数理解析研究所講究録
第 1922 巻 2014 年 170-174

COXETER 群のホモロジーの p-PRIMARY COMPONENT について

北海道大学大学院理学研究院 秋田 利之
Toshiyuki Akita
Department of Mathematics
Hokkaido University

1. はじめに

G を有限群, $H_k(G,\mathbb{Z})$ を G の k 次の整数係数ホモロジー群としよう. 群のホモロジーの一般論より, $k>0$ に対し以下のような直和分解が存在する:

$$H_k(G,\mathbb{Z})\cong\bigoplus_p H_k(G,\mathbb{Z})_{(p)}. \tag{1.1}$$

ただし p は G の位数を割り切る素数を走り, $H_k(G,\mathbb{Z})_{(p)}$ は $H_k(G,\mathbb{Z})$ の p-primary component である (Brown [5, §III.10] を参照). 一方 $\mathbb{Z}_{(p)}$ を $\mathbb{Z}$ の p での局所化とすると, 普遍係数定理より

$$H_k(G,\mathbb{Z})_{(p)}\cong H_k(G,\mathbb{Z}_{(p)})$$

である (例えば Benson-Smith [3, Corollary 2.3.3] を参照). したがって有限群 G の整数係数ホモロジー群 $H_k(G,\mathbb{Z})$ を知るには, 各素数 p に対して G の p-local ホモロジー群 $H_k(G,\mathbb{Z}_{(p)})$ を知ればよいことがわかる. vanishing range, すなわち

$$H_k(G,\mathbb{Z}_{(p)})=0\ (1\leq k\leq n)$$

が成り立つ n を決定することは, p-local ホモロジー群を調べる際の基本的な問題であろう. 例えば $\mathfrak{S}_m$ を m 次対称群とすると

$$H_k(\mathfrak{S}_m,\mathbb{Z}_{(p)})=0\ (1\leq k\leq 2(p-2)) \tag{1.2}$$

が任意の m に対して成立し, しかも $m\geq p$ なら $H_{2p-3}(\mathfrak{S}_m,\mathbb{Z}_{(p)})\neq 0$ であることが確かめられる (とくに (1.2) の vanishing range は best possible である). これらの事実を最初に証明したのが誰かを筆者は知らないが, 中岡稔先生による対称群のホモロジー安定性 [11] と無限対称群の mod p ホモロジーの決定 [12] (と簡単な計算) から従う.

本稿の対象である Coxeter 群は群論, 表現論, トポロジー, 幾何学的群論など数学な様々な分野に登場する群の族であり, 対称群は Coxeter 群の重要な例である. 筆者は Coxeter 群が p-free であるという仮定の元で, (1.2) が一般の Coxeter 群に対しても成立することを示した. 本稿では筆者の結果を簡単に解説したい. 詳細は Akita [2] を参照してほしい.

2. Coxeter 群とそのホモロジー

2.1. **定義.** まず Coxeter 群の定義を与えよう. S を有限集合, $m : S \times S \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ を以下の条件をみたす写像とする (ここで $\mathbb{N}$ は 1 以上の自然数の集合):

(1) 任意の $s \in S$ に対し $m(s,s) = 1$.
(2) 任意の相異なる $s,t \in S$ に対し $2 \le m(s,t) = m(t,s) \le \infty$.

S を生成集合, $(st)^{m(s,t)} = 1$ $(m(s,t) < \infty)$ を基本関係式として定義される群を W とする. すなわち

$$W := \langle s \in S \mid (st)^{m(s,t)} = 1 \ (m(s,t) < \infty) \rangle. \tag{2.1}$$

W は Coxeter 群, (W,S) は Coxeter 系とよばれる (以下 W に対しその表示 (2.1) を固定しておく). 各 $s \in S$ は W の位数 2 の元であり, 積 st $(m(s,t) < \infty)$ の位数はちょうど $m(s,t)$ である. S の元の数を W の階数とよび $\operatorname{rank} W$ と書く. 部分集合 $T \subseteq S$ に対し, T で生成される W の部分群 W_T を W の放物的部分群とよぶ. とくに $W_S = W$, $W_{\{s\}} \cong \mathbb{Z}/2$ $(s \in S)$, $W_\emptyset = \{1\}$ である. (W_T, T) は (写像 m の制限 $m|_{T\times T}$ に関して) Coxeter 系となる.

