数理解析研究所講究録
第 1923 巻 2014 年 82-89

誤差を含んだ収縮射影法による共通不動点近似

東邦大学・理学部　木村泰紀 (Yasunori Kimura)
Faculty of Science, Toho University

1　はじめに

非拡大写像族の共通不動点近似は, 多くの非線形問題に応用され, 研究がすすめられている分野の一つである.

近似点列の生成方法には多くの種類があるが, 本稿では 2008 年に Takahashi, Takeuchi, Kubota によって証明された, Hilbert 空間における非拡大写像族の共通不動点近似法 [5] に焦点を絞ることにする. この手法は収縮射影法と呼ばれ, Banach 空間や Hadamard 空間など, さまざまな空間への拡張がなされている. 次の定理は Hadamard 空間の一つの例である実 Hilbert 球上での収縮射影法に関する結果である.

定理 1 (Kimura [3]). (B, ρ) を実 Hilbert 球, $\{T_i : i \in I\}$ を B からそれ自身への非拡大写像の列, F を $\{T_i\}$ の共通不動点集合とし, F は空でないと仮定する. $\{\alpha_n(i) : i \in I,\ n \in \mathbb{N}\}$ を $[0,1]$ の数列で各 $i \in I$ に対して $\liminf_{n\to\infty} \alpha_n(i) < 1$ をみたすとする. $x \in B$ に対して点列 $\{x_n\}$ を次のようにして生成する. $x_1 = x$, $C_0 = B$ とし, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$
\begin{aligned}
&y_n(i) = \alpha_n(i)x_n \oplus (1-\alpha_n(i))T_i x_n \text{ for each } i \in I,\\
&C_n = \left\{ z \in B : \sup_{i\in I} \rho(z, y_n(i)) \le \rho(z, x_n) \right\} \cap C_{n-1},\\
&x_{n+1} = P_{C_n} x
\end{aligned}
$$

とする. このとき $\{x_n\}$ は $P_F x \in B$ に収束する. ここで, P_K は X から空でない閉凸集合 K への距離射影である.

Key words and phrases. Approximation, fixed point, error, shrinking projection method, metric projection.
2010 *Mathematics Subject Classification.* 47H09.

また, 最近の成果では, 点列を帰納的に計算していく際の誤差を考慮した上で, 誤差が累積しない点列生成方法が得られている [4]. この定理は Hilbert 空間におけるものであるが, 本稿ではこれを Hadamard 空間上で定義された 2 つの非拡大写像について適用することを試みた.

2 準備

(X,d) を距離空間とする. $x,y\in X$ と $l\geq 0$ に対し, $c:[0,l]\to X$ が x,y を端点とする測地線であるとは, $c(0)=x$ および $c(l)=y$ であり, さらに任意の $s,t\in[0,l]$ に対して

$$d(c(s),c(t))=|s-t|$$

をみたすことをいう. 任意の 2 点に対してそれらを端点とする測地線が存在するとき, X を測地距離空間という. 測地距離空間において 2 点間を結ぶ測地線は, 一般には唯一とは限らないが, 本稿で扱う Hadamard 空間においては, その条件から測地線の一意性がつねに成り立つ. 以下では測地線の一意性を仮定し, $x,y\in X$ を端点とする測地線 $c:[0,l]\to X$ の像を $[x,y]$ であらわす.

測地距離空間の点 $x,y,z\in X$ に対して, これらを頂点とする三角形 $\triangle(x,y,z)$ を $\triangle(x,y,z)=[x,y]\cup[y,z]\cup[z,x]$ で定義する. 2 次元 Euclid 空間の点 $\overline{x},\overline{y},\overline{z}\in\mathbb{R}^2$ が $d(x,y)=\|\overline{x}-\overline{y}\|_{\mathbb{R}^2}$, $d(y,z)=\|\overline{y}-\overline{z}\|_{\mathbb{R}^2}$, $d(z,x)=\|\overline{z}-\overline{x}\|_{\mathbb{R}^2}$ をみたすとき, $\triangle(\overline{x},\overline{y},\overline{z})\subset\mathbb{R}^2$ を $\triangle(x,y,z)\subset X$ の $\mathbb{R}^2$ における比較三角形という. ただし, $\overline{x}=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ に対して

$$\|\overline{x}\|_{\mathbb{R}^2}=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$$

