数理解析研究所講究録
第 1923 巻 2014 年 214-220

不確実性を持つ準凸計画問題に対するsurrogate双対定理

鈴木　聡 (Satoshi Suzuki),
島根大学大学院 総合理工学研究科 数理科学領域
黒岩 大史 (Daishi Kuroiwa),
島根大学大学院 総合理工学研究科 数理科学領域
Gue Myung Lee
Department of Applied Mathematics, Pukyong National University

概 要

本講究録では, 不確実性を持つ数理計画問題に対する手法の一つであるロバスト最適化について述べる. 特に, 近年筆者等によって示された不確実性を持つ準凸計画問題に対する surrrogate 双対定理とその制約想定について紹介する.

1　導入

本講究録では, 次のような数理計画問題について考察する.

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & f(x), \\ \text{subject to} & \forall i \in I,\ g_i(x, v) \leq 0. \end{array}$$

ただし, $I = \{1, \cdots, m\}$, $g_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$, $\mathcal{V}_i \subset \mathbb{R}^q$, $(i = 1, \cdots, m)$, $\mathcal{V} = \prod_{i=1}^m \mathcal{V}_i$, $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ とする. この問題において v は制約関数の持つ不確実性を表しており, $\mathcal{V}$ の元であること以外の情報はなく正確に決定することができない. 実社会上において起こる問題に対して最適化を用いた問題解決を行う場合, こうした不確実性がしばしば生じる. 実際最適化の手法を用いて問題を解決するためには, まず問題を数理モデル化するという作業が必要となる. 商品製造コストを最小化する問題の場合, 原料価格の変動, 需要量, 為替レート等予測の極めて難しい不確実性を持ったパラメータが多く存在する. このような問題に対してどのように制約関数ないし目的関数を決定し数理モデル化するのが適切であるかということは非常に難しい問題である. また近年の研究においては, パラメータの値を少し変えただけで大きく制約を破ってしまう場合がある等 ([2]), 不確実性をどのようにとらえていくかということは喫緊の課題となっている.

このような不確実性を持つ問題に対する手法として近年注目を集めているのが, ロバスト最適化である. ロバスト最適化においては次にあげるロバスト対応と呼ばれる問題を考える:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & f(x), \\ \text{subject to} & \forall i \in I, \forall v \in \mathcal{V}, g_i(x,v) \leq 0. \end{array}$$

すなわちロバスト対応とは全ての v に対して制約を満たすような集合の上での最小化を行う, という問題である. 不確実な状況を可能な限り想定した上でその全ての場合において制約を破らないような手の中から最適な解を得るという意味で, このような手法は「worst case approach」とも呼ばれる. 近年このような手法が注目を集めた理由としては, 不確実性の高まる時代においてより安定した解を得たいという実社会上の要請と, $\mathcal{V}$ に適切な仮定を入れた場合に, 不確実性を持つ最適化問題が二次錐計画問題, 半正定値計画問題, 半無限計画問題等といった研究対象として扱いやすい問題に帰着されるということが挙げられる. 不確実性を持つ問題に対する強固な解を与えるための手法として, ロバスト最適化における様々な結果が近年示されている [1, 2, 5, 7, 8, 16].

その中で, 我々は [16] において不確実性を持つ準凸計画問題に関する研究を行った. その際に用いたのが surrogate 双対性と呼ばれるものである. surrogate 双対性は 1965 年, Glover [3] によって 0-1 整数計画問題に対する緩和問題として提案された. さらに 1968 年, Luenberger [9] によって準凸計画問題についても適用できることが示され, その後も Greenberg, Pierskalla [4], Penot, Volle [10], 鈴木, 黒岩 [14] 等, 準凸計画問題に対する surrogate 双対定理に関する様々な結果が示されている. それらの結果を参考に, 我々は [16] において不確実性を持つ準凸計画問題に対する surrogate 双対定理とその必要十分な制約想定について研究を行った.

本講究録では [16] における surrogate 双対定理とその制約想定について紹介し, その有用性について考察する.

