数理解析研究所講究録
第 1923 巻 2014 年 198-204

On some variational inequality problems

横浜創学館高等学校　窪田 理英子 (Rieko Kubota)
YOKOHAMA SO-GAKUKAN HIGH SCHOOL

1 Introduction and Preliminaries

本稿は 東京工業大学 高橋 渉 先生，高橋非線形解析研究所 竹内 幸雄 氏との共著論文 [12]
" The Structure of Projection Methods
for Variational Inequality Problems and Weak Convergence Theorems "
の概略とその簡単な解説である．

本稿では，R を実数の集合，N を正の整数の集合とする．H を実 Hilbert 空間，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ を内積，$\|\cdot\|$ を内積によって定まるノルムとする．以下，H を単に Hilbert 空間と記述する．

C を H の部分集合とし T を C から H への写像とする．$F(T)$ を T の不動点の集合とする．任意の $x,\ y\in C$ について $\|Tx-Ty\|\leq k\|x-y\|$ となる正の数 k が存在するとき，T を k–Lipschitz continuous という．特に，$\|Tx-Ty\|\leq\|x-y\|$ であるとき非拡大写像という．$F(T)\neq\emptyset$ であり，任意の $x\in C,\ v\in F(T)$ について $\|Tx-v\|\leq\|x-v\|$ となるとき，T を quasi-nonexpansive と呼ぶ．$\|Tx-Ty\|^2\leq\langle Tx-Ty,x-y\rangle$ が任意の $x,\ y\in C$ について成り立つとき，T を firmly nonexpansive という．T が firmly nonexpansive ならば非拡大である．

記法の習慣に従って T を A に置き換え，A を C から H への写像とする．I を H 上の恒等写像とする．任意の $x,\ y\in C$ について $\langle x-y,Ax-Ay\rangle\geq 0$ となるとき，A は単調であるという．任意の $x,\ y\in C$ について，$\langle x-y,Ax-Ay\rangle\geq\alpha\|Ax-Ay\|^2$ となるような $\alpha\in(0,\infty)$ が存在するとき，A を α–逆単調写像という (Liu and Nashed [14] を参照)．A が α–逆単調写像であるならば，明らかに A は単調かつ $1/\alpha$–Lipschitz continuous である．$a\in(0,2\alpha)$ の場合，$I-aA$ は非拡大写像で，任意の $x,\ y\in C$ について次の不等式が成り立つ．

$$\|(I-aA)x-(I-aA)y\|^2\leq\|x-y\|^2-a(2\alpha-a)\|Ax-Ay\|^2.$$

C を閉凸集合とする．このとき，任意の $x\in H$ について $\|x-x_0\|=\min\{\|x-y\|:y\in C\}$ となる唯一の $x_0\in C$ が存在する．H の要素 x について，$P_Cx=x_0$ で定義される H から C の上への写像 P_C は距離射影と呼ばれる．H から C への写像 T が C への距離射影であることと，$x\in H,y\in C$ について $0\leq\langle x-Tx,Tx-y\rangle$ が成り立つことは同値である．P_C は $x\in H,y\in C$ について $\|x-P_Cx\|^2+\|P_Cx-y\|^2\leq\|x-y\|^2$ を満たし firmly nonexpansive である．

A を C から H への写像とし，次の様に集合 $VI(C,A)$ を定義する．

$$VI(C,A)=\{x\in C:\langle y-x,Ax\rangle\geq 0\quad\text{for all}\quad y\in C\}.$$

$VI(C,A)$ の要素 x を求める問題は変分不等式問題と呼ばれる．

C を n 次元ユークリッド空間 R^n の閉凸部分集合とする．A を C から R^n への単調な k-Lipschitz 連続写像とし $VI(C,A) \neq \emptyset$ とする．$a \in (0,1/k)$ について，C 上の自己写像 V_a と U_a を次のように定義する．

$$V_a x = P_C(I - aA)x, \quad U_a x = P_C(I - aAV_a)x \quad \text{for} \quad x \in C.$$

$x_1 \in C$ とし，C の点列 $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ を次の様に生成する．

$$y_n = V_a x_n, \quad x_{n+1} = U_a x_n \quad \text{for} \quad n \in N.$$

この Extragradient method と呼ばれる反復法は Korplevich [9] によって導入された．これらの条件の下で，彼は $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ が $VI(C,A)$ の同一の点に収束することを示した．

Takahashi and Toyoda [24] は 2003 年に Theorem1.1 を証明し，Nadezhkina and Takahashi [17] は 2006 年に Extragradient method と関連する Theorem 1.2 を証明した．