である. 測地距離空間の三角形 $\triangle(x,y,z)\subset X$ とその比較三角形 $\triangle(\overline{x},\overline{y},\overline{z})\subset\mathbb{R}^2$ を考える. 点 $p\in\triangle(x,y,z)$ に対しては自然な意味で $\triangle(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ 上に対応する点 $\overline{p}$ がある. すなわち, 例えば $p\in[x,y]$ のときは, $d(x,p)=\|\overline{x}-\overline{p}\|_{\mathbb{R}^2}$, $d(y,p)=\|\overline{y}-\overline{p}\|_{\mathbb{R}^2}$ をみたす唯一の点 $\overline{p}\in[\overline{x},\overline{y}]$ が p に対応する点であり, これを p の比較点という. 測地的空間 X 上に任意の三角形 $\triangle(x,y,z)\subset X$ とその比較三角形 $\triangle(\overline{x},\overline{y},\overline{z})\subset\mathbb{R}^2$ をとったとき, $p,q\in\triangle(x,y,z)$ とそれぞれの比較点 $\overline{p},\overline{q}\in\triangle(\overline{x},\overline{y},\overline{z})\subset\mathbb{R}^2$ に対して不等式

$$d(p,q)\leq\|\overline{p}-\overline{q}\|_{\mathbb{R}^2}$$

がつねに成り立つならば, X は CAT(0) 空間と呼ばれる. とくに, 完備な CAT(0) 空間を Hadamard 空間という.

X を Hadamard 空間とする. 任意の 2 点 $x, y \in X$ と $t \in [0,1]$ に対して $d(x,z) = (1-t)d(x,y)$ および $d(y,z) = td(x,y)$ をみたす $[x,y]$ 上の点 z を $tx \oplus (1-t)y$ とあらわし, x と y との凸結合という. X の部分集合 C が凸であるとは, 任意の $x, y \in C$ に対して $[x,y] \subset C$ が成り立つことである. Hadamard 空間上の点 x, y, z と $t \in [0,1]$ に対して, 不等式

$$d(tx \oplus (1-t)y, z)^2 \leq td(x,z)^2 + (1-t)d(y,z)^2 - t(1-t)d(x,y)^2.$$

がつねに成り立つ.

Hadamard 空間 X の空でない閉凸部分集合 K を考える. 任意の $x \in X$ に対して

$$d(x,K) = \inf_{y \in K} d(x,y)$$

と定義するとき, ある $y_x \in K$ が一意に存在して $d(x, y_x) = d(x,K)$ が成り立つことが知られている. この $y_x \in X$ を用いて, $y_x = P_K x$ によって定義される写像 $P_K : X \to K$ を K への距離射影という. 集合列と距離射影に関する次の重要な性質が知られている.

定理 2 (Kimura [3]). X を Hadamard 空間とする. X の空でない閉凸部分集合列 $\{C_n\}$ が空でない閉凸部分集合 C_0 に Δ-Mosco 収束するとき, 任意の $x \in X$ に対して点列 $\{P_{C_n} x\}$ は $P_{C_0} x$ に強収束する.

Δ-Mosco 収束については [3] で定義されているが, 典型的な例としては, 包含関係に関する減少列がその共通部分に収束することが知られている. すなわち, $\{C_n\}$ が

$$C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \cdots \supset C_n \supset \cdots$$

をみたすとき, $\{C_n\}$ は $\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$ に Δ-Mosco 収束する.

測地距離空間, CAT(κ) 空間, および Hadamard 空間に関する詳細は [1, 2] 等を参照せよ.

3 誤差を含んだ共通不動点近似

本節で紹介する定理は, 二つの非拡大写像に対して, その共通不動点を近似する点列を生成する定理である. 計算の仮定で発生する誤差を考慮するにあたり, 誤差が 0 に収束するとは限らないが十分に小さい場合について, 点列がある種の望ましい性質をもつことを示している.

定理 3. X を有界な Hadamard 空間とし, $D = \operatorname{diam} X = \sup_{x,y\in X} d(x,y)$ とする. また, 任意の $u, v \in X$ に対し, $\{z \in X : d(v,z) \leq d(u,z)\}$ は凸集合であると仮定する. S, T を X 上の非拡大写像とし, 共通不動点集合 $F = F(S) \cap F(T)$ は空でないとする. $\{\alpha_n\}$ を, ある $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $0 < a \leq \alpha_n < b < 1$ をみたす実数列とし, $\{\epsilon_n\}$ を $\epsilon_0 = \limsup_{n\to\infty} \epsilon_n < \infty$ をみたす非負実数列とする. $u \in X$ に対し, 点列 $\{x_n\} \in X$ を次のように定義する. $x_1 \in X$ を $d(x_1, u) < \epsilon_1$ をみたすようにとり, $C_1 = X$ とし, さらに $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
&y_n = \alpha_n S x_n \oplus (1-\alpha_n) T x_n,\\
&C_{n+1} = \{z \in C : d(y_n, z) \leq d(x_n, z)\} \cap C_n,\\
&x_{n+1} \in C_{n+1} \text{ such that } d(x_{n+1}, u)^2 \leq d(u, C_{n+1})^2 + \epsilon_{n+1}^2
\end{aligned}$$

とする. このとき,

$$\limsup_{n\to\infty} d(x_n, Sx_n) \leq 2\left(\epsilon_0 + \sqrt{\frac{D(1-a)}{a}\epsilon_0}\right),$$

$$\limsup_{n\to\infty} d(x_n, Tx_n) \leq 2\left(\epsilon_0 + \sqrt{\frac{Db}{1-b}\epsilon_0}\right)$$

が成り立つ. さらに $\epsilon_0 = 0$ のときは, $\{x_n\}$ は $P_F u$ に収束する.

