数理解析研究所講究録
第1922巻 2014年 102-111

ANR空間からホモロジー球面への集合値写像の次数

明治大学 四反田義美 (Shitanda Yoshimi)

Meiji University School of Political Science and Economics

1 序

位相空間 X の各点 x に位相空間 Y の空でない閉集合 $\varphi(x)$ を対応させるとき，この対応を集合値写像という．この論文では，集合値写像をギリシャ文字で $\varphi: X \to Y$ と記し，通常の写像をローマ字で $f: X \to Y$ と記すことにする．集合値写像は，上半連続であるものとする (cf. [5]).

不動点定理や同変点定理は，多くのトポロジストにより研究されてきた (cf. [2], [7], [8], [9]). またこれらは，集合値写像の場合へも一般化されてきた (cf. [4], [5], [10], [11]).

この際に，重要な概念が許容写像 (admissible mapping) である．$\varphi: X \to Y$ が許容写像とは，連続写像 $p: \Gamma \to X$ と $q: \Gamma \to Y$ の組で，ある条件を満たすものをいう (cf. Definition 2).

ANR 空間 X が $H^n(X; Z) \cong Z$ を満たし，N が n 次元ホモロジー球面であるとき，$\varphi: X \to Y$ の次数が次式で定義される．

$$\deg(\varphi) = \{\deg((p^*)^{-1}q^*) : (p^*)^{-1}q^* : H^n(N; Z) \to H^n(X; Z)\}$$

この論文では，$\varphi: X \to N$ の次数を詳しく調べることにする．我々の主要な結果は次のとおりである (cf. Theorem 3.4, Theorem 4.1). 我々の結果は，[10] の Theorem 5.3 と Theorem 6.3 の別証明でもある．この結果に関連して，Y.Hara and Y.Moriwaki [6] も $\varphi: M \to S^n$ の次数について，M が n 次元多様体の場合に同様の結果を我々とは異なる方法で得ている．

Main Theorem 1. *Let X be an ANR space with a free involution T and N be an n-dimensional homology sphere. Suppose that $\dim X = n$ and $H^n(X; Z) \cong Z$ and $c(X, T)^n \neq 0$. If an admissible mappings $\varphi: X \to N$ satisfies $\varphi(x) \cap \varphi(Tx) = \emptyset$ for any $x \in X$, then there exists a unique odd number m such that $\deg \varphi = \{m\}$.*

これに関して，$c(X,T)^n = 0$ の場合にも一意的な偶数 m が存在して，$\deg(\varphi) = \{m\}$ となるという結果が得られる (cf. Theorem 3.5).

Main Theorem 2. *Let X be an ANR space with a free involution T and N be an n-dimensional homology sphere with a non trivial involution T'. Suppose that $\dim X = n$ and $H^n(X;Z) \cong Z$ and an admissible mappings $\varphi : X \to N$ satisfies $T'\varphi(x) \cap \varphi(Tx) = \emptyset$ for any $x \in X$. Then there exists a unique even number m such that $\deg(\varphi) = \{m\}$. In particular, if T' is an orientation reversing involution, then $\deg \varphi = \{0\}$.*

2 準備

この論文では，アレクサンダー・スパニアーコホモロジー論を $\bar{H}^*(-;G)$ で表し，特異コホモロジー論を $H^*(-;G)$ で表す．これらは，一般に同型ではないが，ANR 空間では同型となる．

$$\mu; \bar{H}^*(X;G) \cong H^*(X;G). \tag{2.1}$$

詳細については，スパニアーのテキスト ([12]) を参照．

係数群が G のときは，G を明示するが，標数が 2 の素体 $\mathbf{F}_2$ のときは，係数群を省いて，$\bar{H}^*(-)$, $H^*(-)$ を使う．$f : X \to Y$ が固有写像 (proper map) とは，任意のコンパクト集合 $K \subset Y$ に対して，$f^{-1}(K)$ がまたコンパクトとなる写像を云う．$f : X \to Y$ が完全写像 (perfect map) とは，f が閉写像かつ任意の $y \in Y$ に対して，$f^{-1}(y)$ がコンパクトとなる写像を云う．$f : X \to Y$ がコンパクト写像 (compact map) とは，$f(X)$ が Y のコンパクト集合に含まれるときを云う．