Theorem 1.1. *Let C be a closed convex subset of a Hilbert space H. Let A be an α–inverse–strongly–monotone mapping of C into H. Let $\{a_n\}$ be a sequence in $[c_1,d_1]$ as $0 < c_1 \leq d_1 < 2\alpha$. For each $n \in N$, let V_{a_n} be a self–mapping on C defined by $V_{a_n}x = P_C(I - a_n A)x$ for $x \in C$. Let S be a nonexpansive self–mapping on C. Assume $F(S) \cap VI(C,A) \neq \emptyset$. Let $\{\alpha_n\}$ be a sequence in $[c_2,d_2]$ as $0 < c_2 \leq d_2 < 1$. Let $x_1 \in C$ and let $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ be sequences in C defined by*

$$y_n = V_{a_n} x_n, \quad x_{n+1} = \alpha_n S V_{a_n} x_n + (1 - \alpha_n) x_n \qquad \text{for} \quad n \in N.$$

Then $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ converge weakly to a point $u \in F(S) \cap VI(C,A)$.

Theorem 1.2. *Let C be a closed convex subset of a Hilbert space H and A be a monotone and k-Lipschitz continuous mapping of C into H. Let $\{a_n\}$ be a sequence in $[c_1,d_1]$ as $0 < c_1 \leq d_1 < 1/k$. For each $n \in N$, let V_{a_n} and U_{a_n} be a self–mappings on C defined by*

$$V_{a_n} x = P_C(I - a_n A)x, \quad U_{a_n} x = P_C(I - a_n A V_{a_n})x \quad \text{for} \quad x \in C.$$

Let S be a nonexpansive self–mapping on C. Assume $F(S) \cap VI(C,A) \neq \emptyset$. Let $\{\alpha_n\}$ be a sequence in $[c_2,d_2]$ as $0 < c_2 \leq d_2 < 1$. Let $x_1 \in C$ and let $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ be sequences in C defined by

$$y_n = V_{a_n} x_n, \;\; z_n = U_{a_n} x_n, \;\; x_{n+1} = \alpha_n S U_{a_n} x_n + (1 - \alpha_n) x_n \quad \text{for} \;\; n \in N.$$

Then $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ and $\{z_n\}$ converge weakly to a point $u \in F(S) \cap VI(C,A)$.

Takahashi and Toyoda [24] と Nadezhkina and Takahashi [17] に動機を得て，変分不等式問題の projection method を考察する．私たちが使用したほとんどのテクニックは [24] と [17] で既に準備されていた．しかし，彼らは method の構造を必ずしも明らかにしていない．私たちのアプローチは，彼らの手法とは異なり method の構造を重視する．私たちの目的は，この構造を明らかにし構造に則した自然な手法で Theorem1.1, 1.2 を拡張することである．

2 Lemmas

この節では，H を Hilbert 空間，I を H 上の恒等写像，P_C を H から閉凸集合 C への距離射影とする．Hilbert 空間 H は次の Opial property [18] を持つ．

If $\{x_n\}$ is a sequence in H which converges weakly to $u \in H$, then

$$\liminf_n \|x_n - u\| < \liminf_n \|x_n - v\| \quad \text{for} \quad v \in H \text{ with } v \neq u.$$

S を部分集合 C から H への写像とする．$I - S$ が demiclosed at 0 とは

If $\{x_n\}$ is a sequence in C which converges weakly to $u \in C$ and satisfies $\lim_n \|Sx_n - x_n\| = 0$, then $u \in F(S)$.

が満たされることである．最初に本稿の議論で必要とした 2 つの概念を提示した．

次に示す lemma は変分不等式問題では基本的で良く知られている．

Lemma 2.1. *Let A be a mapping of C into H with $VI(C,A) \neq \emptyset$. Let $a \in (0,\infty)$ and let V_a be a self mapping on C defined by $V_a x = P_C(I - aA)x$ for $x \in C$. Then $F(V_a) = VI(C,A)$.*

簡単な計算で次の lemma を導くことができる．この lemma によって，本稿で考察する method では $VI(C,A)$ の要素に代えて $vi(C,A)$ の要素を求めれば良いことが分る．

Lemma 2.2. *Let C be a convex subset of a Hilbert space H. Let A be a mapping of C into H and let $vi(C,A) = \{v \in C : \langle z - v, Az\rangle \geq 0$ for all $z \in C\}$. Then, the followings hold:*