この定理の証明手法は [4] をもとにしたものである.

証明. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して C_n が閉であることは明らかであり, 凸であることも定理の仮定からわかる. そこで, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して C_n が $F \subset C_n$ をみたすことを帰納法によって示す. 明らかに $F \subset C_1 = X$ であり, x_1 は与えられた点であるから定義されている. $j \in \mathbb{N}$ に対して $C_1, C_2, \ldots, C_j$ が F を含んでいると仮定し, この仮定の下で C_{j+1} も F を含むことを示そう. F が空でないことから C_j も空ではなく, したがって $d(x_j, u)^2 \leq d(u, C_j)^2 + \epsilon_j^2$ をみたす $x_j \in C_j$ をとることができる. これによって y_j, C_{j+1} もそれぞれ定義される. $z \in F$ とすると, S と T はそれぞれ非拡大なので

$$\begin{aligned}
d(y_j, z)^2 &= d(\alpha_j S x_j \oplus (1-\alpha_j) T x_j, z)^2\\
&\leq \alpha_n d(Sx_j, z)^2 + (1-\alpha_j) d(Tx_j, z)^2\\
&\leq \alpha_n d(x_j, z)^2 + (1-\alpha_j) d(x_j, z)^2\\
&= d(x_j, z)^2
\end{aligned}$$

となり, さらに $F \subset C_j$ であることから $F \subset C_{j+1}$ が成り立つ. よって任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $F \subset C_n$, すなわち

$$F \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

が成り立つことが示された. $C_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ とし, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $w_n = P_{C_n} u$ としよう. $\{C_n\}$ は包含関係に関して減少列となっているので, 定理 2 より $\{w_n\}$ は $w_0 = P_{C_0} u$ に収束する. また, 距離射影の定義より, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$d(x_n, u)^2 \leq d(u, C_n)^2 + \epsilon_n^2 = d(u, w_n)^2 + \epsilon_n^2$$

が成り立つ. $x_n \in C_n$ かつ $w_n = P_{C_n} u \in C_n$ であり, C_n は凸であることから, $\tau \in]0, 1[$ に対して $\tau x_n \oplus (1-\tau) w_n \in C_n$ である. よって

$$\begin{aligned} d(w_n, u)^2 &\leq d(\tau x_n \oplus (1-\tau) w_n, u)^2 \\ &\leq \tau d(x_n, u)^2 + (1-\tau) d(w_n, u)^2 - \tau(1-\tau) d(x_n, w_n)^2 \end{aligned}$$

となり

$$(1-\tau) d(x_n, w_n)^2 \leq d(x_n, u)^2 - d(w_n, u)^2 \leq \epsilon_n^2$$

を得る. $\tau \to 0$ とすると, $d(x_n, w_n)^2 \leq \epsilon_n^2$ となり, したがって $d(x_n, w_n) \leq \epsilon_n$ が成り立つ.

ここで, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\delta_n = d(w_n, w_0)$ とすると $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ であり, また $w_0 \in C_0$ であることから任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$d(y_n, w_0) \leq d(x_n, w_0) \leq d(x_n, w_n) + d(w_n, w_0) \leq \epsilon_n + \delta_n$$

が成り立つ. $z \in F$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} d(y_n, z)^2 &= d(\alpha_n S x_n \oplus (1-\alpha_n) T x_n, z)^2 \\ &\leq \alpha_n d(S x_n, z)^2 + (1-\alpha_n) d(T x_n, z)^2 - \alpha_n(1-\alpha_n) d(S x_n, T x_n)^2 \\ &\leq d(x_n, z)^2 - \alpha_n(1-\alpha_n) d(S x_n, T x_n)^2 \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} \alpha_n(1-\alpha_n) d(S x_n, T x_n)^2 &\leq d(x_n, z)^2 - d(y_n, z)^2 \\ &= (d(x_n, z) + d(y_n, z))(d(x_n, z) - d(y_n, z)) \\ &\leq 2D d(x_n, y_n) \\ &\leq 2D(d(x_n, w_n) + d(w_n, w_0) + d(w_0, y_n)) \\ &\leq 2D(\epsilon_n + \delta_n + \epsilon_n + \delta_n) \\ &\leq 4D(\epsilon_n + \delta_n) \end{aligned}$$

