数理解析研究所講究録
第1925巻 2014年 15-25

群行列式の既約分解の群環版

九州大学大学院数理学府　山口尚哉 (Naoya YAMAGUCHI)
n-yamaguchi@math.kyushu-u.ac.jp

1 はじめに

群行列式の既約分解を非自明に群環上に拡張した．また，これにより群行列式の新しい因数分解を得た．本稿ではこれを説明する．ただし群は，有限アーベル群か二面体群，一般四元数群のいずれかとする．群行列式 $\Theta(G)$ は有限群 G の元 g に対して用意された不定元 x_g に関する行列の行列式である．この群行列式の既約分解を Frobenius は次のように与えた．

Theorem 1 (Frobenius). $\widehat{G}$ を有限群 G の既約なユニタリ表現の同値類の代表元の完全集合とすると，次が成り立つ．

$$\Theta(G) = \prod_{\varphi \in \widehat{G}} \det\left(\sum_{g \in G} \varphi(g) x_g\right)^{\deg \varphi}.$$

本稿の結果は，この定理をいくつかの群 G についてその群環 $\mathbb{C}G$ に非自明に拡張し，群行列式の新しい因数分解を得たものである．

1.1 アーベル群における結果

まず G が有限アーベル群の場合の結果が次である．ただし，$\mathbb{C}[x_g]$ を不定元 x_g から成る多項式環とする．

Theorem 2. G を有限アーベル群，H を G の部分群，e を G の単位元とすると，

$$\Theta(G)e = \prod_{\chi \in \widehat{H}} \sum_{g \in H} \chi(g) A_g g$$

となる $A_g \in \mathbb{C}[x_g]$ が存在する．特に $H = G$ のとき，$A_g = x_g$ ととれる．

$\mathbb{C}G[x_g] = \left\{\sum_{g \in G} A_g g \mid A_g \in \mathbb{C}[x_g]\right\}$ とする (この集合は $\mathbb{C}[x_g]G$ と書く方が適切かもしれないが，今回は $\mathbb{C}G[x_g]$ を採用する)．この Theorem 2 は Theorem 1 より強い．実際，$H = G$ として，$\mathbb{C}G[x_g]$ から $\mathbb{C}[x_g]$ への $\mathbb{C}[x_g]$ 代数写像 (これは $\mathbb{C}G$ から $\mathbb{C}$ への $\mathbb{C}$ 代数写像の拡大とみれる) で，任意の $g \in G$

をすべて 1 に写す写像 F を考えれば, Theorem 1 は Theorem 2 から得られる. また Theorem 2 から次のような $\mathbb{C}G$ の可逆元の逆元の公式を得る.

Corollary 3. G を有限アーベル群, χ_1 を G の自明表現とする. $\Theta(G) \neq 0$ ならば,

$$\left(\sum_{g\in G} x_g g\right)^{-1} = \frac{1}{\Theta(G)} \prod_{\chi\in\widehat{G}\setminus\{\chi_1\}} \left(\sum_{g\in G} \chi(g) x_g g\right)$$

となる.

1.2　二面体群と一般四元数群における結果

G が二面体群 D_m か一般四元数群 Q_m の場合にも Theorem 1 の群環版を与えた. またこの群についての群行列式を同次多項式の巡回行列式で記述した. 二面体群 D_m と一般四元数群 Q_m の結果は次である. ただし, $\langle a\rangle$, A_g, α_i, χ'_l については, 後で説明する.

Theorem 4. $G = D_m$, e を G の単位元とすると, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}\Theta(G)e &= \begin{cases} \alpha_1\alpha_2 \displaystyle\prod_{\chi'\in\widehat{\langle a\rangle}\setminus\{\chi'_0\}} \sum_{g\in\langle a\rangle} \chi'(g) A_g g & m \text{ が奇数} \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \displaystyle\prod_{\chi'\in\widehat{\langle a\rangle}\setminus\{\chi'_0, \chi'_{\frac{m}{2}}\}} \sum_{g\in\langle a\rangle} \chi'(g) A_g g & m \text{ が偶数} \end{cases} \\ &= \prod_{\chi\in\widehat{\langle a\rangle}} \sum_{g\in\langle a\rangle} \chi(g) A_g g.\end{aligned}$$