次の定義は重要である．

Definition 1. X, Y をパラコンパクト・ハウスドルフ空間とするとき，$f : X \to Y$ が，次の条件を満たすならば，ヴィートリス写像 (Vietoris map) と呼ばれる．

1. $f : X \to Y$ は，全射な連続写像でかつ完全写像である．
2. 任意の $y \in Y$ に対して，$f^{-1}(y)$ は，連結で非輪状空間である．すなわち，$\bar{H}^p(f^{-1}(y);\mathbf{F}) = 0 (p > 0)$ が成り立つ．

$f : X \to Y$ が全射で閉写像で，条件 (2) を満たすとき，弱ヴィートリス写像と言う．

次の定理は，スパニアーのテキストに掲載されている重要な定理である．

Theorem 2.1. X, Y はパラコンパクト・ハウスドルフ空間で，$f : X \to Y$ は弱ヴィートリス写像とする．このとき，

$$f^* : \bar{H}^m(Y; \mathbf{F}) \to \bar{H}^m(X; \mathbf{F}) \quad (m \geqq 0) \tag{2.2}$$

は，同型である．

Definition 2. 上半連続な集合値写像 $\varphi : X \to Y$ が許容写像 (admissible map) とは，パラコンパクト・ハウスドルフ空間 Γ と連続写像 $p : \Gamma \to X$ と $q : \Gamma \to Y$ が存在して，次の条件を満たすときにいう．

1. $p : \Gamma \to X$ はヴィートリス写像
2. $\varphi(x) \supset q(p^{-1}(x))(x \in X)$

写像の対 (p, q) のことを集合値写像 φ の選択写像対という．

許容写像 $\varphi : X \to Y$ に対して，$\varphi^* : \bar{H}^*(Y; \mathbf{F}) \to \bar{H}^*(X; \mathbf{F})$ を次式で定義する．

$$\varphi^* = \{(p^*)^{-1} q^* \mid (p, q) \text{ は } \varphi \text{ の選択写像対}\}.$$

同様にして，φ_* を $\{q_*(p_*)^{-1}\}$ で定義する．

ANR 空間が X が $H^n(X; Z) \cong Z$ を満たし，N が n 次元ホモロジー球面であるときに，φ の次数 $\deg(\varphi)$ が $\{(p^*)^{-1} q^* : H^n(N; Z) \to H^n(X; Z)\}$ の次数 $\{\deg((p^*)^{-1} q^*)\}$ で定義される．これは一般に集合である．

3 許容写像の次数 1

X をパラコンパクト・ハウスドルフ空間とし，τ を位数 2 の群とする．X が対合 $T : X \to X$ をもつとき，τ が X に群作用をもつことになる．その軌道空間を X_τ とする．同変写像 $f : X \to Y$ は $f_\tau : X_\tau \to Y_\tau$ を誘導する．

$\pi_n : S^n \to RP^n$, $\pi_\infty : S^\infty \to RP^\infty$ を標準的な被覆射影とする．被覆空間 $\pi_X : X \to X_\tau$ に対して，分類写像 $f_\tau : X_\tau \to RP^\infty$ と $f : X \to S^\infty$ が存在して $\pi_\infty f = f_\tau \pi_X$ を満たす．第 1 スティフェル・ホイットニー類 $c(X, T) \in \bar{H}^1(X_\tau)$ (or $c(X, T) \in H^1(X_\tau)$) を $f_\tau^*(\omega)$ で定義する．ω は $H^1(RP^\infty)$ の生成元である．i.e. $c(X, T) = f_\tau^*(\omega)$. $\dim X = n$ は，X の被覆次元を意味する．