2 準備

本発表を通じて関数 f は $\mathbb{R}^n$ から拡張実数 $\overline{\mathbb{R}} := [\infty, \infty]$ への関数とする. f が凸関数であるとは, 任意の x_1, $x_2 \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in (0,1)$ に対して,

$$f((1-\alpha)x_1 + \alpha x_2) \leq (1-\alpha)f(x_1) + \alpha f(x_2)$$

が成り立つときをいう. f のエピグラフを次のように定義する:

$$\mathrm{epi} f = \{(x,r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq r\}.$$

このとき, f が凸関数であることと $\mathrm{epi} f$ が凸集合であることは同値である. f の Fenchel 共役関数 f^* を次のように定義する:

$$f^*(v) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle v, x \rangle - f(x)\}, \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

よく知られた事実として, f が下半連続真凸関数であることと, $f = f^{**}$ が成り立つことは同値である. 数理計画問題において, 目的関数及び制約関数が凸関数であるとき, その問題は凸計画問題と呼ばれる.

次に, f が準凸関数であるとは, 任意の $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in (0,1)$ に対して,

$$f((1-\alpha)x_1 + \alpha x_2) \leq \max\{f(x_1), f(x_2)\}$$

が成り立つときをいう. 次に, 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ と $\overline{\mathbb{R}}$ 上の二項関係 $\diamond$ に対して関数 f のレベル集合を次のように定義する:

$$L(f, \diamond, \alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \diamond \alpha\}.$$

このとき, f が準凸関数であることと, 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して $L(f, \leq, \alpha)$ が凸集合であることは同値である. 任意の凸関数は準凸関数であるが, その逆は一般には成り立たない. また, 凸計画問題と同様に, 目的関数及び制約関数が準凸関数であるとき, その問題は準凸計画問題と呼ばれる.

3 不確実性を持つ準凸計画問題に対するsurrogate双対定理

[16] において我々は, 次のような定理を示した.

定理 1. [16] $I = \{1, \cdots, m\}$, $g_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$, 連続, 任意の $v_i \in \mathbb{R}^q$ に対して $g_i(\cdot, v_i)$: 凸関数, $\mathcal{V}_i \subset \mathbb{R}^q$, $(i = 1, \cdots, m)$, $\mathcal{V} = \prod_{i=1}^m \mathcal{V}_i$, $F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, \cdots, m\}, \forall v_i \in \mathcal{V}_i, g_i(x, v_i) \leq 0\} \neq \emptyset$ とする.

このとき, 次の二つの条件は同値:

(i) 次の錐 K_S は閉凸である:

$$K_S := \bigcup_{v \in \mathcal{V}, \lambda \in \mathbb{R}^m_+} \mathrm{cl\,cone\,epi} \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\cdot, v_i) \right)^*,$$

(ii) 任意の上半連続準凸関数 f に対して,

$$\inf\{f(x) \mid x \in F\} = \max_{v \in \mathcal{V}, \lambda \in \mathbb{R}^m_+} \inf \left\{ f(x) \,\middle|\, \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x, v_i) \leq 0 \right\}.$$

定理 1 は不確実性を持つ準凸計画問題に対する surrogate 双対定理であり, また (i) の条件がその必要十分な制約想定であることを示している. 近年, このような必要十分な制約想定に関する研究が盛んになされている ([6, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 15]). 中でも Lagrange 双対定理に関する結果は数多く示されており, surrogate 双対定理との関連も深い重要なものである. ここでは特に, 次に挙げる不確実性を持つ凸計画問題に対する Lagrange 双対定理と, 定理 1 との関連について述べる.

定理 2. [7] $I = \{1, \cdots, m\}$, $g_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$, 連続, 任意の $v_i \in \mathbb{R}^q$ に対して $g_i(\cdot, v_i)$: 凸関数, $\mathcal{V}_i \subset \mathbb{R}^q$, $(i = 1, \cdots, m)$, $\mathcal{V} = \prod_{i=1}^m \mathcal{V}_i$, $F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, \cdots, m\}, \forall v_i \in \mathcal{V}_i, g_i(x, v_i) \leq 0\} \neq \emptyset$ とする.

このとき, 次の二つの条件は同値:

(i) 次の錐 K_L は閉凸である:

$$K_L := \bigcup_{v \in \mathcal{V}, \lambda \in \mathbb{R}_+^m} \mathrm{epi} \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\cdot, v_i) \right)^*,$$

(ii) 任意の実数値凸関数 f に対して,

$$\inf\{f(x) \mid x \in F\} = \max_{v \in \mathcal{V}, \lambda \in \mathbb{R}_+^m} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x, v_i) \right\}.$$

制約集合の包含に関する特徴付け ([16], Theorem 3) より次の二つの式が成り立つ:

$$K_L \subset K_S \subset \mathrm{epi}\delta_F^*,$$
$$\mathrm{clco} K_L = \mathrm{clco} K_S = \mathrm{epi}\delta_F^*.$$

上式から, K_L が閉凸であるとき K_S もまた閉凸となることが分かる. しかし, 次の例が示すように, その逆は一般に成り立たない.

