数理解析研究所講究録
第 1919 巻 2014 年 61-68

不規則摂動系におけるカオス現象*

京都大学・情報学研究科　矢ヶ崎一幸
Kazuyuki Yagasaki
Graduate School of Informatics,
Kyoto University

1 はじめに

次の微分方程式系を考える.

$$\dot{x}=f(x)+\varepsilon(b(x)\eta(t)+c(x)),\quad x\in\mathbb{R}^{n} \tag{1}$$

ここで, $0<\varepsilon\ll 1$ であり, $f,b,c:\mathbb{R}^{n}\rightarrow\mathbb{R}^{n}$ は C^{N} 級 $(N\geq 2)$ で, $f(0),b(0),c(0)=0$ かつ $\mathrm{D}b(0)=0$ を満たすものとする. また, $\eta(t)$ は平均値 0, 自己相関関数 $r:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ のスカラー定常 Gauss 過程とする:

$$\mathbb{E}[\eta(t)]=0,\quad \mathbb{E}[\eta(t)\eta(t+\tau)]=r(\tau)$$

さらに, $r(\tau)$ は連続かつ, $(-\infty,\infty)$ 上で絶対積分可能であり, 連続スペクトルを有するものとする. このとき, 丸山の定理 [3, 10] により, $\eta(t)$ はエルゴード的であり, 任意の可測関数 $\phi:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{T\rightarrow\infty}\frac{1}{T}\int_{0}^{T}\phi(\eta(t))\mathrm{d}t=\mathbb{E}[\phi(\eta(t))]\quad \text{a.s.}$$

を満たす. このように, 式 (1) は確定的な系

$$\dot{x}=f(x) \tag{2}$$

が不規則な摂動を受ける場合を表す. また, 一般性を失うことなしに $r(0)=1$ とし, 非摂動系 (2) において原点 $x=0$ は双曲型鞍点で, 孤立したホモクリニック軌道を有するものとする. 自己相関関数 $r(\tau)$ に対して, $\eta(t)$ が確率 1 で Hölder 連続となるような, $\tau=0$ における条件をさらに仮定する (第 2 節を参照せよ).

$\eta(t)$ が確定的な関数の場合, 式 (1) の形の力学系に対しては非常に多くの研究がなされている. 特に, **Melnikov の方法** [11] と呼ばれる大域的な摂動法が応用あるいは拡張さ

*本研究は科研費 (課題番号:21540124, 22540180, 25400168) の助成を受けたものである.

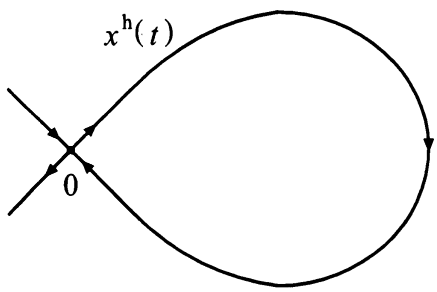

図 1: 仮定 (A4)

れ，カオス現象が調べられている．周期的な場合に対しては文献 [4, 11, 13]，準周期的な場合に対しては文献 [16, 17]，一般的な非周期的な場合に対しては文献 [8, 15] を参照せよ．各々の場合において，**Melnikov 関数あるいは積分**と呼ばれる積分を計算することによって，カオス軌道の存在する条件が求められている．さらに，類似のアプローチにより，特別な有界および非有界の不規則な摂動を受ける 2 次元系が，それぞれ，文献 [8] および [9] において論じられている．後者は，$\Delta > 0$ を小さな定数とし，$0 < \varepsilon/\sqrt{\Delta} \ll 1$ を ε に置き換えて，式 (1) において

$$r(\tau) = \max\left(1 - \frac{|\tau|}{\Delta}, 0\right), \quad c(x) \equiv 0$$

とした場合に対応する．

本報告では，式 (1) の形の一般的な不規則摂動系において確率 1 でカオス現象が生じることを示している，文献 [18] の結果を概括する．この結果は，摂動項において $b(x)\eta(t)$ の影響が $c(x)$ に勝るときに限りカオス現象が起こる確定的な場合と非常に対照的である．採用されているアプローチは文献 [9] のものと類似であるが，対応する Melnikov 関数の有用な確率的性質が示されて用いられている．詳細および証明については文献 [18] を参照せよ．また，上記のような事実には全く触れられず，取扱いも数学的な厳密さを欠くものであるが，式 (1) と類似の不規則摂動系がかなり以前に文献 [5, 14] で扱われている．

2　問題設定

第 1 節で述べたように，まず次のことを仮定する．

(A1) $f(0), b(0), c(0) = 0$ かつ $\mathrm{D}b(0) = 0$.

