数理解析研究所講究録
第 1923 巻 2014 年 192-197

写像を用いたFan-Takahashiの不等式定理とRicceriの定理の関連付け

(Association of Fan-Takahashi Inequality Theorem and Ricceri's Theorem Using a Certain Map)

新潟大学大学院自然科学研究科　齋藤　裕, 田中　環, 山田修司

Graduate School of Science and Technology, Niigata University

Yutaka Saito, Tamaki Tanaka, Syuuji Yamada

1　はじめに

本研究では，いわゆる高橋の不等式定理 ([2]) と Ricceri の定理 ([1]) の関係について考える。この２つの定理の関係については，Ricceri 氏が [1] において述べており，互いに同じ結論が得られるにもかかわらず，定理の条件が互いに相補的であることが知られている。この研究では Ricceri 氏の比較とは異なる視点で２つの定理を比較し，考察する。その結果として，条件として共通する性質を，写像とその性質を以て表現し，一般化した定理を提案する。

2　主題となる定理

E は線形位相空間，θ_E は E の零元とする。

まず，本研究の要となる定理を２つ紹介する。

定理 2.1 (Fan-Takahashi の不等式定理, [2]) E を実 *Hausdorff* 線形位相空間，X を E の空でない凸コンパクト部分集合，f を $X \times X$ 上の実数値写像で以下の条件を満たすものとする*:*

(1) 任意の $x \in X$ に対して，$f(x,\cdot)$ は X 上で凹関数*;*

(2) 任意の $y \in X$ に対して，$f(\cdot,y)$ は X 上で下半連続*;*

(3) 任意の $x \in X$ に対して，$f(x,x) \leq 0$ 。

このとき，任意の $y \in X$ に対して $f(\hat{x},y) \leq 0$ を満たす $\hat{x} \in X$ が存在する。

定理 2.2 (Fan-Takahashi の不等式定理に関しての Ricceri の定理, [1]) E を実線形位相空間，X を θ_E を含む E の凸コンパクト部分集合，f を $X \times E$ 上の実数値関数で以下の条件を満たすものとする*:*

(1) 任意の $x \in X$ に対して，$f(x,\cdot)$ は E 上で凹関数，$f(x,\theta_E)=0$;

(2) 任意の $y \in E$ に対して，$f(\cdot,y)$ は X 上で下半連続;

(3) 任意の $x \in \{x \in X \mid X \setminus \cup_{\lambda>0}\lambda(x-X) \neq \emptyset\}$ に対して，$f(x,x)>0$ 。

このとき，任意の $y \in X$ に対して $f(\hat{x},y) \leq 0$ ，を満たす $\hat{x} \in X$ が存在する。

前述の通り上記２種の定理は互いに相補的な関係にある。[1] では，関数 f についての条件 (3) を比較し，ある対角成分の像が不等式の基準となる 0 を境に逆の不等式記号になっており，同時に成立しないことが理由として述べられている。しかし，定理 2.2 の条件 (1) に追加されている $f(x,\theta_E)=0$ については特に触れられていない。そこで，本研究ではこの条件に着目していく。

3　条件の比較と写像による関連付け

まず，2つの定理を比較するために，定理 2.2 を２か所書き換える。1つ目は条件 (1) の $f(x,\theta_E)=0$ の部分である。そのために，条件 (1) の $f(x,\theta_E)=0$ がどのように付されたかを見る。[1] において定理 2.2 は次の定理の特殊な例として得られたものである。

定理 3.1 ([1]) E を実線形位相空間，V を E の有限次元部分空間，D を V の空でない部分集合，X を E の *(finitely)* 凸閉部分集合，K を θ_E を含む X の *(finitely)* コンパクト部分集合，$\tilde{\tau}$ を K がそれについてコンパクトになるような K 上の位相，f を $X \times V$ 上の実数値関数とする。f は以下の条件を満たすとする:

(1) 任意の $x \in X$ に対して，$f(x,\cdot)$ は V 上で凹関数;

(2) $f(\cdot,y)$ は任意の $y \in (X-X) \cap V$ に対して X 上で *(finitely)* 下半連続かつ任意の $y \in D$ に対して K 上で $\tilde{\tau}$-下半連続，$f(\cdot,\theta_E)$ は X 上で *(finitely)* 連続かつ K 上で $\tilde{\tau}$-連続.