Theorem 5. $G = Q_m$, e を G の単位元とすると, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}\Theta(G)e &= \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \prod_{\chi'\in\widehat{\langle a\rangle}\setminus\{\chi'_0, \chi'_{\frac{m}{2}}\}} \sum_{g\in\langle a\rangle} \chi'(g) A_g g \\ &= \prod_{\chi\in\widehat{\langle a\rangle}} \sum_{g\in\langle a\rangle} \chi(g) A_g g.\end{aligned}$$

この Theorem 4 と 5 より以下のことがわかる. アーベル群の場合に考えた写像 F により, D_m と Q_m の場合の Theorem 1 を得られ, また D_m と Q_m の群行列式が, $\prod_{\chi\in\widehat{\langle a\rangle}} \sum_{g\in\langle a\rangle} \chi(g) x_g$ という巡回行列式で記述できることもわかる. さらに D_m と Q_m の可逆元の逆元を以下の形で与える. 後に説明するが, α_1 はその群環の任意の元を表している.

Corollary 6. $G = D_m$ とする. $\Theta(G) \neq 0$ ならば

$$\alpha_1^{-1} = \begin{cases} \dfrac{1}{\Theta(G)} \alpha_2 \displaystyle\prod_{\chi'\in\widehat{\langle a\rangle}\setminus\{\chi'_0\}} \sum_{g\in\langle a\rangle} \chi'(g) A_g g & m \text{ が奇数} \\ \dfrac{1}{\Theta(G)} \alpha_2\alpha_3\alpha_4 \displaystyle\prod_{\chi'\in\widehat{\langle a\rangle}\setminus\{\chi'_0, \chi'_{\frac{m}{2}}\}} \sum_{g\in\langle a\rangle} \chi'(g) A_g g & m \text{ が偶数} \end{cases}$$

となる.

Corollary 7. $G = Q_m$ とする. $\Theta(G) \neq 0$ ならば

$$\alpha_1^{-1} = \frac{1}{\Theta(G)}\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \prod_{\chi' \in \widehat{\langle a \rangle}\setminus\{\chi'_0, \chi'_{\frac{m}{2}}\}} \sum_{g \in \langle a \rangle} \chi'(g) A_g g$$

となる.

2 群行列式について

群行列式について説明する.

Definition 8 (群行列式). G を有限群として, G の各元 g に対して, 不定元 x_g を用意する. このとき

$$\Theta(G) = \det\left(x_{gh^{-1}}\right)_{g,h \in G}$$

を G の群行列式という.

任意の $g,\ h \in G$ に対して, $gh = hg$ は一般には成り立たないが, $x_g x_h = x_h x_g$ は成り立つとしていることに注意する.

群 G の正則表現を L とすれば, 群行列式 $\Theta(G)$ は, L の各点 g での値 $L(g)$ に x_g という係数を付けたもの全体の和の行列式をとったものである. すなわち,

$$\Theta(G) = \det \sum_{g \in G} x_g L(g)$$

である. また $x_g L(g)$ は G の群環の元を行列表示したものである.

Frobenius は次のような $\Theta(G)$ の既約分解を得た.

Theorem 9 (Frobenius). $\widehat{G}$ を有限群 G の既約なユニタリ表現の同値類の代表元の完全集合とすると, 次が成り立つ.

$$\Theta(G) = \prod_{\varphi \in \widehat{G}} \det\left(\sum_{g \in G} \varphi(g) x_g\right)^{\deg \varphi}.$$

上の定理は, 正則表現が $d_1\varphi^{(1)} \oplus d_2\varphi^{(2)} \oplus \cdots \oplus d_s\varphi^{(s)}$ と直和分解されることよりわかる. ただし, $\{\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots, \varphi^{(s)}\}$ は G の既約なユニタリ表現の同値類の代表元の完全集合, $d_i = \deg \varphi^{(i)}$ とする.

Example 10 (3 次巡回群の群行列式の既約分解). $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{0, 1, 2\}$ とすれば,

$$\begin{aligned}\Theta(G) &= \det\begin{bmatrix} x_0 & x_2 & x_1 \\ x_1 & x_0 & x_2 \\ x_2 & x_1 & x_0 \end{bmatrix} \\ &= (x_0 + x_1 + x_2)(x_0 + x_1\omega + x_2\omega^2)(x_0 + x_1\omega^2 + x_2\omega)\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし，ω は1の原始3乗根の1つとする．

3　D_m と Q_m の結果における語句の説明

二面体群 D_m と一般四元数群 Q_m の結果における無定義語 $\langle a\rangle$, A_g, α_i, χ_l' を説明する．そのために二面体群と一般四元数群について整理しておく．