(A2) $\eta(t)$ の自己相関関数 $r(\tau)$ は連続で，$(-\infty, \infty)$ 上絶対積分可能であり，$C, \alpha > 0$ をある定数として次式を満たす．

$$1 - r(\tau) \le C|\tau|^{\alpha} \quad (\tau \to 0)$$

特に，$r(0) = 1$ である．

仮定 (A1) は，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $x = 0$ が式 (1) の定数解であることを意味する．仮定 (A2) によって，$\eta(t)$ は確率 1 で Hölder 連続となる (文献 [2] の第 9.2 節を参照せよ)．
非摂動系 (2) に対して次のことを仮定する：

(A3) 原点 $x = 0$ は双曲型鞍点で，ヤコビ行列 $\mathrm{D}f(0)$ は実部負および正の固有値を，それぞれ，n_s および n_u 個 $(n_\mathrm{s} + n_u = n)$ 有する．

(A4) 平衡点 $x = 0$ はホモクリニック軌道 $x^\mathrm{h}(t)$ を有し，$\lim_{t\to\pm\infty} x^\mathrm{h}(t) = 0$ が成立する (図 1 を参照せよ)．

仮定 (A3) と (A4) は式 (2) において鞍点 $x = 0$ が n_s および n_u 次元安定および不安定多様体，W_0^s および W_0^u，を有し，それらがホモクリニック軌道 $x = x^\mathrm{h}(t)$ に沿って交差することを意味する．
非摂動系 (2) に対する $x^\mathrm{h}(t)$ まわりの変分方程式

$$\dot{\xi} = \mathrm{D}f(x^\mathrm{h}(t))\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \tag{3}$$

を考える．明らかに，$\xi = \dot{x}^\mathrm{h}(t)$ は式 (3) の有界な解で，

$$\lim_{t\to\pm\infty} \dot{x}^\mathrm{h}(t) = 0$$

を満たす．変分方程式 (3) に対して次のことを仮定する．

(A5) 式 (3) において，$\xi = \dot{x}^\mathrm{h}(t)$ と独立で有界な解は存在しない．

仮定 (A5) より，$x = x^\mathrm{h}(t)$ は孤立したホモクリニック軌道で，それに沿って

$$\dim(T_x W_0^\mathrm{s} \cap T_x W_0^\mathrm{u}) = 1$$

となる．
次に，不規則摂動系 (1) を考え，いくつかの準備を与える．ここでの取扱いの一般的な枠組みに対しては文献 [1] を参照せよ．
まず，$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ によって，$\Omega = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ を標本空間，$\mathscr{F}$ を Ω の Borel σ 代数，$\mathbb{P}$ を $\eta(t)$ の有限次元分布で決定される確率測度とする確率空間と表す．標準的な取扱い [1] に従って，式 (1) に対し，$\mathbb{P}$-保存測度流れ $\theta = \{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$，$\theta_t : \Omega \to \Omega$，を次のように定義する．

$$\theta_t \omega(\tau) = \omega(t + \tau)$$

ここで，$\omega \in \Omega$ および $t, \tau \in \mathbb{R}$ である．直ちに

(i) $\theta_0 = \mathrm{id}$;

(ii) $\theta_t \theta_\tau = \theta_{t+\tau}$ for $t, \tau \in \mathbb{R}$;

(iii) $\theta_t \mathbb{P} = \mathbb{P}$ for $t \in \mathbb{R}$

が導かれる．ここで，$\mathrm{id}:\Omega\to\Omega$ は恒等写像であり，測度 $\theta_t\mathbb{P}$ は $A\in\mathscr{F}$ に対して $\theta_t\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(\theta_{-t}A)$ によって定められる．

