数理解析研究所講究録
第1920巻 2014年 128-136

大学の数学は学校教育，社会生活における数学の背景となっているか？ －相似について－

鹿児島大学名誉教授　安井　孜 (Yasui tsutomu)
Professor Emeritus, Kagoshima University

1　動機

以前から，図形教育には問題が多く [19, p. 109, p. 139],「定義と性質の混同がある」[10] と言われてきた．にもかかわらず，数学教育研究者の間でも，数学教員の間でも，相似に関する研究は非常に少ない [16, p. 258]．中学校・高等学校における論理と平面図形とに関し，大学の授業と指導要領・現場の扱いの乖離に筆者も疑問を持っていた．ここでは，相似に焦点を当て，その問題点を探る．

問題点1 相似は，合同とは異なり，大学の授業でとり上げられる可能性は低い．数学教育学の専門家が授業で相似をとり上げる場合，指導要領の解説がほとんどであるという疑いがある．にも関わらず，教育現場で，数学教師は相似を教えなければならない．結局，相似に関し数学教師の多くは中学校・高等学校の知識を超えていない疑いが強い．これについては，高木貞治の警告 [5, 緒言，p. 2][1] がある．

問題点2 指導要領では，相似の定義の候補として，３つ挙げてある．どれを定義とし，どれを同値な性質とするかは，教科書出版社，同執筆者，授業をする数学教師に委ねられている．しかも，3つの同値性は証明することが期待されていない．1つの用語に対して定義が複数あるというアイディアは大学の専門科目にはない．大学における数学と教育現場における数学との間にギャップがあることを，大学の教員，現場の教師は認識しているだろうか．

問題点3 教科書では，相似の定義は書いてあるが，定義と明示されていない．教科書によっては，相似の定義の表現が非論理的であいまいで，小学校の教科書の拡大・縮小の方が論理的であることもある．結果，定義と性質の違いの区別があいまいになる恐れがある．

問題点4 三角形の３つの相似条件は証明が与えられていない．証明には，平行線と線分の比との関係を使うので，現行の教科書では循環論法になるのではないかとい

[1] 夫れ教師は其教ふる所の学科につきて含蓄ある知識を要す．算術教師が算術の知識を求むる範囲其教ふる児童の教科用書と同一程度の者に限らるゝこと，極めて危殆なりと謂うべし．確実なる知識の欠乏を補ふに，教授法の経験を以てせんとするは,「無き袖を振はん」とするなり．

う恐れがあると中川 [12, p. 30] は主張する．これはどのように考えればよいのか？理論としての数学と，教育としての数学の違いを認めればそれで良いのか．

相似の基となる拡大・縮小は新指導要領により，中学１年から小学６年に降りた．相似は中学３年のままである．小学校の先生には負担が増し，生徒の方も中２年間のギャップが生じる．

指導要領では，たとえ相似の関係を使っていても，中３の相似の部分と，図形の他の部分や関数との関係は言及されていない．高校では，相似を使って証明する場面が何箇所かあるが，あまり表面には出てこない．

問題点１で述べたように，大学の初等 (ユークリッド) 幾何の授業では，合同は扱っても，相似を扱うことは，余り期待できない．まず小学校から高校まで，相似の取り扱いを連続的に捉え，大学の教育ではどのように扱えばよいか，考察したい．

第２節で，学習指導要領，同解説 [1]，[2]，[3] で，相似をどのように扱っているか紹介する．第３節では，東京書籍と啓林館の小学校，中学校の教科書が，相似をどのように扱っているのか紹介する．高校の教科書は数研出版の教科書 [25] と，旧指導要領に基づく東京書籍の教科書に現れる相似の場面を紹介する．新指導要領に基づく指導は平成 24 年度から始まっているが，少なくとも今後２年間は旧指導要領に基づく指導を受けた高校生が大学に入学してくるからである．第５節で，大学の教育ではどのように扱えばよいか，何らかの提言をしたい．

2　学習指導要領解説における相似の扱い

2.1　小学校の場合

第６学年の内容
比，比例の関係について ⋯．(p. 49)
縮図や拡大図は，大きさを問題にしないで，形が同じであるかどうかの観点から図形をとらえたものである．互いに縮図や拡大図の関係にある図形については，その対応している角の大きさはすべて等しく，対応している辺の長さの比はどこでも一定である．(p. 173)