(1) *If A is continuous, then $vi(C,A) \subset VI(C,A)$.*

(2) *If A is monotone then $\langle y - u, Ay\rangle \geq \langle y - u, Au\rangle \geq 0$ for $u \in VI(C,A)$ and $y \in C$. That is, if A is monotone then $VI(C,A) \subset vi(C,A)$.*

(3) *If A is monotone and continuous, then $VI(C,A) = vi(C,A)$.*

本稿の結果を得るために，次の Lemma 2.3 が重要である．

Lemma 2.3. *Let $c > 0$ and $\{a_n\} \subset [c,\infty)$. Let A be a monotone and k-Lipschitz continuous mapping of C into H with $VI(C,A) \neq \emptyset$. For each $n \in N$, let V_{a_n} be a self mapping on C defined by $V_{a_n} x = P_C(I - a_n A)x$ for $x \in C$. Let $\{x_n\}$ be a bounded sequence in C. If $\lim_n \|V_{a_n} x_n - x_n\| = 0$ then the weak limit of any weakly convergent subsequence of $\{x_n\}$ is in $VI(C,A)$.*

この lemma は，projection method において $\lim_n \|V_{a_n} x_n - x_n\| = 0$ という条件が非常に重要であることを示唆する．Takahashi–Toyoda [24] の method では，Lemma 2.3, 2.4 が中心的な役割を果たす．Lemma 2.4 は $\lim_n \|V_{a_n} x_n - x_n\| = 0$ を得るための条件を提示している．

Lemma 2.4. *Let A be an α–inverse–strongly–monotone mapping of C into H with $VI(C,A) \neq \emptyset$. Let $\{a_n\}$ be a sequence in $[c,d]$ as $0 < c \leq d < 2\alpha$. For each $n \in N$, let V_{a_n} be a self mapping on C defined by $V_{a_n}x = P_C(I - a_nA)x$ for $x \in C$. Suppose $\{x_n\}$ is a sequence in C such that $\lim_n \|x_n - u\| = \lim_n \|V_{a_n}x_n - u\|$ for $u \in VI(C,A)$. Then, $\lim_n \|V_{a_n}x_n - x_n\| = 0$.*

Nadezhkina-Takahashi [17] の method では，Lemma 2.3, 2.5 が重要な役割を果たす．Lemma 2.5 は，$\{U_{a_n}\}$ の性質を明らかにし，この method で $\lim_n \|V_{a_n}x_n - x_n\| = 0$ を得るための条件を提示している．従来 $\{U_{a_n}\}$ の性質は明確に記述されていなかった．

Lemma 2.5. *Let A be a monotone k-Lipschitz continuous mapping of C into H. Assume that $VI(C,A) \neq \emptyset$. Let $0 < d < 1/k$ and $\{a_n\}$ be a sequence in $(0,d]$. For $n \in N$, let V_{a_n} and U_{a_n} be self mappings on C defined by*

$$V_{a_n}x = P_C(I - a_nA)x, \quad U_{a_n}x = P_C(I - a_nAV_{a_n})x \qquad \text{for} \quad x \in C.$$

Then, the followings hold:

(1) *$F(V_{a_n}) = F(U_{a_n}) = VI(C,A)$ for $n \in N$.*

(2) *Each U_{a_n} is quasi–nonexpansive with $F(U_{a_n}) = VI(C,A)$.*

(3) *Suppose $\{x_n\}$ is a sequence such that*

$$\lim_n \|x_n - u\| = \lim_n \|U_{a_n}x_n - u\| \quad \text{for} \quad u \in VI(C,A).$$

Then $\lim_n \|V_{a_n}x_n - x_n\| = 0$.

3 Main results

前節で準備した lemma を使用して次の 2 つの定理を証明できる．Theorem 3.1 は Takahashi-Toyoda [24] の Theorem 1.1 の拡張であり，Theorem 3.2 は Nadezhkina-Takahashi [17] の Theorem 1.2 の拡張である．彼らは S を非拡大写像としたが，S が quasi–nonexpansive で $I - S$ が demiclosed at 0 であれば充分であることが自然な考え方によって導かれる．

Theorem 3.1. *Let C be a closed convex subset of a Hilbert space H. Let A be an α–inverse–strongly–monotone mapping of C into H. Let S be a self–mapping on C. Assume that $F(S) \cap VI(C,A) \neq \emptyset$, S is quasi-nonexpansive and $I - S$ is demiclosed at 0. Let $\{a_n\}$ be a sequence in $[c,d]$ as $0 < c \leq d < 2\alpha$. For each $n \in N$, let V_{a_n} be a self–mapping on C defined by $V_{a_n}x = P_C(I - a_nA)x$ for $x \in C$. Let $\{\alpha_n\}$ be a sequence in $[a,b]$ as $0 < a \leq b < 1$. Let $x_1 \in C$ and let $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ be sequences in C defined by*

$$y_n = V_{a_n}x_n, \quad x_{n+1} = \alpha_n SV_{a_n}x_n + (1 - \alpha_n)x_n \qquad \text{for} \quad n \in N.$$

Then $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ converge weakly to a point $u \in F(S) \cap VI(C,A)$.

