floer homologies. In *Proceedings of GARC Workshop on Geometry and Topology '93 (Seoul, 1993)*, volume 18 of *Lecture Notes Ser.*, pages 1–102. Seoul Nat. Univ., Seoul, 1993.
- [4] K. Fukaya. Floer homology and mirror symmetry. II. In *Minimal surfaces, geometric analysis and symplectic geometry*, volume 34 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 31–127. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2002. (Baltimore, MD, 1999).
- [5] I. Gelfand and Y. Manin. *Methods of Homological Algebra*. Springer-Verlag, 1994.



- [6] T. V. Kadeishvili. The algebraic structure in the homology of an  $A(\infty)$ -algebra. (Russian) *Soobshch. Akad. Nauk Gruzin. SSR* 108:249–252 (1982).
- [7] H. Kajiura. Noncommutative homotopy algebras associated with open strings. *Reviews in Math. Phys.*, 19(1):1–99, 2007. math.QA/0306332.
- [8] H. Kajiura. Homological perturbation theory and homological mirror symmetry. In *Higher Structures in Geometry and Physics*, volume 287 of *Progress in Math.*, page 201–226, Birkhäuser/Springer, New York, 2011.
- [9] 梶浦宏成.  $A_\infty$  圏と有限次元代数の表現論. 第 11 回 代数群と量子群の表現論 研究集会報告集, 2008.
- [10] 梶浦宏成. マッセイ積の一般化と三角圏. 空間の代数的・幾何的モデルとその周辺 2009 (於 信州大学) 報告集.
- [11] 梶浦宏成. 数物系のための圏論—導来圏、三角圏、 $A_\infty$  圏を中心に. SGC ライブラリ 75, 数理科学, 2010.
- [12] H. Kajiura. On  $A_\infty$ -enhancements for triangulated categories. *J. Pure Appl. algebra*. 217: 1476–1603, 2013.
- [13] M. Kashiwara and P. Shapira. *Sheaves on Manifolds. Grundlehren* 292, Springer-Verlag, 1990.
- [14] M. Kontsevich. Homological algebra of mirror symmetry. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, (Zürich, 1994)*, volume 184, pages 120–139. Birkhäuser, 1995. math.AG/9411018.
- [15] M. Kontsevich and Y. Soibelman. Homological mirror symmetry and torus fibrations. In *Symplectic geometry and mirror symmetry (Seoul, 2000)*, pages 203–263. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2001. math.SG/0011041.
- [16] V. A. Lunts and D.O. Orlov. Uniqueness of enhancement for triangulated categories. arXiv:0908.4187, 2009.
- [17] J. P. May, Matric Massey products. *J. Algebra* 12:533–568, 1969.
- [18] D. Maes, private communication, November 8, 2013.
- [19] F. Muro, S. Schwede, and N. Strickland, Triangulated categories without models. *Invent. Math.* 170: 231–241, 2007.
- [20] P. Seidel, *Fukaya categories and Picard-Lefschetz theory, Zurich Lectures in Advanced Mathematics*, European Mathematical Society (EMS), Zurich, 2008.
- [21] J. Stasheff. Homotopy associativity of H-spaces, I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 108:293–312, 1963.
- [22] J. Stasheff. Homotopy associativity of H-spaces, II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 108:313–327, 1963.

FACULTY OF SCIENCE, CHIBA UNIVERSITY, CHIBA 263-8522, JAPAN

*E-mail address:* kajiura@math.s.chiba-u.ac.jp