対称群 $\mathfrak{S}_n$ は (A_{n-1} 型の) Coxeter 群である. $\mathfrak{S}_n$ は $\mathbb{R}^n$ 上の有限鏡映群として実現できるが, 一般に有限位数の Coxeter 群は有限鏡映群として実現できる. 逆に有限鏡映群は Coxeter 群の表示をもつ. 有限位数の Coxeter 群は分類されている. より一般に "多様体上の鏡映群" も Coxeter 群であることが知られている (正確な主張は Davis [6, Theorem 10.1.5] を参照). Coxeter 群の一般論については [1,4,6,9], 有限鏡映群については [7] を参照.

2.2. **知られていたこと.** 対称群の (コ) ホモロジーについては多くのことが知られているが, 一般の Coxeter 群のホモロジーの研究は J.-P. Serre [13] に始まる. 彼は任意の Coxeter 群 W に対し, W の vcd (virtual cohomological dimension) が有限であること, W が WFL 型というホモロジカ

ルな有限性を満たすことを示した. 彼の論文には書かれていないが, 任意の $k>0$ に対し $H_k(W,\mathbb{Z})$ は有限アーベル群で

$$H_k(W,\mathbb{Z}) \cong \bigoplus_p H_k(W,\mathbb{Z}_{(p)}) \tag{2.2}$$

という直和分解をもつことも彼の結果から証明できる. ここで p は W が p-torsion をもつ素数を走る (そのような p は有限個しかない). Coxeter 群は一般には有限群でないにもかかわらず, (1.1) の類似が成り立つわけである. Coxeter 群 W の 1 次と 2 次の整数係数ホモロジーは具体的にわかっている. W は位数 2 の元で生成されるので, ある $n_1(W) \geq 1$ に対し

$$H_1(W,\mathbb{Z}) \cong W/[W,W] \cong (\mathbb{Z}/2)^{n_1(W)} \tag{2.3}$$

であり, $n_1(W)$ の値は W の表示から容易に求められる. また上の同型から任意の W に対し $H_1(W,\mathbb{Z}_{(2)}) \neq 0$ であることも従う. 2 次のホモロジーについては Ihara-Yokonuma [10], Yokonuma [14] による部分的な結果を経て, Howlett [8] が

$$H_2(W,\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/2)^{n_2(W)} \tag{2.4}$$

であることを示した (W の表示から $n_2(W)$ を求める公式も与えられている). (2.3) と (2.4) から次の命題が従う.

命題 1. p を奇素数とすると, 任意の *Coxeter* 群 W に対し $H_1(W,\mathbb{Z}_{(p)}) = H_2(W,\mathbb{Z}_{(p)}) = 0$ が成り立つ.

命題は 3 次以上のホモロジー群に対しては成立しない. 実際 $I_2(q)$ 型の Coxeter 群 (位数 $2q$ の二面体群と同型)

$$W(I_2(q)) = \langle s,t \mid s^2 = t^2 = (st)^q = 1 \rangle \tag{2.5}$$

のホモロジー群は, 奇素数 p が q を割り切るなら,

$$H_k(W(I_2(q)),\mathbb{Z}_{(p)}) \neq 0 \ (k \equiv 3 \pmod 4) \tag{2.6}$$

をみたすことが知られている. 一方 q が p と素であるならば,

$$H_k(W(I_2(q)),\mathbb{Z}_{(p)}) = 0 \ (k>0)$$

である. Coxeter 群の (コ) ホモロジーに関するその他の結果 (とくに群環係数のコホモロジーと mod 2 コホモロジー) については Davis の本 [6] と筆者のプレプリント [2] の参考文献を参照.

3. 主結果

W を Coxeter 群, p を奇素数とする. W の表示を定める写像 $m : S \times S \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ の値 $m(s,t)$ が常に p と素であるとき, W を p-free と呼ぶことにしよう (ただし ∞ は p と素であるとする). $m(s,t)$ が p と素であることと積 st の位数が p と素であるは同値である. 例えば対称群は任意の $p \geq 5$ に対し p-free であり, (2.5) で定義された二面体群 $W(I_2(q))$ が p-free である必要十分条件は q が p と素であることである.