3.1　二面体群について

二面体群とその既約表現について整理しておく．二面体群 D_m は，二元 a, b から生成される次のような位数 $2m$ の群である．

$$\begin{aligned} D_m &= \langle a, b \mid a^m = e, b^2 = e, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle \\ &= \langle a\rangle \cup \langle a\rangle b. \end{aligned}$$

二面体群 D_m の既約表現のリストは次で与えられる．ただし ω は1の原始 m 乗根を表し，$1 \le k \le m-1$ とする．

1. m が奇数のとき．ただし $1 \le l \le \frac{m-1}{2}$ とする．

	e	a^k	b	$a^k b$
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	-1	-1
φ_l	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \omega^{lk} & 0 \\ 0 & \omega^{-lk} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & \omega^{lk} \\ \omega^{-lk} & 0 \end{bmatrix}$

2. m が偶数のとき．ただし $1 \le l \le \frac{m}{2} - 1$ とする．

	e	a^k	b	$a^k b$
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	-1	-1
χ_3	1	$(-1)^k$	1	$(-1)^k$
χ_4	1	$(-1)^k$	-1	$(-1)^{k+1}$
φ_l	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \omega^{lk} & 0 \\ 0 & \omega^{-lk} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & \omega^{lk} \\ \omega^{-lk} & 0 \end{bmatrix}$

では, G が二面体群の場合の結果, Theorem 4 の無定義語について述べる.

$$\alpha_1 = \sum_{g\in G} x_g g, \quad \alpha_2 = \sum_{g\in\langle a\rangle} \chi_2(g) x_{g^{-1}} g + \sum_{g\in\langle a\rangle b} \chi_2(g) x_g g,$$
$$\alpha_3 = \sum_{g\in G} \chi_3(g) x_g g, \quad \alpha_4 = \sum_{g\in\langle a\rangle} \chi_4(g) x_{g^{-1}} g + \sum_{g\in\langle a\rangle b} \chi_4(g) x_g g,$$
$$A_h = \sum_{g\in\langle a\rangle} \left(x_g x_{hg} - x_{gb} x_{hgb^{-1}}\right), \quad \chi'_l(a^k) = \omega^{lk}$$

とする. ただし, ω は 1 の原始 m 乗根とする (すなわち, χ' は $\langle a\rangle$ の指標).

3.2 一般四元数群について

一般四元数群とその既約表現について整理しておく. 一般四元数群群 Q_m は, 二元 a, b から生成される次のような位数 $4m$ の群である.

$$\begin{aligned} Q_m &= \langle a, b \mid a^{2m} = e, b^2 = a^m, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle \\ &= \langle a\rangle \cup \langle a\rangle b. \end{aligned}$$

一般四元数群 Q_m の既約表現のリストは次で与えられる. ただし ω は 1 の原始 $2m$ 乗根を表し, $1 \le k \le 2m-1$ とする.

1. m が奇数のとき. ただし $1 \le l \le m-1$ とする.

	e	a^k	b	$a^k b$
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	-1	-1
χ_3	1	$(-1)^k$	i	$i(-1)^k$
χ_4	1	$(-1)^k$	$-i$	$i(-1)^{k+1}$
φ_l	$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\omega^{lk}&0\\0&\omega^{-lk}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&\omega^{lk}\\-\omega^{-lk}&0\end{bmatrix}$

2. m が偶数のとき. ただし $1 \le l \le m-1$ とする.

	e	a^k	b	$a^k b$
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	-1	-1
χ_3	1	$(-1)^k$	1	$(-1)^k$
χ_4	1	$(-1)^k$	-1	$(-1)^{k+1}$
φ_l	$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\omega^{lk}&0\\0&\omega^{-lk}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&\omega^{lk}\\-\omega^{-lk}&0\end{bmatrix}$

では, G が一般四元数群の場合の結果, Theorem 5 の無定義語について述べる.

$$\alpha_1 = \sum_{g\in G} x_g g, \quad \alpha_2 = \sum_{g\in\langle a\rangle} \chi_2(g) x_{g^{-1}} g + \sum_{g\in\langle a\rangle b} \chi_2(g) x_g g,$$
$$\alpha_3 = \sum_{g\in G} \chi_3(g) x_g g, \quad \alpha_4 = \sum_{g\in\langle a\rangle} \chi_4(g) x_{g^{-1}} g + \sum_{g\in\langle a\rangle b} \chi_4(g) x_g g,$$
$$A_h = \sum_{g\in\langle a\rangle} \left(x_g x_{hg} - x_{gb} x_{hgb^{-1}}\right), \quad \chi'_l(a^k) = \omega^{lk}$$

とする. ただし, ω は 1 の原始 $2m$ 乗根とする (すなわち, χ' は $\langle a\rangle$ の指標).