$D_1\subset D_2\subset\mathbb{R}^n$ をホモクリニック軌道 $x^{\mathrm{h}}(t)$ を含む領域，すなわち，

$$D_j\supset\{x^{\mathrm{h}}(t)\mid t\in\mathbb{R}\}\cup\{0\},\quad j=1,2,$$

とし，$\chi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ を，任意の $x\in\mathbb{R}^n$ に対して $0\le\chi(x)\le 1$ かつ

$$\chi(x)=\begin{cases}1 & \text{for } x\in D_1;\\ 0 & \text{for } x\in\mathbb{R}^n\setminus D_2\end{cases}$$

を満たす C^∞ 級の bump 関数とする．

$$\tilde{f}(x)=f(x)\chi(x),\quad \tilde{c}(x)=c(x)\chi(x),\quad \tilde{b}(x)=b(x)\chi(x)$$

とおき，次の系を考える．

$$\dot{x}=\tilde{f}(x)+\varepsilon(\tilde{b}(x)\eta(t)+\tilde{c}(x))\tag{4}$$

式 (4) の軌道は，領域 D_1 に留まるならば，また式 (1) の軌道となる．

与えられた初期条件に対して，式 (4) は初期値について C^N 級の大域解を唯一つ有する [1]．$\omega\in\Omega$ に対して，初期条件 $x(0)=x_0\in\mathbb{R}^n$ を満たす唯一つの大域解を $x=\varphi_\varepsilon(t,\omega)x_0$ と表し，コサイクル条件

(i) $\varphi_\varepsilon(0,\omega)=\mathrm{id}$;

(ii) $\varphi_\varepsilon(t+\tau,\omega)=\varphi_\varepsilon(t,\theta_\tau\omega)\varphi_\varepsilon(\tau,\omega)$ for $t,\tau\in\mathbb{R}$

を満たす，θ 上の C^N 級の大域的不規則力学系 $\varphi_\varepsilon(t,\omega):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ を定義する．一般に，確率変数 $\bar{x}(\omega)$ が

$$\varphi_\varepsilon(t,\omega)\bar{x}(\omega)=\bar{x}(\theta_t\omega)\quad \text{a.s.}\quad \text{for } t\in\mathbb{R}$$

を満たすとき，$\varphi_\varepsilon(t,\omega)$ の**定常解**という．仮定 (A1) により $f(0),b(0),c(0)=0$ であるから，$\bar{x}(\omega)\equiv 0$ は定常解となる．

以下では確率 1 の事象を Ω_1 と記す．すなわち，$\Omega_1\in\mathscr{F}$ かつ $\mathbb{P}(\Omega_1)=1$ である．

3 横断的ホモクリニック軌道の存在

E_0^{s} および E_0^{u} を，それぞれ，非摂動系 (2) の $x=0$ における線形化方程式

$$\dot{\xi}=\mathrm{D}f(0)\xi$$

に対する安定および不安定部分空間とする．

命題 1. $\omega\in\Omega_1$ とする．任意の $T>0$ に対して無限列 $\{q_j(\omega)\}_{j=-\infty}^{\infty}$ が存在し，十分小さな $\varepsilon>0$ に対して，$q\in[q_j(\omega)-T,q_j(\omega)+T]$ のとき，W_0^{s} および W_0^{u} の $\mathscr{O}(\varepsilon)$ 近傍に，それぞれ，次の条件を満たす n_{s} および n_{u} 次元 C^N 多様体，$W_{\varepsilon,q}^{\mathrm{s}}(\omega)$ および $W_{\varepsilon,q}^{\mathrm{u}}(\omega)$，が存在する．

(ia) $x \in W^{\mathrm{s}}_{\varepsilon,q}(\omega)$ に対して，$t \to \infty$ のとき指数関数的に $\varphi_\varepsilon(t, \theta_q\omega)x \to 0$;

(ib) $x \in W^{\mathrm{u}}_{\varepsilon,q}(\omega)$ に対して，$t \to -\infty$ のとき指数関数的に $\varphi_\varepsilon(t, \theta_q\omega)x \to 0$;