このとき，$\psi(\theta_E)=0$ かつ任意の $x \in (X \cap V) \setminus \{x \in K \mid D \subseteq \cup_{\lambda>0}\lambda(x-X)\}$ に対して $f(x,x) > f(x,\theta_E)+\psi(x)$ を満たす V 上の任意の実数値凸関数 ψ に対して，任意の $y \in D$ に対して $f(\hat{x},y) \leq f(\hat{x},\theta_E)+\psi(y)$ ，を満たす $\hat{x} \in K$ が存在する。

この定理 3.1 において，$V=E$ ，$K=D=X$ ，$\tilde{\tau}$ は E 上の位相からなる X 上の相対位相，$\psi(\cdot)=0$ ，$f(x,\theta_E)=0$ とすると，定理 2.2 が得られる。このことを念頭に置くと，定理 2.2 の条件 (1) の $f(x,\theta_E)=0$ を $f(x,\theta_E) \leq 0$ としても，やはり定理 2.2 の条件を満たしている。関わる部分は条件の $f(x,x) > f(x,\theta_E)$ と結論の $f(\hat{x},y) \leq f(\hat{x},\theta_E)$ であるが，それぞれ問題なく強弱がつくことは容易に確認できる。よって条件 $f(x,\theta_E)=0$ を $f(x,\theta_E) \leq 0$ と書き換える。2つ目は，定理 2.2 の条件 (3) に用いられている集合

$$\{x \in X \mid X \setminus \cup_{\lambda>0}\lambda(x-X) \neq \emptyset\}$$

である。このままでも比較はできるが，より理解を深めるために定理 2.2 の他の条件が満たされてることを前提として，同値な集合 $x \in X \setminus \mathrm{ri}\, X$ で置き換える。ただし $\mathrm{ri}\, X$ は X の相対内部とする。以上2点を書き換えたものが次の系である。

系 3.1 E を実線形位相空間，X を θ_E を含む E の凸コンパクト部分集合，f を $X\times E$ 上の実数値関数で以下の条件を満たすものとする:

(1) 任意の $x\in X$ に対して，$f(x,\cdot)$ は E 上で凹関数，$f(x,\theta_E)\leq 0$;

(2) 任意の $y\in E$ に対して，$f(\cdot,y)$ は X 上で下半連続;

(3) 任意の $x\in X\setminus \mathrm{ri}\,X$ に対して，$f(x,x)>0$ 。

このとき，任意の $y\in X$ に対して $f(\hat{x},y)\leq 0$ ，を満たす $\hat{x}\in X$ が存在する。

これを踏まえて，2つの定理の関数の条件として異なる点を抜き出し，条件を満たすべき変数の範囲でまとめると，

	定理 2.1	系 3.1
任意の $x\in X$ に対して	$f(x,x)\leq 0$	$f(x,\theta_E)\leq 0$
任意の $x\in X\setminus \mathrm{ri}\,X$ に対して，		$f(x,x)>0$

となる。

ここで，X から X への写像 g を用いて，条件

$$\text{“任意の } x\in X \text{ に対して } f(x,g(x))\leq 0\text{ ”}$$

を作る。するとこれは，$g(x)=x$ （恒等写像）や $g(x)=\theta_E$ （定ベクトル写像）と置くことで，それぞれ定理 2.1 と系 3.1 の条件を表わすことができる。この変数の性質を写像を用いて一般化することが本研究のキーアイデアとなっている。もっとも，定理 2.1 が高橋の不動点定理から導かれることから，定理 2.1 で $g(x)=x$ と置くことは回帰的な発想である。

4 定義域上の写像 g を用いて統合した定理とその例

定義域上の写像 g を用いて，次のような定理を提案する。

定理 4.1 E を実線形位相空間，X を E の空でない凸コンパクト部分集合，g を $X\to X$ で連続な写像，f を $X\times E$ 上の実数値関数で以下の条件を満たすものとする:

(1) 任意の $x\in X$ に対して，$f(x,\cdot)$ は E 上で凹関数，

(2) 任意の $y\in E$ に対して，$f(\cdot,y)$ は X 上で下半連続;

(3) 任意の $x\in X$ に対して，$f(x,g(x))\leq 0$;

(4) もし $g(X)\neq X$ ならば，$f(\cdot,g(\cdot))$ は X 上で連続かつ任意の $x\in X\setminus \mathrm{ri}\,X$ に対して，$f(x,x)>0$ 。