次の定理は，基本的である．

Proposition 3.1. *Let X be an ANR space with a free involution T which satisfies $\dim X = n$ and $H^n(X; Z) \cong Z$. Suppose that $c(X, T)^n \neq 0$. Then $T^* = \mathrm{Id}_{H^n(X;Z)}$ for an odd number n and $T^* = -\mathrm{Id}_{H^n(X;Z)}$ for an even number n.*

証明は，容易であるので，要点のみ述べる．次の図式が存在する (cf. [1], [3])．

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & S^n \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_X} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_n} \\ X_\tau & \xrightarrow{f_\tau} & RP^n. \end{array} \tag{3.1}$$

この図式とギザン・スミス系列を使うことにより示される．

Δ_X を $X^2 = X \times X$ の対角集合とする．$T_X : X^2 \to X^2$ は $T_X(x,y) = (y,x)$ で定義される対合である．$T_X : X^2 - \Delta_X \to X^2 - \Delta_X$ は自由な対合である．次の定理は，射影 $\pi_i : N^2 - \Delta_N \to N$ がファイバー $(N - \{x\})$ をもつファイバー束であることから容易に分かる．

Theorem 3.2. *Let N be an n-dimensional closed manifold. Suppose $H^*(N;Z) \cong H^*(S^n;Z)$. Then $H^*(N - \{x\};G) \cong H^*(pt;G)$ for any $x \in N$ and $\pi_i^* : H^*(N^2 - \Delta_N;G) \cong H^*(N;G)$ for the projections $\pi_i : N^2 - \Delta_N \to N$ $(i = 1,2)$.*

次の結果も，ギザン・スミス系列を使うことにより，容易に示される．$\pi_!$ は移送写像で，ν' は $H^n(N^2 - \Delta_N)$ の生成元とする．

Proposition 3.3. *Let N be an n-dimensional homology sphere and $T_N : N^2 - \Delta_N \to N^2 - \Delta_N$ be the free involution. Then $c(N^2 - \Delta_N, T_N)^n \neq 0$ and $\pi_!(\nu') = c(N^2 - \Delta_N, T_N)^n$ where $\pi : (N^2 - \Delta_N) \to (N^2 - \Delta_N)_\tau$.*

X をパラコンパクト・ハウスドルフ空間で，T を対合とするとき，

$$\Delta'_X = \{(x, Tx) \in X^2 \mid x \in X\}$$

が定義される．

T が自由な対合のとき，$\Delta_X \cap \Delta'_X = \emptyset$ が成り立つ．N が n 次元ホモロジー球面のとき，

$$\pi_i : H^n(N^2 - \Delta'_N;G) \cong H^*(N;G) \ (i = 1,2)$$

が成り立つ．

$\varphi : X \to Y$ を許容写像とし，(p,q) を φ の選択写像対とする．すなわち $p : \Gamma \to X$ はヴィートリス写像で $q : \Gamma \to N$ は連続写像とする．X が対合 T を持つとき，Γ_0 を次式で定義する．

$$\Gamma_0 = \{(z,z') \in \Gamma \times \Gamma \mid p(z) = Tp(z')\}$$

ここで，$p_0 : \Gamma_0 \to X$ を $p_0(z,z') = p(z)$ で，$q_0;\Gamma_0 \to N$ を $q_0(z,z') = q(z)$ で定義する．

$p_\Gamma : \Gamma_0 \to \Gamma$ は $p_\Gamma(z,z') = z$ で定義される．$\deg((p_0^*)^{-1}q_0^*) = \deg((p^*)^{-1}q^*)$ も容易に確認される．対合 $T_0 : \Gamma_0 \to \Gamma_0$ は $T_0(z,z') = (z',z)$ で定義される．p_0 は同変写像である．i.e. $Tp_0 = p_0T_0$.