(ii) $W^{\mathrm{s,u}}_{\varepsilon,q}(\omega)$ は q に関して連続;

(iiia) $t+q \in [q_k(\omega)-T, q_k(\omega)+T]$ のとき，$k \geq j$ に対して $\varphi_\varepsilon(t, \theta_q\omega)W^{\mathrm{s}}_{\varepsilon,q}(\omega) \subset W^{\mathrm{s}}_{\varepsilon,q}(\theta_t\omega)$;

(iiib) $t+q \in [q_k(\omega)-T, q_k(\omega)+T]$ のとき，$k \leq j$ に対して $\varphi_\varepsilon(t, \theta_q\omega)W^{\mathrm{u}}_{\varepsilon,q}(\omega) \subset W^{\mathrm{u}}_{\varepsilon,q}(\theta_t\omega)$;

(iv) $\varepsilon > 0$ と $\omega \in \Omega_1$ に依存しないある定数 $\delta > 0$ に対して，C^N 級関数 $h^{\mathrm{s}}_{\varepsilon,q} : E^{\mathrm{s}}_0 \times \Omega_1 \to E^{\mathrm{u}}_0$ および $h^{\mathrm{u}}_{\varepsilon,q} : E^{\mathrm{u}}_0 \times \Omega_1 \to E^{\mathrm{s}}_0$ が存在し，

$$W^{\mathrm{s}}_{\varepsilon,q}(\omega) \cap B_\delta = \{(s,u) \in (E^{\mathrm{s}}_0 \times E^{\mathrm{u}}_0) \cap B_\delta \mid u = h^{\mathrm{s}}_{\varepsilon,q}(s,\omega)\}$$

および

$$W^{\mathrm{u}}_{\varepsilon,q}(\omega) \cap B_\delta = \{(s,u) \in (E^{\mathrm{s}}_0 \times E^{\mathrm{u}}_0) \cap B_\delta \mid s = h^{\mathrm{u}}_{\varepsilon,q}(u,\omega)\}$$

となる．ここで，$B_\delta \subset \mathbb{R}^n$ は原点を中心とする半径 δ の n 次元閉球を表し，$h^{\mathrm{s,u}}_{\varepsilon,q}(0,\omega) = 0$ かつ $\mathrm{D}_s h^{\mathrm{s}}_{\varepsilon,q}(0,\omega), \mathrm{D}_u h^{\mathrm{u}}_{\varepsilon,q}(0,\omega) = \mathscr{O}(\varepsilon)$ である．さらに，$h^{\mathrm{s}}_{\varepsilon,q}(s,\omega)$ および $h^{\mathrm{u}}_{\varepsilon,q}(u,\omega)$ は q に関して連続かつ，ε と s および u に関して C^N 級で，$\omega \in \Omega_1$ について一様有界な k 階偏導関数 $(k = 1, \ldots, N)$ を有する．

命題1の証明は文献 [18] を参照せよ．そこでは，Gauss 過程の極値についての古典的な結果 [12] が用いられている．$W^{\mathrm{s}}_{\varepsilon,q}(\omega)$ および $W^{\mathrm{u}}_{\varepsilon,q}(\omega)$ を，それぞれ，式 (1) に対する $t = q$ における**安定**および**不安定多様体**と呼ぶ．

$W^{\mathrm{s}}_{\varepsilon,q}(\omega)$ と $W^{\mathrm{u}}_{\varepsilon,q}(\omega)$ が点 $x \neq 0$ において交差するとき，式 (1) は定常解 $x = 0$ に対する**ホモクリニック軌道** $x_\varepsilon(t,\omega)$ を有する．すなわち，

$$\lim_{t \to \pm\infty} x_\varepsilon(t,\omega) = 0$$

となる．$W^{\mathrm{s}}_{\varepsilon,q}(\omega)$ と $W^{\mathrm{u}}_{\varepsilon,q}(\omega)$ の交差が横断的であるとき，ホモクリニック軌道 $x_\varepsilon(t,\omega)$ は**横断的**であるという．