Example 1. $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2 = [1, 2]$, g_1, g_2 を次のような関数とする:

$$g_1(x, v) = \begin{cases} \dfrac{v}{2}(x - v)^2 & x \geq v, \\ 0 & x \leq v, \end{cases}$$

$$g_2(x, v) = \begin{cases} 0 & -v \leq x, \\ \dfrac{v}{2}(x + v)^2 & x \leq -v. \end{cases}$$

g_1, g_2 の定義より, 制約集合 F は次のような集合となる.

$$F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, \cdots, m\}, \forall v_i \in \mathcal{V}_i, g_i(x, v_i) \leq 0\} = [-1, 1].$$

このとき, $(g_1(\cdot, v))^*$, $(g_2(\cdot, v))^*$ はそれぞれ次のような関数となる:

$$(g_1(\cdot, v))^*(w) = \begin{cases} \dfrac{w^2}{2v} - vw & w \geq 0, \\ \infty & w < 0. \end{cases}$$

$$(g_2(\cdot, v))^*(w) = \begin{cases} \infty & w > 0, \\ \dfrac{w^2}{2v} + vw & w \leq 0. \end{cases}$$

よって,

$$K_S = \bigcup_{v\in\mathcal{V},\lambda\geq 0} \operatorname{cl}\operatorname{cone}\operatorname{epi}(\lambda g(\cdot,v))^* = \{(x,\alpha)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|\leq\alpha\}$$

となり, K_S は閉凸集合となる. 一方,

$$K_L = \bigcup_{v\in\mathcal{V},\lambda\geq 0} \operatorname{epi}(\lambda g(\cdot,v))^* = \{(x,\alpha)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|<\alpha\}\cup\{(0,0)\}$$

となり, K_L は閉集合ではない.

よって, 定理1より, 任意の上半連続準凸関数に対して surrogate 双対性が成り立つが, 定理2より, Lagrange 双対定理が成り立たないような実数値凸関数が存在する. 実際, 実数値凸関数として $f(x)=-x$ を取るとき, Lagrange 双対性は成り立たない. $F=[-1,1]$ より,

$$\inf_{x\in F} f(x) = -1.$$

一方, 任意の $v\in\mathcal{V}$, $\lambda\in\mathbb{R}^2_+$ に対して,

$$f(x)+\sum_{i=1}^{2}\lambda_i g_i(x,v_i) = \begin{cases} -x+\lambda_1\dfrac{v_1}{2}(x-v_1)^2 & x\geq v_1,\\ -x & -v_2\leq x\leq v_1,\\ -x+\lambda_2\dfrac{v_2}{2}(x+v_2)^2 & x\leq -v_2.\end{cases}$$

$v_1>1$ のとき,

$$\begin{aligned}\inf_{x\in\mathbb{R}^n}\left\{f(x)+\sum_{i=1}^{2}\lambda_i g_i(x,v_i)\right\} &\leq \inf_{v_2\leq x\leq v_1}\{-x\}\\ &= -v_1\\ &< -1.\end{aligned}$$

また, $v_1=1$, $\lambda_1>0$ のとき,

$$\begin{aligned}\inf_{x\in\mathbb{R}^n}\left\{f(x)+\sum_{i=1}^{2}\lambda_i g_i(x,v_i)\right\} &\leq \inf_{x\geq 1}\left\{-x+\lambda_1\frac{1}{2}(x-1)^2\right\}\\ &= \inf_{x\geq 1}\left\{\frac{\lambda_1}{2}\left(x-(1+\frac{1}{\lambda_1})\right)^2-\frac{2\lambda_1+1}{2\lambda_1}\right\}\\ &= -\frac{2\lambda_1+1}{2\lambda_1}\\ &< -1.\end{aligned}$$

最後に, $v_1=1$, $\lambda_1=0$ のとき,

$$\begin{aligned}\inf_{x\in\mathbb{R}^n}\left\{f(x)+\sum_{i=1}^{2}\lambda_i g_i(x,v_i)\right\} &\leq \inf_{x\geq 1}\left\{-x+\lambda_1\frac{v_1}{2}(x-v_1)^2\right\}\\ &= \inf_{x\geq 1}\{-x\}\\ &= -\infty\\ &< -1.\end{aligned}$$