次の定理は，ある部分は [10] の Theorem 6.3 の対偶命題として得られる．その証明は，[10] の Theorem 6.3 の別証明でもある．

Theorem 3.4. *Let X be an ANR space with a free involution T and N be an n-dimensional homology sphere. Suppose that* $\dim X = n$, $H^n(X;Z) \cong Z$ *and* $c(X,T)^n \neq 0$. *If an admissible mappings* $\varphi : X \to N$ *satisfies* $\varphi(x) \cap \varphi(Tx) = \emptyset$ *for any* $x \in X$, *then there exists a unique odd number* m *such that* $\deg\varphi = \{m\}$.

Proof. 仮定から $Q : \Gamma_0 \to N^2 - \Delta_N$ を $Q(z,z') = (q(z), q(z'))$ で定義できる．$\pi : N^2 - \Delta_N \to (N^2 - \Delta_N)_\tau$ に対する分類写像を $g_\tau : (N^2 - \Delta_N)_\tau \to RP^\infty$ とする．

次の可換図式を考えよう．

$$
\begin{array}{ccccccc}
X & \xleftarrow{p_0} & \Gamma_0 & \xrightarrow{Q} & N^2 - \Delta_N & \xrightarrow{g} & S^\infty \\
\downarrow{\scriptstyle \pi_X} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\Gamma_0}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_\infty} \\
X_\tau & \xleftarrow{(p_0)_\tau} & (\Gamma_0)_\tau & \xrightarrow{Q_\tau} & (N^2 - \Delta_N)_\tau & \xrightarrow{g_\tau} & RP^\infty.
\end{array} \tag{3.2}
$$

ここで X_τ，$(\Gamma_0)_\tau$，$(N^2 - \Delta_N)_\tau$ は軌道空間で π_X，π_{Γ_0}，π，π_∞ は被覆射影である．$(p_0)_\tau$，Q_τ，g_τ は，各々p_0，Q，g から誘導された写像である．

$$(p_0)_\tau^*(c(X,T)) = Q_\tau^* g_\tau^*(\omega) \tag{3.3}$$

が成り立つことは容易に分かる．$(p_0)_\tau^*(c(X,T)) = c(\Gamma_0, T_0)$ と置く．$c(X,T)^n \neq 0$ から $c(\Gamma_0,T_0)^n \neq 0$ が分かる．

$\pi_X : X \to X_\tau$ とするとき，$(\pi_X)_!(\mu) = c(X,T)^n$ が成り立つ．ここで μ は $H^n(X)$ の生成元である．$(\pi_X)_!$ は，移送写像 (transfer map) である．

$c(N^2 - \Delta_N, T_N)^n \in H^n((N^2 - \Delta_N)_\tau)$ は $c(N^2 - \Delta_N, T_N)^n = g_\tau^*(\omega^n)$ を満たす．このとき，ギザン・スミス系列により $\nu' \in H^n(N^2 - \Delta_N)$ が存在して，$c(N^2 - \Delta_N, T_N)^n = \pi_!(\nu')$ を満たすことが分かる．

$(\pi_X)_!(\mu) = c(X,T)^n$ と $(p_0)_\tau^*(c(X,T)) = c(\Gamma_0,T_0)$ により，

$$Q^*(\nu') = p_0^*(\mu). \tag{3.4}$$

が分かる．

また $(p_0^*)^{-1}Q^* : H^n(N^2 - \Delta_N) \cong H^n(X) \cong \mathbf{F}_2$. も分かる．次の可換図式を用いて，

$$
\begin{tikzcd}
X & \Gamma_0 \arrow[l, "p_0"'] \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "p_\Gamma"] & N^2 - \Delta_N \arrow[d, "\pi_1"] \\
X \arrow[u, phantom] & \Gamma \arrow[l, "p"'] \arrow[r, "q"] & N
\end{tikzcd}
\tag{3.5}
$$

p_Γ^* and π_1^* が同型であることから，$\deg((p^*)^{-1}q^*)$ が奇数であることを得る．

続いて，

$$
\deg(T_N^*) = \begin{cases} 1 & \text{odd number } n \\ -1 & \text{even number } n\ . \end{cases} \tag{3.6}
$$