2.2　中学校の場合

第３節　各学年の内容 第３学年 図形
ア　三角形の相似の意味及び三角形の相似条件について理解すること．
イ　三角形の相似条件などを基にして図形の基本的性質を論理的に確かめること．
ウ　平行線と線分の比についての性質を見出し，それらを確かめること．

エ　基本的な立体の相似の意味と，相似な図形の相似比と面積比及び体積比の関係について理解すること.
オ　相似な図形の性質を具体的な場面で活用すること.(pp. 116–118)
二つの図形は，次のそれぞれの場合に相似である.
(1) 一方の図形を拡大または縮小したときに他方の図形と合同になる.
(2) 対応する線分の比が等しく，対応する角がそれぞれ等しい.
(3) 適当に移動して相似の位置に置くことができる.(p. 117)
三角形の相似条件
・対応する３組の辺の比がすべて等しい
・対応する２組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい
・対応する２組の角がそれぞれ等しい (p. 118)
平行線と線分の比についての性質 (p. 118)
相似比と面積比及び体積比の関係 (pp. 118–119)
三平方の定理の意味 (pp. 122–123)

2.3　高等学校の場合

第１節　数学Ｉ　(2) 図形と計量　ア　三角比　鋭角と鈍角の三角比 (p. 22)
第４節　数学Ａ.(3)　図形の性質　ア　平面図形
外角の場合も含めた角の二等分線と辺の比の関係，重心，内心，外心などの性質を扱い，これらの図形の性質も図形の考察に活用できるようにする．チェバの定理やメネラウスの定理を扱うことも考えられる.(p. 49)
第５節　数学Ｂ (3) ベクトル　ア　平面上のベクトル　ベクトルとその演算 (p. 57)

2.4　指導要領に関するコメント

1. 一部の表現が不明瞭である.(1) 例えば，合同や相似の定義と性質の違いが，意図的だと予想するが，数学的には不明瞭である.(直観的) ユークリッド的定義と証明されるべき性質とが区別されていないが，大学で数学をほとんど学ばなかった小学校教員が読んでも理解できるように書いたと推測する.(2) 小学校の拡大図・縮図と中学校の相似の定義の間の関係が今一つ不明瞭である.(3) 相似の定義が３つもあるのは教師に混乱を招きかねない．どれか１つを定義として採用すれば，例え指導要領が指定する配列では不可能であっても，残り２つは本来，証明すべきことと教師に認識されるだろうか.
2. 用語としての定義が現われるのは，中学２年のＢ図形で，その後，３年Ｂ図形の相似の意味 [2, p. 117] のところでも現われるが，図形以外では現われない．論証については，平面図形の学習を通して，中学校段階で軽く経験させておき，高校でよ

り深く学ばせようという意図に読み取れる．
3. 高校の幾何では，随所に，背景に相似が隠れている．

3 教科書における相似の扱い

啓林館，東京書籍それに数研出版の教科書を中心に調べる．

3.1 小学校・中学校の場合

6上 対応する角の大きさがそれぞれ等しく，対応する辺の長さの比が等しくなるようにもとの図を大きくした図を拡大図といいます．また，小さくした図を縮図といいます．[20, p. 74]

以下，拡大図・縮図の作図と簡単な応用で終わる．

中3 第5章　相似な図形の定義(拡大・縮小を用いる)
相似な図形の性質(相似ならば対応する辺の比と角が等しい)[2]
相似比の定義
三角形の3つの相似条件
三角形における平行線と線分の比の関係，
平行線にはさまれた線分の比，
中点連結定理
相似な図形の面積と体積

3.2 小学校・中学校の教科書に関するコメント

1. 相似の定義が，小学校と中学校では微妙に異なる．直線図形にしか対応できないが，小学校の方が論理的である教科書[3] がある．
2. 相似の定義は指導要領の(1)[2, p. 117]を採用し，(2)は相似な図形の性質(必要条件の表現)として記述している[4]．(3)の相似の位置については，採用する教科書と採用しない教科書がある．いずれも証明は与えず，操作により確認する．
3. 三角形の3つの相似条件の証明もない．操作により確認し，以後，これが重要な役割を果たす．

但し，筆者は，コメント2，3で述べた，証明のないことが非教育的と主張するものではない．これについては後述(この節の終り)する．

[2] 相似であるための必要条件のような記述になっている．
[3] 例えば，東京書籍の教科書
[4] 大学の教科専門科目としての授業では，多分，こちらを定義として採用されるだろう．ここにも学問と教育の違いが現われている