4 アーベル群についての結果の証明

アーベル群についての結果を証明する.

4.1 アーベル群の場合の証明のための準備

アーベル群の場合の結果を証明するための準備をする.

G を有限群, $\overline{G}$ を G の 1 次元表現全体の成す集合, H を G の部分群として,

$$\overline{G}_H = \left\{\chi \in \overline{G} \mid \chi(g) = 1, g \in H\right\}$$

とすれば, $\overline{G}_H$ は, $\overline{G}$ の部分群となる.

Lemma 11. *G/H を有限アーベル群とする. このとき,*

$$\overline{G}_H = \left\{\varphi \circ \pi \mid \varphi \in \widehat{G/H}\right\}$$

が成り立つ. ただし, π は G から G/H への自然な射影とする.

Proof. 任意に $\varphi \circ \pi \in \left\{\varphi \circ \pi \mid \varphi \in \widehat{G/H}\right\}$ をとる. $\chi = \varphi \circ \pi$ は G の 1 次元表現となり, χ は H の元を 1 に写すので, $\chi \in \overline{G}_H$ がわかる. $\chi \in \overline{G}_H$ とする.

$$\varphi : G/H \ni gH \mapsto \chi(g) \in \mathbb{C}^\times$$

は well-defined で, φ は G/H の 1 次表現である. $\chi = \varphi \circ \pi$ となるので, $\chi \in \left\{\varphi \circ \pi \mid \varphi \in \widehat{G/H}\right\}$ が成り立つ. □

Lemma 12. *G/H を有限アーベル群とする. このとき, $g \notin H$ ならば, $\chi(g) \neq 1$ を満たす $\chi \in \overline{G}_H$ が存在する.*

Proof. G/H はアーベル群なので, $\varphi(gH) \neq 1$ を満たす G/H の 1 次表現 φ が存在する. π を G から G/H への自然な射影とすれば, $\chi = \varphi \circ \pi$ は $\overline{G}_H$ の元であり, $\chi(g) \neq 1$ を満たす. □

4.2 アーベル群の場合の結果の証明

群環上の不変式論より, アーベル群の場合の結果を証明する.

Definition 13. $A_g \in \mathbb{C}[x_g]$, $\chi \in \overline{G}$ に対して,

$$T_\chi\left(\sum_{g\in G} A_g g\right) = \sum_{g\in G} \chi(g) A_g g$$

と定義する.

$T_\chi \circ T_{\chi'} = T_{\chi\chi'}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}G[x_g]$ に対して, $T_\chi(\alpha\beta) = T_\chi(\alpha)T_\chi(\beta)$ が成り立つことに注意しておく.

Lemma 14. G/H を有限アーベル群, $\alpha = \sum_{g\in G} A_g g$ とする. 任意の $\chi \in \overline{G}_H$ に対して, $\alpha = T_\chi(\alpha)$ であることの必要十分条件は, $\alpha = \sum_{g\in H} A_g g$ であることである.

Proof. $\alpha = T_\chi(\alpha)$ ならば, 任意の $\chi \in \overline{G}_H$ に対して, $A_g g = \chi(g) A_g g$ が成り立たなければならない. ゆえに $g \notin H$ ならば Lemma12 より $\chi(g) \neq 1$ となる $\chi \in \overline{G}_H$ が存在するので, $A_g = 0$ でなければならない. よって, $\alpha = \sum_{g\in H} A_g g$ となる. 逆は明らか. □

S を $\widehat{G}$ の部分集合とする. S の元を H に制限したもの全体成す集合を $S|_H$ とする.

Lemma 15. G を有限アーベル群とする. このとき, $\widehat{G} = \chi_1\widehat{G}_H \sqcup \chi_2\widehat{G}_H \sqcup \cdots \sqcup \chi_k\widehat{G}_H$ とすれば, $\widehat{H} = \{\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k\}|_H$ が成り立つ.