このとき，任意の $y\in X$ に対して $f(\hat{x},y)\leq 0$ ，を満たす $\hat{x}\in X$ が存在する。

この定理は定理 2.1 と系 3.1 を含む。例として以下に 3 通りの関数を挙げるが，それぞれ次の表のようになっている。

	定理 2.1	系 3.1	定理 4.1
例 4.1	満たす	満たさない	満たす
例 4.2	満たさない	満たす	満たす
例 4.3	満たさない	満たさない	満たす

X を実数空間 $\mathbb{R}$ 上の区間 $[-1,1]$，f を $X \times X$ 上の実数値関数とする。

例 4.1 $f(x,y) = x - y$ とする。

(1) $f(\bar{x},y) = \bar{x} - y$ は明らかに凹である;

(2) $f(x,\bar{y}) = x - \bar{y}$ は明らかに連続;

(3) $f(x,g(x)) = 0 \leq 0$ *where* $g(x) = x$;

$\hat{x} = -1$ のとき，任意の $y \in [-1,1]$ に対して $f(\hat{x},y) = -1 + y \leq 0$ 。

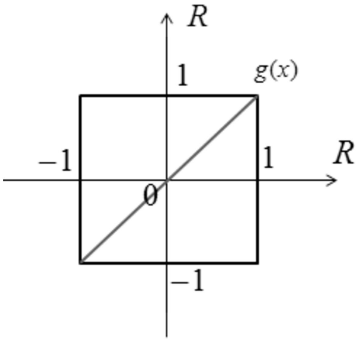

図 1: 例 4.1

例 4.2 $f(x,y) = xy$ とする。

(1) $f(\bar{x},y) = \bar{x}y$ は明らかに凹である;

(2) $f(x,\bar{y}) = \bar{y}x$ は明らかに連続;

(3) $f(x,g(x)) = 0 \leq 0$ *where* $g(x) = 0$;

(4) 任意の $\bar{x} \in X \setminus \mathrm{ri}\, X$ に対して $f(\bar{x},\bar{x}) = 1 > 0$ 。

$\hat{x} = 0$ のとき，任意の $y \in [-1,1]$ に対して $f(\hat{x},y) = 0 \leq 0$ 。

例 4.3 $f(x,y) = x(y - \frac{1}{2}x^2)$ とする。

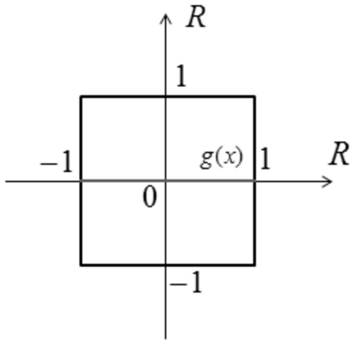

図 2: 例 4.2

(1) $f(\bar{x}, y) = \bar{x}y - \frac{1}{2}\bar{x}^3$ は明らかに凹である;

(2) $f(x, \bar{y}) = x(\bar{y} - \frac{1}{2}x^2)$ は明らかに連続;

(3) $f(x, g(x)) = 0 \leq 0$ *where* $g(x) = \frac{1}{2}x^2$;

(4) 任意の $\bar{x} \in X \setminus \mathrm{ri}\, X$ に対して $f(\bar{x}, \bar{x}) = \frac{1}{2}$ または $\frac{3}{2} > 0$ 。

$\hat{x} = 0$ のとき，任意の $y \in [-1, 1]$ に対して $f(\hat{x}, y) = 0 \leq 0$ 。

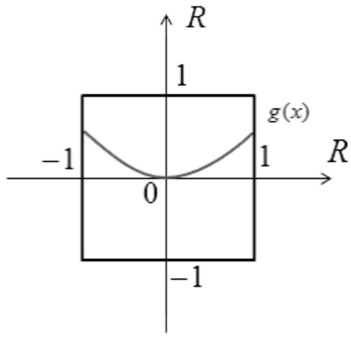

図 3: 例 4.3

これらの例から,，定理 2.1 は和の形に強く，系 3.1 は積の形に強い。それらを組み合わせた定理 4.1 はその複合形にも対応できている。

5　おわりに

本研究では相反する条件を含む 2 つの定理について，共通の条件を写像を用いて表現することで関連付けて 1 つの定理として提案した。この研究の本質は，ある関数の条件をその定義域上の写像をもって特徴づけたところにある。

参考文献

[1] B. Ricceri, *Existence Theorems for Nonlinear Problems*, Rend. Accad. Naz. Sci. XL, **11** (1987), 77–99.

[2] W. Takahashi, *Nonlinear Variational Inequalities and Fixed Point Theorems*, Journal of the Math. Society of Japan, **28** (1976), 168–181.