4. 平行線と比に関する定理の逆は，証明は難しくないのに，記述がない．後でも引用しないから，中学レベルでは不要ということだろう．
5. 中学校の「相似」の扱いは,「合同」の扱いと対応している.「合同」の定義，性質，三角形の3つの合同条件,「合同」の応用に対応させ,「相似」もこの順に指導される．
6. 用語としての定義は2年，三角形の節で初めて現われ，次の平行四辺形の節まで現われる．しかし，その後は，相似の節ですら，定義という用語は現われることはない．使えるところはたくさんあるにも関わらずである[5]．中学生には，簡単な論理，証明という行為に軽く触れる程度に止め，本格的な論理は高校で指導するのが現在の方針のようである．

3.3 高等学校の場合

高等学校の教科書に関しては，旧指導要領の下で編集された東京書籍の教科書 [24] と現行の指導要領の下で編集された数件出版 [25] から，相似に関係する部分のみとり上げ，書き下す．相似に関しては，直接的な応用と背後に隠れているものとがあることが，指導要領解説よりも顕在化している．

数学 I. 鋭角の三角比の定義と一般角の三角比への拡張，正弦定理，余弦定理．
(平面図形の面積比，立体の表面積の比と体積比は中学校へ移行) 正棱，$\tan A$，ほか，正弦，余弦の定義

数学 II. 座標平面上の内分点・外分点，2点を通る直線の方程式．

数学 A. 三角形の辺の比，内角・外角の2等分線，内心・外心・重心，定理 (チェバの定理とその逆，および，メネラウスの定理)

数学 B. ベクトルの実数倍 $m(\vec{a}+\vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$

3.4 平行線と比の関係と相似条件について

1. 明治以来 (例えば，菊池大麓の教科書 [4])，昭和33年まで (例えば，林鶴一の教科書 [6]，戦時中に発行された教科書 [7]) は，平行線と辺の比の関係が先で，相似条件は証明されていた．平行線と比の関係は，面積を用いてユークリッド流に証明している．つまり，現在とは順序が逆である．単元学習から体系化へと義務教育の方針が転換されたとき，論証が，高校から中学校へ降りてきている．このときから，相似条件が先になっている．
2. 相似の定義 (性質) から，平行線と比の関係へは，操作で確認するにとどめ，この部分には数学という学問としては論理上のギャップを残している．ここに，義務教育としての数学と学問としての数学の違いが端的に現われている．義務教育では，

[5] 指導要領解説では2年の合同に関するところと3年の相似のところのみで使われている．

論証とは，証明とはどのような行為か，証明はなぜ必要か，定義とは何か，定理とは何かということに少し触れさせる方法として，従来から使われてきたユークリッド幾何をモデルにするという方針が読み取れる．

3. 小学生は算数の領域「量と測定」において，長方形の面積が「底辺 × 高さ」であることを学んでいる．この面積公式を用いれば，平行四辺形・三角形の面積公式が直ちに得られ，中学生にとって平行線と比の関係を導くことは難解とは思えないので，将来，いつまた順序が逆転し，平行線と比の関係から三角形の相似条件を導くように指導要領が変更になっても不思議ではない．

4. 大学では，指導要領がどのように改訂されてもそれに対応できる数学教師を養成する必要がある．

4 大学ではどのように扱っているか

数学教育学の方から,「専門科目の数学にあっても，(中略)，学校数学をカバーする内容を創出すべきである.」[9, p. 262] という声，ユークリッド流の幾何を大学で指導しておいてほしいという要求がある [9, p. 262]，[17, p. 41, p. 74]．第 1 班 (代表：丹羽) の調査報告 [13] を見ると，ユークリッド幾何を扱う大学は多い (76%) が，そこには用語としての相似はない．従って，問題点 1 で述べたように，教科専門科目の授業で相似が取り上げられる可能性は低いと予想される．数学教育学の専門家が授業で相似をとり上げる場合，指導要領の解説の域を出ないようである[6]．