定理 2. *p を奇素数, W を p-free な Coxeter 群とすると $H_k(W,\mathbb{Z}_{(p)}) = 0$ $(1 \leq k \leq 2(p-2))$ が成り立つ.*

定理は対称群 $\mathfrak{S}_n$ の vanishing range (1.2) の一般化になっている. さらに (1.2) が best possible であることから, 定理の range も best possible である. また (2.6) より p-free という仮定が必要であることもわかる. 定理の証明は次の二つの主張からなる.

主張 1. *階数が $2(p-2)$ 以下の p-free な有限 Coxeter 群 W に対し*

$$H_k(W,\mathbb{Z}_{(p)}) = 0 \ (1 \leq k \leq 2(p-2))$$

が成り立つ.

主張 2. *W を p-free な Coxeter 群とする. W が有限位数のときは $\operatorname{rank} W > 2(p-2)$ と仮定する. もし全ての放物的部分群 W_T $(T \subsetneq S)$ に対して*

$$H_k(W_T,\mathbb{Z}_{(p)}) = 0 \ (1 \leq k \leq 2(p-2))$$

なら, W に対しても

$$H_k(W,\mathbb{Z}_{(p)}) = 0 \ (1 \leq k \leq 2(p-2))$$

が成り立つ.

W が p-free なら W の放物的部分群も p-free なので, 二つの主張を組み合わせると, 階数による帰納法により定理を証明することができる. 主張 1 は直接計算により証明される. Coxeter 群 W に対し Coxeter 複体という単体複体が定義されるが, 主張 2 は (1) Serre [13] による Coxeter 複体のホモトピー型の決定 (2) Coxeter 複体の同変ホモロジーに収束する二つのスペクトル系列を用いて証明される. 詳細は Akita [2] を参照してほしい.

References

[1] Peter Abramenko and Kenneth S. Brown, *Buildings*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 248, Springer, New York, 2008. Theory and applications. MR2439729 (2009g:20055)

[2] Toshiyuki Akita, *Vanishing theorem for the p-local homology of Coxeter groups* (2014), available at `arXiv:1406.0915`.

[3] David J. Benson and Stephen D. Smith, *Classifying spaces of sporadic groups*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 147, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008. MR2378355 (2009f:55017)

[4] Nicolas Bourbaki, *Éléments de mathématique*, Masson, Paris, 1981 (French). Groupes et algèbres de Lie. Chapitres 4, 5 et 6. [Lie groups and Lie algebras. Chapters 4, 5 and 6]. MR647314 (83g:17001)

[5] Kenneth S. Brown, *Cohomology of groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 87, Springer-Verlag, New York, 1982. MR672956 (83k:20002)

[6] Michael W. Davis, *The geometry and topology of Coxeter groups*, London Mathematical Society Monographs Series, vol. 32, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2008. MR2360474 (2008k:20091)

[7] L. C. Grove and C. T. Benson, *Finite reflection groups*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 99, Springer-Verlag, New York, 1985. MR777684 (85m:20001)

[8] Robert B. Howlett, *On the Schur multipliers of Coxeter groups*, J. London Math. Soc. (2) **38** (1988), no. 2, 263–276, DOI 10.1112/jlms/s2-38.2.263. MR966298 (90e:20010)

[9] James E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 29, Cambridge University Press, Cambridge, 1990. MR1066460 (92h:20002)

[10] Shin-ichiro Ihara and Takeo Yokonuma, *On the second cohomology groups (Schur-multipliers) of finite reflection groups*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I **11** (1965), 155–171 (1965). MR0190232 (32 #7646a)

[11] Minoru Nakaoka, *Decomposition theorem for homology groups of symmetric groups*, Ann. of Math. (2) **71** (1960), 16–42. MR0112134 (22 #2989)

[12] ———, *Homology of the infinite symmetric group*, Ann. of Math. (2) **73** (1961), 229–257. MR0131874 (24 #A1721)

[13] Jean-Pierre Serre, *Cohomologie des groupes discrets*, Prospects in mathematics (Proc. Sympos., Princeton Univ., Princeton, N.J., 1970), Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1971, pp. 77–169. Ann. of Math. Studies, No. 70 (French). MR0385006 (52 #5876)

[14] Takeo Yokonuma, *On the second cohomology groups (Schur-multipliers) of infinite discrete reflection groups*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I **11** (1965), 173–186 (1965). MR0190233 (32 #7646b)

E-mail address: `akita@math.sci.hokudai.ac.jp`