定理 1. $\omega \in \Omega_1$ および十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して，式 (1) は無限個の横断的ホモクリニック軌道 $x^j_\varepsilon(t,\omega)$，$j \in \mathbb{Z}$，を有し，$t_j(\omega) < t_{j+1}(\omega)$，$\lim_{j\to\pm\infty} t_j(\omega) = \pm\infty$ を満たす無限列 $\{t_j(\omega)\}_{j=-\infty}^{\infty}$ が存在して，$x^j_\varepsilon(t,\omega)$ は $t = t_j(\omega)$ において $x^{\mathrm{h}}(0)$ の $\mathscr{O}(\varepsilon)$ 近傍を通過する．

再び，定理1の証明は文献 [18] を参照せよ．そこでは，Melnikov の方法のアプローチと Gauss 過程のレベル通過についての古典的な結果 [2, 7] が用いられている．定理1の無限列 $\{t_j(\omega)\}_{j=-\infty}^{\infty}$ を，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $t_j(\theta_t\omega) = t_j(\omega) - t$，$j \in \mathbb{Z}$，を満たすように選ぶ．

4 カオス

命題1のように$\delta > 0$を十分小さく取り，点$x^{\mathrm{h}}(0)$を∂B_δからの距離が$\mathscr{O}(1)$となるように選ぶ．$T_\delta^\pm$をある時刻で，$T_\delta^- < 0 < T_\delta^+$，$x^{\mathrm{h}}(T_\delta^\pm) \in \partial B_\delta$かつ$t \notin (T_\delta^-, T_\delta^+)$に対して$x^{\mathrm{h}}(t) \in B_\delta$が成立するものとする．このとき

$$|T_\delta^\pm| = \mathscr{O}(|\log \delta|)$$

となる．定理1の無限列$\{t_j(\omega)\}_{j=-\infty}^{\infty}$から，

$$\tau_{j+1}(\omega) - \tau_j(\omega) > T_\delta^+ - T_\delta^-, \quad j \in \mathbb{Z}$$

を満たすように部分列$\{\tau_j(\omega)\}_{j=-\infty}^{\infty}$を選ぶ．

$a = \{a_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$を$a_j = 1$あるいは2，$j \in \mathbb{Z}$，を満たす無限列とし，すべてのこのような記号列全体の集合をΣ_2によって表す．$\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$をシフト写像

$$\sigma(a)_j = a_{j+1}, \quad j \in \mathbb{Z}$$

とし，**拡張シフト写像**$\bar{\sigma} : \Sigma_2 \times \mathbb{Z} \to \Sigma_2 \times \mathbb{Z}$を

$$\bar{\sigma}(a, j) = (\sigma(a), j+1)$$

によって定義する．$P_{\varepsilon,j}(\omega) = \varphi_\varepsilon(\tau_{j+1}(\omega) - \tau_j(\omega), \theta_{\tau_j(\omega)}\omega)$とおき，

$$P_\varepsilon(\omega) : (x, j) \mapsto (P_{\varepsilon,j}(\omega)(x), j+1)$$

とする．

定理 2. $\omega \in \Omega_1$と十分小さな$\varepsilon > 0$に対して，$P_j^\varepsilon(\omega)\Lambda_j(\omega) = \Lambda_{j+1}(\omega)$を満たす集合の無限列$\Lambda_j(\omega) \subset \mathbb{R}^n$，$j \in \mathbb{Z}$，が存在して，次の可換図式が成立する．

$$\begin{array}{ccc} \Lambda(\omega) & \xrightarrow{P^\varepsilon} & \Lambda(\omega) \\ {\scriptstyle h}\big\downarrow & & {\scriptstyle h}\big\downarrow \\ \Sigma_2 \times \mathbb{Z} & \xrightarrow{\bar{\sigma}} & \Sigma_2 \times \mathbb{Z} \end{array}$$

ここで，各$j \in \mathbb{Z}$に対して$\Lambda_j(\omega)$はカントール集合で，$\Lambda(\omega) = \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} \Lambda_j(\omega) \times \{j\}$であり，$h_j(x)$を，$h_j^{-1}$が$j$について一様に同程度連続となる，$\Lambda_j(\omega)$から$\Sigma_2$上への同相写像として，$h(x; j) = (h_j(x), j)$である．