筆者も鹿児島大学在籍中は初等幾何の授業を担当したが，定義以外は証明すること，証明とはどのような活動なのかを，集合と論理を主題に講義し，その後，ユークリッド原論の精神を講義し，原論第 1 巻を命題 5 くらいまで講義した．二等辺三角形に関する内容が中学の教育実習でよく取り上げられるというのが，命題 5 くらいまで講義した理由である．相似については，別の授業で，非ユークリッド幾何学においては，相似という概念がなく，相似はユークリッド幾何では重要な概念なのだと述べるに留まっていた．

5 考察

「相似を児童・生徒にどのように教えるか」を研究し，大学生に教育するのは数学教育学者の役割の範囲内であろう．数学者 (教科専門) は,「相似の概念・性質，性質は証明すべきこと」を教育する．学生が数学教師となり，具体的な問題[7] に直面したとき自分で考え，自分で解決する能力を身につけさせることではないだろうか．当然，グレーゾーンもあるし共通部分もあるだろう．

[6] 玉川大学教授守屋誠司氏との個人的会話

[7] 例えば,「3 つの相似条件」と「三角形における辺の比の性質」

教師の数学能力開発に向けて，初等幾何に関する第1班の標準的モデル (骨子), [14, p. 108, pp. 117-120] は大いに参考になる.

現実には，多くの大学の教科専門科目で，相似について授業はなされていないようである [13][8]．合同は相似の特殊な場合だからと言って，合同を教えないで相似から始めるのは学生の理解を難しくするだろう [11, p. 138]. 相似の授業をしないで相似を理解させるにはどうすれば良いだろうか．1段階上のレベルで考え得る必要がある．概念的な扱い，証明することに慣れさせておく．定義とは，定理とは，証明すべきことは何か，必ずしも，初等幾何の範囲で完結させる必要はない．教科専門科目全体の授業において，これらの課題は完結させておけばよい．教科専門科目の授業は，小・中・高等学校に現われる算数・数学の内容をすべて網羅するものではないし，しようと思っても不可能である．例え免許法が改正になり，教科に関する科目の単位が40になってもである.

学生が小・中・高校の教員として採用されると，通常，定年まで3～4回の指導要領改訂がある．指導要領改訂に不変な知識と技能，そして教科学力と生成学力は大学で身につけさせる必要がある．具体的には何をどこまですればよいのかは，教科専門を担当する我々の任務なのだが，今後の検討課題のままである.

問題点4について　初等幾何の授業は，初等幾何の範囲内で完結すべきとの思想に基づき編集された教科書が長く採用された．そこでは，ユークリッド流に，高さの等しい三角形 (の面積) は底辺に比例 (原論第6巻命題1)，三角形における辺の比の性質 (第6巻命題2)，それから3つの相似条件と続く．昭和58年 (1933年) の指導要領改訂からは，相似の扱いが大幅に変わり，現行のように，中学校で，3つの相似条件を実験的に確認し，それを認めて，三角形における辺の比と平行線の関係を証明するようになった．そのため，3つの相似条件を証明しようとすると三角形における辺の比と平行線の関係を用いるために，循環論法に陥ると恐れられている [12, p. 30, 左側]．現状では，止むを得ないと思う．しかし，教師自身においては解決策がある.

三角形の面積を用いれば，中学生にも，三角形における辺の比と平行線の関係 (原論第6巻命題2) は証明できる[9]．戦後の高等学校の教科書ではそのようになっていた [12, p. 29, 右側]．三角形の面積公式を得るために,「(三角形における) 平行線と線分の比を用いることから平行線と比の関係を用いるから循環論法になる」と中川 [12, p. 30, 左側][10] は述べているが，三角形の面積公式は長方形の面積公式から直ちに得られ，長方形の面積公式は小学5年で学んでおり，三角形の辺の比と平行線

---

[8] [13, p. 96] には，合同も相似もないが，三角形の5心があるから合同は授業しているはずであり，メネラウスの定理・チェバの定理があるから三角形における辺の比の性質の授業もされていると推察できる.

[9] 花木 [15] の解説もある.

[10] ここ [12, p. 30, (図3) の上] では，面積の定義に従って直接三角形の面積を求めようとしている．そのために，三角形における平行線と辺の比の性質と極限が必要になってくる.