を以下で示す．

$QT_0 = T_NQ$ と $\deg(Q^*) \neq 0$ により，$\deg(T_0^*) = \deg(T_N^*)$ が成り立つ．また $p_0T_0 = Tp_0$ と $\deg(p_0^*) = \pm 1$ により，$\deg(T_0^*) = \deg(T^*)$ が成り立つことから，

$$
\deg(T_N^*) = \deg(T^*) = \pm 1.
$$

を得る．これから我々の主張を得る．

$\hat{\nu}$ を $H^n(N;Z)$ の生成元とし，$\hat{\nu'} \in H^n(N^2 - \Delta_N;Z)$ を $\hat{\nu'} = \pi_1^*(\hat{\nu})$ で定義する．ただし $\pi_1 : N^2 - \Delta_N \to N$ である．

$\pi_i^* : H^n(N;Z) \cong H^n(N^2 - \Delta_N;Z) \cong Z$ と $\pi_1 = \pi_2 T_N$ から，

$$
(\pi_1^*)^{-1}\pi_2^*(\hat{\nu}) = \begin{cases} +\hat{\nu} & \text{odd number } n \\ -\hat{\nu} & \text{even number } n \end{cases} \tag{3.7}
$$

が分かる．

続いて，$\deg((p^*)^{-1}q^*)$ が p, q の選び方に依らずに，一意的に定まることを示す．

(p,q) と (p',q') を φ の選択写像対とする．すなわち，$X \xleftarrow{p} \Gamma \xrightarrow{q} N$ に対して，Γ_0 を定義したように，$X \xleftarrow{p'} \Gamma' \xrightarrow{q'} N$ に対して，Γ_0' と $X \xleftarrow{p_0'} \Gamma_0' \xrightarrow{q_0'} N$ が定義される．

Γ_{01}, Γ_{01} を

$$
\Gamma_{01} = \{(z,z') \in \Gamma \times \Gamma' \mid p(z) = Tp'(z')\}
$$

$$
\Gamma_{10} = \{(z',z) \in \Gamma' \times \Gamma \mid p(z) = Tp'(z')\}.
$$

で定義する．

$p_1 : \Gamma_{01} \to X$, $p_1' : \Gamma_{10} \to X$ を各々$p_1(z,z') = p(z)$, $p_1'(z',z) = p'(z')$ で定義する．$\hat{\pi}_1 : \Gamma_{01} \to \Gamma$ と $\hat{\pi}_1' : \Gamma_{10} \to \Gamma'$ はそれぞれ第 1 成分への射影である．

次の可換図式を考察する.

$$
\begin{array}{ccccc}
X & \xleftarrow{p} & \Gamma & \xrightarrow{q} & N \\
\uparrow{=} & & \uparrow{\hat{\pi}_1} & & \uparrow{\pi_1} \\
X & \xleftarrow{p_1} & \Gamma_{01} & \xrightarrow{\hat{Q}} & N^2 - \Delta_N \\
\downarrow{T} & & \downarrow{\hat{T}} & & \downarrow{T_N} \\
X & \xleftarrow{p_1'} & \Gamma_{10} & \xrightarrow{\hat{Q}'} & N^2 - \Delta_N \\
\downarrow{=} & & \downarrow{\hat{\pi}_1'} & & \downarrow{\pi_1} \\
X & \xleftarrow{p'} & \Gamma' & \xrightarrow{q'} & N.
\end{array} \tag{3.8}
$$

ここで, $\hat{Q}(z,z') = (q(z), q'(z'))$, $\hat{Q}'(z',z) = (q'(z'), q(z))$. $\hat{T} : \Gamma_{10} \to \Gamma_{10}$ は $\hat{T}(z,z') = (z', z)$ である.