Theorem 3.2. *Let C be a closed convex subset of a Hilbert space H and A be a monotone and k-Lipschitz continuous mapping of C into H. Let S be a self–mapping on C. Assume that $F(S) \cap VI(C,A) \neq \emptyset$, S is quasi-nonexpansive and $I-S$ is demiclosed at 0. Let $\{a_n\}$ be a sequence in $[c,d]$ as $0 < c \leq d < 1/k$. For each $n \in N$, let V_{a_n} and U_{a_n} be self–mappings on C defined by*

$$V_{a_n}x = P_C(I - a_nA)x, \quad U_{a_n}x = P_C(I - a_nAV_{a_n})x \quad \text{for} \quad x \in C.$$

Let $\{\alpha_n\}$ be a sequence in $[a,b]$ as $0 < a \leq b < 1$. Let $x_1 \in C$ and let $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ and $\{z_n\}$ be sequences defined by

$$y_n = V_{a_n}x_n, \ z_n = U_{a_n}x_n, \ x_{n+1} = \alpha_n SU_{a_n}x_n + (1-\alpha_n)x_n \quad \text{for } n \in N.$$

Then $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ and $\{z_n\}$ converge weakly to a point $u \in F(S) \cap VI(C,A)$.

4 Applications

C を Hilbert 空間 H の部分集合，T を C から H への写像とする．2010 年に，Kocourek, Takahashi and Yao [10] によって generalized hybrid と呼ばれる写像族が導入された．次の条件を満たす実数 α, β が存在するとき，T は generalized hybrid であるという．

$$\alpha\|Tx-Ty\|^2 + (1-\alpha)\|x-Ty\|^2 \leq \beta\|Tx-y\|^2 + (1-\beta)\|x-y\|^2 \quad \text{for } x,\ y \in C.$$

この写像族は，非拡大写像族，nonspreading 写像族，hybrid 写像族を含む有用な非線形写像の族である．generalized hybrid 写像 T は，$F(T) \neq \emptyset$ であるならば qauasi-nonexpansive である．更に，Takahashi, Wong and Yao [25] は次の lemma を証明した．

Lemma 4.1. *Let C be a closed convex subset of a Hilbert space H and let T be a generalized hybrid self–mapping on C. Let $\{x_n\}$ be a sequence in C which converges weakly to $u \in C$ and satisfies $\lim_n \|Tx_n - x_n\| = 0$. Then $u \in F(T)$.*

2008 年に，Suzuki [19] は新しい写像族を導入した．H の部分集合 C 上の写像 T が，次の条件を満たすとき，Condition (C) を満たす写像という．

$$\text{(C)} \qquad \tfrac{1}{2}\|x-Tx\| \leq \|x-y\| \quad \textit{implies} \quad \|Tx-Ty\| \leq \|x-y\| \quad \text{for} \quad x,y \in C.$$

本稿では，この写像族を Class(C) と呼ぶ．また，ある $s \in [0,\infty)$ が存在して，

$$\text{(E)} \qquad \|x-Ty\| \leq s\|x-Tx\| + \|x-y\| \quad \text{for} \quad x,y \in C$$

であるとき，T を Condition (E) を満たす写像という (Falset et.al. [6] を参照).

T が非拡大写像ならば Class (C) である．Suzuki[19] は，T が Class (C) ならば $s=3$ として Condition (E) を満たすことを示し，また Lemma 4.2 を実質的に証明した．Condition (E) を満たす写像 T が $F(T) \neq \emptyset$ を満たせば qauasi-nonexpansive であることを注意しておく．

Lemma 4.2. *Let C be a closed convex subset of a Hilbert space H and let T be a self–mapping on C which satisfies condition (E). Let $\{x_n\}$ be a sequence in C which converges weakly to $u \in C$ and satisfies* $\lim_n \|Tx_n - x_n\| = 0$. *Then* $u \in F(T)$.