の関係は使う必要はない．さらに,「現行の教科書では三角形の面積を用いて証明する場面が少ないため，このような面積比を用いた証明を生徒が見出すことは容易でない」[12, p. 30，左側] と述べているが，教科書で，相似のすぐあとに現われる三平方の定理の証明は面積を用いている．中学生は，三角形のどの辺も底辺とみなされること (原論第 6 巻命題 2 の証明に必要) に慣れていないだけである．

6　終わりに (学生及び現職教員への要請)

教科書には命題の証明がなくても，学生 (教師) は証明を考えて欲しい．生徒から問われれば，即答でなくても，答えなければならない．

内容はスパイラルに学ぶようになっているので，中 (高校) 学校の数学教員は，小 (中) 学校の教科書も目を通して，生徒の教育的背景を確認しておくことも必要である．中学 3 年で教える相似の単元に現れる拡大・縮小は日常の用語としてではなく，小学校ですら学術用語として使用されていることが分かるであろう．

中学校の教師の場合，高校で相似がどのように役立っているかを知ると，相似の意義が理解しやすいであろう．

大学に進学し，更に (改めて) 数学を学ぶ高校生には，受験の数学でも，大学で修正可能 (易しいことではないが)．しかし，高校で数学を終える約半数の高校生にとっては，将来に役だつように相似も教えてもらいたい．そのためには，何をどうすればよいのか，今後の課題である．

一般には，身の周りで如何に相似が潜んでいるか，如何に役立っているのか知っているのが望ましい．社会の中では，合同な図形より相似な図形の方が表われる頻度が高そうである．

参考文献

[1] 小学校学習指導要領解説，文部科学省，平成 20 年 6 月

[2] 中学校学習指導要領解説数学編，文部科学省，平成 20 年 9 月．

[3] 高等学校学習指導要領解説数学編理数編，文部科学省，平成 21 年 12 月

[4] 菊池大麓，初等幾何教科書平面部，明治 21 年 (初版は明治 19 年)

[5] 高木貞治，新式算術講義，博文館，明治 37 年

[6] 林鶴一，新制平面幾何教科書教授用書，昭和 5 年

[7] 文部省，中等数学二，第二類，中等学校教科書株式会社，昭和 19 年

[8] 文部省，中学校学習指導要領，1958 年，
http//www.nicer.go.jp/guideline/s33j/index.htm

[9] 鈴木正彦，教員養成系大学・学部における数学教育の在り方について，数学教育学会誌臨時増刊，2011 年度数学教育学会春季年会発表論文集，pp. 261–263

[10] 赤摂也編，教育学講座 11，算数・数学教育の理論と構造，学研，1979 年.

[11] 遠山啓，教師のための数学入門，国土社，1960 年

[12] 中川裕之，相似な図形の性質と平行線と線分の比の性質の関係について，日本数学教育学会誌，第 92 巻 (2010)，第 9 号，pp. 27-34.

[13] 丹羽雅彦他 3 名,「教員養成大学・学部の数学専門科目の講義内容についての調査」の結果と其考察，数理解析研究所講究録 1711，pp. 89–106, 数学教師に必要な数学能力に関する研究，京都大学数理解析研究所，2010 年 9 月

[14] 丹羽雅彦他 4 名，中学校・高等学校の数学教師の養成における数学専門科目の標準的なモデルの構想，数理解析研究所講究録 1711，pp. 106–129, 数学教師に必要な数学能力に関する研究，京都大学数理解析研究所，2010 年 9 月.

[15] 花木良，相似に関する一考察，数理解析研究所講究録，数学教師に必要な数学能力とその育成法に関する研究，to appear.

[16] 松尾七重，図形の関係概念についての学習指導の必要性ー合同及び相似の観点からの図形の概念を捉え直すことを中心にー，第 32 回数学教育論文発表会論文集，pp. 257–262, 1999 年.

[17] 数学教育学会課題スタディグループ,「横地清のかたる数学教育学」横地先生の数学教育学/聞書，2008 年

[18] 日本数学教育学会編著，中学校数学教育史下巻，新教社，1988 年.

[19] 日本数学教育学会編，数学教育学研究ハンドブック，東洋館出版社，2010 年.

[20] 新しい算数 5 上，5 下，6 上，6 下，東京書籍，2012 年.

[21] わくわく算数 5 上，5 下，6 上，6 下，啓林館，2012 年.

[22] 新しい数学 3，東京書籍，2012 年.

[23] 未来へ広がる数学 3，啓林館，2012 年.

[24] 数学 1，数学 2，数学 A，数学 B，東京書籍，2004 年.

[25] 数学 I, 数学 II，数学 A，数件出版，2012 年