となる．したがって

$$\begin{aligned} d(y_n, Sx_n)^2 &= (1-\alpha_n)^2 d(Sx_n, Tx_n)^2 \\ &\le 4D\frac{1-\alpha_n}{\alpha_n}(\epsilon_n+\delta_n) \\ &\le 4D\frac{1-a}{a}(\epsilon_n+\delta_n), \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} d(y_n, Tx_n)^2 &= \alpha_n^2 d(Sx_n, Tx_n)^2 \\ &\le 4D\frac{\alpha_n}{1-\alpha_n}(\epsilon_n+\delta_n) \\ &\le 4D\frac{b}{1-b}(\epsilon_n+\delta_n) \end{aligned}$$

が成り立つ．よって任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} d(x_n, Sx_n) &= d(x_n, w_n) + d(w_n, w_0) + d(w_0, y_n) + d(y_n, Sx_n) \\ &= \epsilon_n + \delta_n + \epsilon_n + \delta_n + \sqrt{2D\frac{1-a}{a}(\epsilon_n+\delta_n)} \\ &= 2\left(\epsilon_n + \delta_n + \sqrt{\frac{D(1-a)}{a}(\epsilon_n+\delta_n)}\right) \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} d(x_n, Tx_n) &= d(x_n, w_n) + d(w_n, w_0) + d(w_0, y_n) + d(y_n, Tx_n) \\ &= \epsilon_n + \delta_n + \epsilon_n + \delta_n + \sqrt{2D\frac{b}{1-b}(\epsilon_n+\delta_n)} \\ &= 2\left(\epsilon_n + \delta_n + \sqrt{\frac{Db}{1-b}(\epsilon_n+\delta_n)}\right) \end{aligned}$$

を得る．さらに $n \to \infty$ とすると

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} d(x_n, Sx_n) &\le 2\left(\epsilon_0 + \sqrt{\frac{D(1-a)}{a}\epsilon_0}\right), \\ \limsup_{n\to\infty} d(x_n, Tx_n) &\le 2\left(\epsilon_0 + \sqrt{\frac{Db}{1-b}\epsilon_0}\right) \end{aligned}$$

が得られる．

次に後半部分を示そう．上の結果に $\epsilon_0 = 0$ を適用すると

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, Sx_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, Tx_n) = 0$$

が得られる．S, T はともに非拡大なので連続写像であり，

$$\limsup_{n\to\infty} d(x_n, w_n) \leq \limsup_{n\to\infty} \epsilon_n = \epsilon_0 = 0$$

と $\lim_{n\to\infty} d(w_n, w_0) = 0$ より $\{x_n\}$ は $w_0 = P_{C_0}u$ に収束するから，

$$d(w_0, Sw_0) = d(w_0, Tw_0) = 0,$$

すなわち，$w_0 \in F = F(S) \cap F(T)$ である．よって，$F \subset C_0$ であることから

$$d(u, P_F u) \leq d(u, w_0) = d(u, P_{C_0}u) \leq d(u, P_F u)$$

より $w_0 = P_F u$ が得られ，定理は示された． □

この結果は有限個の非拡大写像族 $\{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ に対するものにまで拡張することが可能である．しかしながら，写像が 3 つ以上になる場合，それらの凸結合を用いた点列生成では，例えば

$$y_n = \alpha_n T_1 x_n \oplus (1 - \alpha_n)(\beta_n T_2 x_n \oplus (1 - \beta_n) T_3 x_n)$$

のような，各写像に対して非対称な形を用いることになる．これは，Hadamard 空間における 3 点以上の凸結合を 2 点間における定義を繰り返し用いることで実現していることに起因する．このような形を用いた場合，上の定理の拡張は整った形の不等式で得られておらず，さらなる研究が必要である．

参考文献

[1] M. R. Bridson and A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 319, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[2] K. Goebel and S. Reich, *Uniform convexity, hyperbolic geometry, and nonexpansive mappings*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 83, Marcel Dekker Inc., New York, 1984.

[3] Y. Kimura, *Convergence of a sequence of sets in a Hadamard space and the shrinking projection method for a real Hilbert ball*, Abstr. Appl. Anal. (2010), Art. ID 582475, 11.

[4] ———, *Approximation of a common fixed point of a finite family of nonexpansive mappings with nonsummable errors in a Hilbert space*, J. Nonlinear Convex Anal. **15** (2014), 429–436.

[5] W. Takahashi, Y. Takeuchi, and R. Kubota, *Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces*, J. Math. Anal. Appl. **341** (2008), 276–286.