Proof. $\widehat{G}_H$ の元は H 上で自明表現となるので, $\widehat{G}|_H = \{\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k\}|_H \subset \widehat{H}$ が成り立つ. $|\overline{G}_H| = \frac{|G|}{|H|}$ より, $|H| = k$ がわかる. あとは, $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k$ が H 上でそれぞれ異なることを示せばよい. 任意の $g \in H$ に対して, $\chi_i(g) = \chi_j(g)$ $(1 \leq i \neq j \leq k)$ とすると, $(\chi_i^{-1}\chi_j)(g) = 1$ が成り立ち, $\chi_i^{-1}\chi_j \in \widehat{G}_H$ となる. これは $\widehat{G}$ の $\widehat{G}_H$ による剰余分解の仕方に矛盾する. □

Lemma 16. G をアーベル群とする. このとき, $A_g \in \mathbb{C}[x_g]$ が存在して,

$$\prod_{\chi\in\widehat{G}_H} \sum_{g\in G} \chi(g) x_g g = \sum_{g\in H} A_g g$$

となる.

Proof. 任意の $\chi' \in \widehat{G}_H$ に対して,

$$\begin{aligned} T_{\chi'}\left(\prod_{\chi\in\widehat{G}_H} \sum_{g\in G} \chi(g) x_g g\right) &= \prod_{\chi\in\widehat{G}_H} \sum_{g\in G} (\chi'\chi)(g) x_g g \\ &= \prod_{\chi\in\widehat{G}_H} \sum_{g\in G} \chi(g) x_g g \end{aligned}$$

となるので, Lemma 15 より成り立つ. □

Theorem 17. G をアーベル群, H をその部分群とする. このとき, $A_g \in \mathbb{C}[x_g]$ が存在して,

$$\Theta(G)e = \prod_{\chi \in \widehat{H}} \sum_{g \in H} \chi(g) A_g g$$

が成り立つ.

Proof. 任意の $\chi \in \widehat{G}$ に対して,

$$T_\chi \left(\prod_{\chi \in \widehat{G}} \sum_{g \in G} \chi(g) x_g g \right) = \prod_{\chi \in \widehat{G}} \sum_{g \in G} \chi(g) x_g g$$

が成り立つので, $C \in \mathbb{C}[x_g]$ が存在して,

$$\prod_{\chi \in \widehat{G}} \sum_{g \in G} \chi(g) x_g g = Ce$$

となる. 任意の $g \in G$ をすべて 1 に写す $\mathbb{C}[x_g]$ 代数写像を考えれば, Theorem 1 より $C = \Theta(G)$ がわかる. また, $\widehat{G} = \chi_1 \widehat{G}_H \sqcup \chi_2 \widehat{G}_H \sqcup \cdots \sqcup \chi_k \widehat{G}_H$ とすれば,

$$\begin{aligned}
\prod_{\chi \in \widehat{G}} \sum_{g \in G} \chi(g) x_g g &= \prod_{i=1}^{k} \prod_{\chi \in \chi_i \widehat{G}_H} \sum_{g \in G} \chi(g) x_g g \\
&= \prod_{i=1}^{k} T_{\chi_i} \left(\prod_{\chi \in \widehat{G}_H} \sum_{g \in G} \chi(g) x_g g \right)
\end{aligned}$$

となる. Lemma 14 と 15 より,

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{k} T_{\chi_i} \left(\prod_{\chi \in \widehat{G}_H} \sum_{g \in G} \chi(g) x_g g \right) &= \prod_{i=1}^{k} T_{\chi_i|_H} \left(\sum_{g \in H} A_g g \right) \\
&= \prod_{\chi \in \widehat{H}} \sum_{g \in H} \chi(g) A_g g
\end{aligned}$$

が成り立つので, 定理を証明できた. □

5 二面体群と一般四元数群についての結果の証明

$\mathbb{C}G[x_g]$ 上に作用素を定義して, 二面体群と一般四元数群についての結果を証明する.

5.1 $\mathbb{C}G[x_g]$ 上の作用素

$\mathbb{C}G[x_g]$ 上に作用素を定義する.

G を二面体群 D_m, もしくは一般四元数群 Q_m とし, $\overline{G}$ を G の 1 次元表現全体の成す集合とする.