定理2は標準的なホモクリニック定理(例えば，文献[6])の写像列の場合に対する拡張で，証明は文献[18]を参照せよ．$t = \tau_j(\omega)$において$\Lambda_j(\omega)$を通過する軌道は不安定で，初期条件に対して鋭敏に依存する．

5　例

上の理論の有用性を示すために，次の不規則な摂動を受ける 2 重井戸型ポテンシャルの Duffing 振動子を考える．

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 - x_1^3 + \varepsilon(x_1^2\eta(t) - \delta x_2) \tag{5}$$

ここで，$\delta > 0$ は定数であり，$\eta(t)$ は平均値 0 かつ，$\gamma > 0$ を定数として，自己相関関数

$$r(\tau) = \exp(-\gamma|\tau|)$$

を有する定常 Ornstein-Uhlenbeck 過程とする．同様の系が文献 [8, 9] で調べられている．$n = 2$，$n_{\mathrm{s}} = n_u = 1$ として仮定 (A1)-(A5) が成立し，特に，非摂動ホモクリニック軌道は次式で与えられる．

$$x_{\pm}^{\mathrm{h}}(t) = (\pm\sqrt{2}\,\mathrm{sech}\,t, \mp\sqrt{2}\,\mathrm{sech}\,t\,\tanh t)$$

定理 1 および 2 を適用することによって，任意の $\delta > 0$ に対して，$\varepsilon > 0$ が十分小さいとき，式 (5) において無限個の横断的ホモクリニック軌道が存在し，確率 1 でカオス現象が起こることが示される．

参考文献

[1] Arnold L 1998 *Random Dynamical Systems* (Berlin: Springer)

[2] Cramér H and Leadbetter M R 1967 *Stationary and Related Stochastic Processes: Sample Function Properties and Their Applications* (New York: John Wiley and Sons)

[3] Grenander U 1981 *Abstract Inference* (New York: John Wiley and Sons)

[4] Guckenheimer J and Holmes P 1983 *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (New York: Springer)

[5] Gundlach V M 2000 Random homoclinic dynamics *International Conference on Differential Equations (Berlin, 1999), Vol. 1* (River Edge, NJ: World Scientific) pp 12732

[6] Katok A and Hasselblatt B 1995 *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems* (Cambridge: Cambridge University Press)

[7] Leadbetter M R, Lindgren G and Rootzén H 1983 *Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes* (New York: Springer)

[8] Lu K and Wang Q 2010 Chaos in differential equations driven by a nonautonomous force *Nonlinearity* **23** 2935–2975

[9] Lu K and Wang Q 2011 Chaotic behavior in differential equations driven by a Brownian motion *J. Differential Equations* **251** 2853–2895

[10] Maruyama G 1949 The harmonic analysis of stationary stochastic processes *Mem. Fac. Sci. Kyūsyū Univ. A.* **4** 45–106

[11] Melnikov V K 1963 On the stability of a center for time-periodic perturbations *Trans. Moscow Math. Soc.* **12** 1–57

[12] Nishio M 1967 On the extreme values of Gaussian processes *Osaka J. Math.* **4** 313–326

[13] Palmer K J 1984 Exponential dichotomies and transversal homoclinic points *J. Differential Equations* **55** 225–256

[14] Simiu E 2002 *Chaotic Transitions in Deterministic and Stochastic Dynamical Systems* (Princeton: Princeton University Press)

[15] Stoffer D 1988 Transversal homoclinic points and hyperbolic sets for nonautonomous maps I & II *Z. Angew. Math. Phys.* **39** 518–549; *Z. Angew. Math. Phys.* **39** 783–812

[16] Wiggins S 1992 *Chaotic Transport in Dynamical Systems* (New York: Springer)

[17] Yagasaki K 1992 Chaotic dynamics of quasi-periodically forced oscillators detected by Melnikov's method *SIAM J. Math. Anal.* **23**, 1230–1254

[18] Yagasaki K Melnikov processes and chaos in randomly perturbed dynamical systems, in preparation