この図式と $\deg(T^*) = \deg(T_N^*)$ から $\deg((p^*)^{-1}q^*) = \deg((p'^*)^{-1}q'^*)$ が成り立つことが分かる. □

次の定理も定理 3.4 と同様にして証明される.

Theorem 3.5. *Under the condition of Theorem 3.4, assume* $c(X,T)^n = 0$ *instead of* $c(X,T)^n \neq 0$. *Then there exists a unique even number* m *such that* $\deg(\varphi) = \{m\}$.

4 許容写像の次数 2

前節の定理では, N の対合が存在しない場合を扱った. ここでは, N に自明でない対合が存在する場合の次数を議論する.

Theorem 4.1. *Let* X *be an ANR space with a free involution* T *and* N *be an* n*-dimensional homology sphere with a non trivial involution* T'. *Suppose that* $\dim X = n$ *and* $H^n(X;Z) \cong Z$ *and an admissible mappings* $\varphi : X \to N$ *satisfies* $T'\varphi(x) \cap \varphi(Tx) = \emptyset$ *for any* $x \in X$. *Then there exists a unique even number* m *such that* $\deg(\varphi) = \{m\}$. *In particular, if* T' *is an orientation reversing involution, then* $\deg\varphi = \{0\}$.

Proof. $N^2 - \Delta_N'$ は, T_N 不変集合ではあるが, T_N は, $N^2 - \Delta_N'$ 上で自由な対合ではない.

Proposition 3.3 と同様にして, $H^n(S^\infty \times (N^2 - \Delta_N')) \cong \mathbf{F}_2$ であることが分かる. ν' をその生成元とする. 対合 $T_N'(x, z, z') = (Tx, z', z)$ に対して, $\omega = c(S^\infty \times_\tau (N^2 - \Delta_N'), T_N')$ と置く.

まず, $H^*(S^\infty \times_\tau (N^2 - \Delta_N'))$ が全ての k について ω^k を含むことを示そう.

T' が非自明なので，$T'(z_0) \neq z_0$ となる元 $z_0 \in N$ が存在するので，同変写像

$$h : S^\infty \to S^\infty \times (N^2 - \Delta'_N), \quad k : S^\infty \times (N^2 - \Delta'_N) \to S^\infty$$

が存在する．ここで，h, k は $h(x) = (x, z_0, z_0)$, $k(x, z, z') = x$ であり，$k_\tau h_\tau = Id_{RP^\infty}$ を満たすので，我々の主張を得る．

$\hat{q} : S^\infty \times \Gamma_0 \to S^\infty \times N^2$ を $\hat{q}(x, z, z') = (x, q(z), q(z'))$ で定義する．仮定より，$\hat{q}$ は，$\hat{q} : S^\infty \times \Gamma_0 \to S^\infty \times (N^2 - \Delta'_N)$ とも見做される．

$\pi_{\Gamma_0} : S^\infty \times \Gamma_0 \to S^\infty \times_\tau \Gamma_0$, $\pi_{N^2} : S^\infty \times N^2 \to S^\infty \times_\tau N^2$ と $\pi : S^\infty \times (N^2 - \Delta'_N) \to S^\infty \times_\tau (N^2 - \Delta'_N)$ は被覆射影である．また $H^n(N^2 - \Delta'_N) \cong \mathbf{F}_2$ の生成元は ν' で表される．このとき，$j^*(\nu \times 1) = \nu', j^*(1 \times \nu) = \nu'$ が成り立つ．ただし $j : N^2 - \Delta'_N \to N^2$ は自然な入射である．

続いて，次の可換図式を考えよう．$\tilde{j} : S^\infty \times (N^2 - \Delta'_N) \to S^\infty \times N^2$ は，$\tilde{j}(x, z) = (x, j(z))$ で定義された写像である．