このような研究の成果によって，generalized hybrid 写像族や condition (E) を満たす写像族など，広範な写像族が Theorem 3.1 と Theorem 3.2 の仮定を満たすことがわかる．

Acknowledgements

東京工業大学 高橋 渉 先生 の丁寧なご指導に感謝いたします．また，この論稿を発表する機会を与えていただいた 新潟大学 田中 環 先生 にお礼申し上げます．

References

[1] K. Aoyama, S. Iemoto, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *"Fixed point and ergodic theorems for λ-hybrid mappings in Hilbert spaces"*, J. Nonlinear Convex Anal. **11** (2010), 335–343.

[2] S. Banach, " Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application atix équations intégrales ", Fund. Math., **3** (1922), 133–181.

[3] F. E. Browder, *"Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution in Banach spaces"*, Nonlinear functional analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol XVIII, Part2, Chicago, III., (1968), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., (1973), 251–262.

[4] R. E. Bruck, *"A simple proof of the mean ergodic theorems for nonlinear contractions in Banach spaces"*, Israel J. Math. **32** (1974), 107–116.

[5] P.E. Combettes and S.A. Hirstoaga, *"Equilibrium programing in Hilbert spaces"*, J. Nonlinear Convex Anal. **6** (2005), 117–136.

[6] J. G. Falset, E. L. Fuster, and T. Suzuki, *" Fixed point theory for a class of generalized nonexpansive mappings"*, J. Math. Anal. Appl. **375** (2011) 185–195.

[7] H. Iiduka, W. Talahashi, and M. Toyodai, *" Approximation of solutions of variational inequalities for monotone mappings"*, Panamer. Math. J. **14** (2004), no. **2**, 49–61.

[8] F. Kohsaka and W. Takahashi, *"Existence and approximation of fixed points of firmly nonexpansive-type mappings in Banach spaces"*, SIAM. J. Optim. **19** (2008), 824–835.

[9] G. M. Korpelevich, *"The extragradient method for finding saddle points and other problems"*, Matecon 12 (1976), 747–756.

[10] P. Kocourek, W. Takahashi, and J.-C. Yao, *"Fixed point theorems and weak convergence theorems for genelalized hybrid mappings in Hilbert spaces"*, Taiwanese J. Math. **14** (2010), 2497–2511. J. Nonlinear Convex Anal. **6** (2005), 505–523.

[11] M. A. Krasnoselskii, *"Two remarks on the method of successive approximations"*, Uspehi Mat. Nauk 10 (1955), 123–127 (Russian).

[12] R. Kubota, W. Takahashi and Y. Takeuchi, *"The Structure of Projection Methods for Variational Inequality Problems and Weak Convergence Theorems"*, submitted.

[13] R. Kubota and Y. Takeuchi, *"On Ishikawa's strong convergence theorem"*, to apear.

[14] F. Liu and M. Z. Nashed, *"Regularization of nonlinear ill-posed variational inequalities and convergence rates"*, Set-valued Anal. **6** (1998), 313-344.

[15] W. R. Mann, *"Mean value methods in iteration"*, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 506–510.

[16] N. Nadezhkina and W. Takahashi, *"Strong convergence theorem by the hybrid and extragradient method for nonexpansive mappings and monotone mappings"*, Kyoto University Research Information Repository, 1396 (2004), 42–48.

[17] N. Nadezhkina and W. Takahashi, *"Weak convergence theorem by an extragradient method for nonexpansive mappings and monotone mappings"*, J. Optim. Theory Appl., **128** (2006), 191-201.

[18] Z. Opial, *"Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings"*, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 591–597.

[19] T. Suzuki, *"Fixed point theorems and convergence theorems for some generalized nonexpansive mappings"*, J. Math. Anal. Appl. **340**, (2008) 1088-1095.

[20] W. Takahashi, *"Nonlinear Functional Analysis"*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[21] W. Takahashi, *"Introduction to Nonlinear and Convex Analysis"*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2009.

[22] W. Takahashi, *"Fixed point theorems for new nonlinear mappings in a Hilbert space"*, J. Nonlinear Convex Anal. **11** (2010), 79–88.

[23] W. Takahashi and Y. Takeuchi, *"Nonlinear ergodic theorem without convexity for generalized hybrid mappings in a Hilbert space"*, J. Nonlinear Convex Anal. **12 No 2** (2011), 399–406.

[24] W. Takahashi and M. Toyoda, *"Weak convergence theorems for nonepxansive mappings and monotone mappings"*, J. Optim. Theory Appl., **118** (2003), 417–428.

[25] W. Takahashi, N.-C. Wong, and J.-C. Yao, *"Attractive points and Halpern's type strong convergence theorems in Hilbert spaces"*, J. Nonlinear Convex Anal. **13** (2012).