よって, 任意の $v \in \mathcal{V}$, $\lambda \in \mathbb{R}^2_+$ に対して,

$$\inf\{f(x) \mid x \in F\} = -1 > \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \left\{ f(x) + \sum_{i=1}^{2} \lambda_i g_i(x, v_i) \right\}$$

となり, Lagrange 双対性は成り立たない. ただしこのとき,

$$\inf\{f(x) \mid x \in F\} = \sup_{v\in\mathcal{V},\lambda\in\mathbb{R}^2_+} \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \left\{ f(x) + \sum_{i=1}^{2} \lambda_i g_i(x, v_i) \right\}$$

は成立する. 一般に分離可能凸関数に対しては上記のような等式が常に成立する. 詳細は [17] 等を参照のこと.

一方, $v_1 = 1$, $v_2 = 1$, $\lambda = (1.0)$ とするとき,

$$\inf \left\{ f(x) \,\middle|\, g_1(x, 1) \leq 0 \right\} = -1$$

となり, surrogate 双対性が成り立つ.

例 1 の示すように, 制約集合の境界上で制約関数の微分が 0 になるような場合, Lagrange 双対定理は成り立たない. 一方で surrogate 双対定理はその様な場合に対しても適用できる場合が多く, その意味において surrogate 双対定理は, 準凸計画問題のみならず凸計画問題に対しても有用であるということができる.

参考文献

[1] Beck, A., Ben-Tal, A. (2009). Duality in robust optimization: Primal worst equals dual best. Operations Research Letters, 37, 1–6.

[2] Ben-Tal, A., Nemirovski, A. (2000). Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data. Mathematical Programming, 88, 411–424.

[3] Glover, F. (1965). A Multiphase-Dual Algorithm for the Zero-One Integer Programming Problem. Operations Research, 13, 879–919.

[4] Greenberg, H. J., Pierskalla, W. P. (1973). Quasi-conjugate functions and surrogate duality. Cahiers Centre Études Recherche Opér, 15, 437–448.

[5] Hu, M., Fukushima, M. (2013). Existence, uniqueness, and computation of robust Nash equilibria in a class of multi-leader-follower games. SIAM Journal on Optimization, 23, 894–916.

[6] Jeyakumar, V., Dinh, N., Lee, G. M. (2004). A new closed cone constraint qualification for convex optimization. Research Report AMR 04/8, Department of Applied Mathematics, University of New South Wales.

[7] Jeyakumar, V., Li, G. Y. (2010). Strong duality in robust convex programming: complete characterizations. SIAM Journal on Optimization, 20, 3384–3407.

[8] Li, G. Y., Jeyakumar, V., Lee, G. M. (2011). Robust conjugate duality for convex optimization under uncertainty with application to data classification. Nonlinear Analysis, 74, 2327–2341.

[9] Luenberger, D. G. (1968). Quasi-convex programming. SIAM Journal on Applied Mathematics, 16, 1090–1095.

[10] Penot, J. P., Volle, M. (2004). Surrogate programming and multipliers in quasi-convex programming. SIAM Journal on Control and Optimization, 42, 1994–2003.

[11] Suzuki, S., Kuroiwa, D. (2011). On set containment characterization and constraint qualification for quasiconvex programming. Journal of Optimization Theory and Applications, 149, 554–563.

[12] Suzuki, S., Kuroiwa, D. (2011). Optimality conditions and the basic constraint qualification for quasiconvex programming. Nonlinear Analysis, 74, 1279–1285.

[13] Suzuki, S., Kuroiwa, D. (2012). Necessary and sufficient conditions for some constraint qualifications in quasiconvex programming. Nonlinear Analysis, 75, 2851–2858.

[14] Suzuki, S., Kuroiwa, D. (2012). Necessary and sufficient constraint qualification for surrogate duality. Journal of Optimization Theory and Applications, 152, 366–377.

[15] Suzuki, S., Kuroiwa, D. (2013). Some constraint qualifications for quasiconvex vector-valued systems. Journal of Global Optimization, 55, 539–548.

[16] Suzuki, S., Kuroiwa, D., and Lee, G. M. (2013). Surrogate duality for robust optimization. European Journal of Operational Research, 231, 257–262.

[17] Tseng, P. (2009). Some convex programs without a duality gap. Mathematical Programming, 116, 553–578.