(4.1)

$$\begin{array}{ccccc}
\{0\} & \longrightarrow & H^*(S^\infty \times N^2) & \xrightarrow{\tilde{j}^*} & H^*(S^\infty \times (N^2 - \Delta'_N)) \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\pi_{N^2})_!} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_!} \\
H^*(S^\infty \times N^2) & \xrightarrow{(\pi_{N^2})_!} & H^*(S^\infty \times_\tau N^2) & \xrightarrow{\tilde{j}^*_\tau} & H^*(S^\infty \times_\tau (N^2 - \Delta'_N)) \\
\downarrow{\scriptstyle \hat{q}^*} & & \downarrow{\scriptstyle \hat{q}^*_\tau} & & \downarrow{\scriptstyle \hat{q}^*_\tau} \\
\bar{H}^*(S^\infty \times \Gamma_0) & \xrightarrow{(\pi_{\Gamma_0})_!} & \bar{H}^*(S^\infty \times_\tau \Gamma_0) & \xrightarrow{=} & \bar{H}^*(S^\infty \times_\tau \Gamma_0)
\end{array}$$

ここで

(4.2) $$\pi_!(\nu') = 0, \quad H^k(S^\infty \times_\tau (N^2 - \Delta'_N)) = \mathbf{F}_2 \oplus \mathbf{F}_2 \ (k \geqq n).$$

が成り立つことを示そう．

ギザン・スミス系列

$$\to H^*(S^\infty \times_\tau (N^2 - \Delta'_N)) \xrightarrow{\pi^*} H^*(S^\infty \times (N^2 - \Delta'_N)) \xrightarrow{\pi_!} H^*(S^\infty \times_\tau (N^2 - \Delta'_N))$$

から，容易に

$$H^k(S^\infty \times_\tau (N^2 - \Delta'_N)) \cong \mathbf{F}_2 \ (0 \leqq k \leqq n-1)$$

を得る．

もし $\pi_!(\nu') \neq 0$ とすると，n 次元で $\pi^* = 0$ と $\dim H^n(S^\infty \times_\tau (N^2 - \Delta'_N)) = 1$ を得る．よって上の完全系列から $\pi_!(\nu') = \omega^n$ を得る．さらに $k > n$ のときに，$H^k(S^\infty \times_\tau (N^2 - \Delta'_N)) = 0$ を得る．このことは，全ての k について $\omega^k \neq 0$ であることに矛盾する．故に (4.2) を得る．

$\tilde{j}^*(1\times\nu)=\nu'$ であるから $\tilde{j}^*_\tau((\pi_{N^2})_!(1\times\nu)=0$ を得る．また $\hat{q}^*_\tau((\pi_{N^2})_!(1\times\nu))=0$ を得る．故に，同型 $(\pi_{\Gamma_0})_!:\bar{H}^n(S^\infty\times\Gamma_0)\cong\bar{H}^n(S^\infty\times_\tau\Gamma_0)$ から $\hat{q}^*(1\times\nu)=0$ を得る．ここで，$(\pi_{\Gamma_0})_!$ が同型であることは，ギザン・スミス系列と $H^*(X)\cong\bar{H}^*(\Gamma_0)$ から分かる．また同様にして，$\hat{q}^*(\nu\times 1)=0$ を得る．

故に，$\hat{q}^*=0:H^n(S^\infty\times N^2)\to\bar{H}^n(S^\infty\times\Gamma_0)$ と $q^*=0:H^n(N)\to\bar{H}^n(\Gamma)$ を得るので，$\deg(q^*)$ は偶数であることが分かる．

これから次数の一意性を証明する．(p,q) と (p',q') を φ の選択写像対とする．$\hat{R}:\Gamma_{01}\to N^2-\Delta_N$ と $\hat{R}':\Gamma_{10}\to N^2-\Delta_N$ は，各々 $\hat{R}(z,z')=(q(z),Tq'(z'))$ と $\hat{R}'(z',z)=(T'q'(z'),q(z))$ で定義される．

$q=q'$ のとき，$\hat{R}$ は同変写像である．すなわち，$\hat{R}T_0=\hat{T}\hat{R}$ である．ここで $\hat{T}(z,z')=(T(z'),\ T(z))$．しかしながら $\hat{T}$ は，$N^2-\Delta_N$ 上で自由な対合ではない．

次の図式を考えよう．

(4.3)
$$
\begin{array}{ccccc}
X & \xleftarrow{p} & \Gamma & \xrightarrow{q} & N \\
\uparrow{=} & & \uparrow{\pi_1} & & \uparrow{\pi_1} \\
X & \xleftarrow{p} & \Gamma_{01} & \xrightarrow{\hat{R}} & N^2-\Delta_N \\
\downarrow{T} & & \downarrow{T} & & \downarrow{T_N} \\
X & \xleftarrow{p} & \Gamma_{10} & \xrightarrow{\hat{R}'} & N^2-\Delta_N \\
\downarrow{=} & & \downarrow{\pi_1} & & \downarrow{\pi_1} \\
X & \xleftarrow{p'} & \Gamma' & \xrightarrow{T'q'} & N.
\end{array}
$$

$\pi_i^*\ (i=1,2)$ は同型であるので，

(4.4) $$\deg((p^*)^{-1}q^*)=\deg((p'^*)^{-1}q'^*T'^*).$$

を得る．

T' が向きを保つ対合のとき，$\deg((p^*)^{-1}q^*)=\deg((p'^*)^{-1}q'^*)$．である．

T' が向きを反転する対合のとき，$q'(z')=q(z')$ とするとき，$\deg((p^*)^{-1}q^*)=-\deg((p^*)^{-1}q^*)$ である．よって $\deg((p^*)^{-1}q^*)=0$ である．

いずれにしても，φ の次数は一意的に定まる．

□

次の結果も同様に証明される (cf. Proposition 3.1).

Corollary 4.2. *Under the same conditions as Theorem 4.1 , assume that an involution T' on N is free. Then there exists a unique even number m such that $\deg\varphi=\{m\}$. In particular, if n is an even number, then $\deg\varphi=\{0\}$.*

参考文献

[1] R. Brown, The Lefschetz Fixed Point Theorem, Scott, Foresman and Company, Glenview III, London, (1971).

[2] A. Dold, Lectures on Algebraic Topology, Springer-Verlag, Berlin, (1972).

[3] R. Engelking, General Topology, Heldermann Verlag, Berlin (1989).

[4] L. Górniewicz, Remark on the Lefschetz-type fixed point theorem, Bulletin de l'academie Polonaise des sciences 21, No.11, (1973), 983-989.

[5] L. Górniewicz, Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings, Kluwer Academic Publishers, (1999).

[6] Y, Hara and Y. Moriwaki, The degree of multivalued maps from manifolds to spheres, J. Fixed Point Theory Appl. 11 (2012) 253-259.

[7] M. Nakaoka, Continuous maps of manifolds with involution I, Osaka J. Math. 11, (1974), 129-145.

[8] M. Nakaoka, Continuous maps of manifolds with involution II, Osaka J. Math. 11, (1974), 147-162.

[9] M. Nakaoka, Continuous maps of manifolds with involution III, Osaka J. Math. 12, (1975), 197-208.

[10] Y. Shitanda, A fixed point theorem and equivariant points for set-valued mappings, Publ. RIMS. Kyoto Univ. Vol. 45, No. 3, (2009), 811-844

[11] Y. Shitanda, A generalization of antipodal point theorems for set-valued mappings, Hokkaido Math. J. . Vol. 20, No. 3, (2010), 217-238

[12] E. H. Spanier, Algebraic Topology, Springer-Verlag, New York (1966).