Definition 18. $A_g \in \mathbb{C}[x_g],\ \chi \in \overline{G}$ に対して,

$$T_\chi\left(\sum_{g\in G} A_g g\right) = \sum_{g\in G} \chi(g) A_g g,$$

$$S_\chi\left(\sum_{g\in G} A_g g\right) = \sum_{g\in G} \chi(g) A_g g^{-1},$$

$$U_\chi\left(\sum_{g\in G} A_g g\right) = S_\chi\left(\sum_{g\in\langle a\rangle} A_g g\right) + T_\chi\left(\sum_{g\in\langle a\rangle b} A_g g\right)$$

と定義する.

任意の $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}G[x_g]$ に対して, $T_\chi(\alpha\beta) = T_\chi(\alpha)T_\chi(\beta), S_\chi(\alpha\beta) = S_\chi(\beta)S_\chi(\alpha)$ が成り立つこと, $\mathbb{C}G[x_g]$ が $\mathbb{C}G[x_g] = \mathbb{C}\langle a\rangle[x_g] \oplus \mathbb{C}\langle a\rangle[x_g]b$ と直和分解されることに注意しておく.

Lemma 19. $\xi \in \mathbb{C}\langle a\rangle[x_g],\ \eta, \eta' \in \mathbb{C}\langle a\rangle[x_g]b$ とする. このとき, 次が成り立つ.

1. $T_\chi(\eta\eta') = S_\chi(\eta'\eta)$.

2. $T_\chi(\xi\eta) = T_\chi(\eta)S_\chi(\xi)$.

3. $T_\chi(\eta\xi) = S_\chi(\xi)T_\chi(\eta)$.

Proof. $\xi = \sum_{g\in\langle a\rangle} A_g g,\ \eta = \sum_{g\in\langle a\rangle b} B_g g,\ \eta' = \sum_{g\in\langle a\rangle b} C_g g$ とする. まず (1) を示す. $g, h \in \langle a\rangle b$ ならば, $gh = g^{-1}h^{-1}$ が成り立つので,

$$\begin{aligned} T_\chi(\eta\eta') &= \sum_{g,h\in\langle a\rangle b} \chi(gh) B_g C_h gh \\ &= \sum_{g,h\in\langle a\rangle b} \chi(hg) C_h B_g (hg)^{-1} \\ &= S_\chi(\eta'\eta) \end{aligned}$$

となることより (1) を示せた. 次に (2) を示す.

$$\begin{aligned} T_\chi(\xi\eta) &= \sum_{g\in\langle a\rangle} \sum_{h\in\langle a\rangle b} \chi(gh) A_g B_h gh \\ &= \sum_{h\in\langle a\rangle b} \sum_{g\in\langle a\rangle} \chi(hg) B_h A_g h g^{-1} \\ &= T_\chi(\eta) S_\chi(\xi) \end{aligned}$$

より (2) を示せた. 最後に (3) を示す.

$$
\begin{aligned}
T_\chi(\eta\xi) &= \sum_{g\in\langle a\rangle b}\sum_{h\in\langle a\rangle}\chi(gh)B_gA_hgh \\
&= \sum_{h\in\langle a\rangle}\sum_{g\in\langle a\rangle b}\chi(h)\chi(g)A_hB_gh^{-1}g \\
&= S_\chi(\xi)T_\chi(\eta)
\end{aligned}
$$

となるので, 証明できた. □

Lemma 20. 任意の $\alpha,\beta\in\mathbb{C}G[x_g]$ に対して,

$$U_\chi(\alpha\beta)=U_\chi(\beta)U_\chi(\alpha)$$

が成り立つ.

Proof. $\alpha=\xi+\eta,\ \beta=\xi'+\eta'\quad(\xi,\xi'\in\mathbb{C}\langle a\rangle[x_g],\eta,\eta'\in\mathbb{C}\langle a\rangle[x_g]b)$ とする.

$$
\begin{aligned}
U_\chi((\xi+\eta)(\xi'+\eta')) &= (\xi\xi'+\xi\eta'+\eta\xi'+\eta\eta') \\
&= S_\chi(\xi\xi'+\eta\eta')+T_\chi(\xi\eta'+\eta\xi') \\
&= S_\chi(\xi\xi')+S_\chi(\eta\eta')+T_\chi(\xi\eta')+T_\chi(\eta\xi')
\end{aligned}
$$

となるので, Lemma 19 より,

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= S_\chi(\xi\xi')+T_\chi(\eta'\eta)+T_\chi(\eta')S_\chi(\xi)+S_\chi(\xi')T_\chi(\eta) \\
&= S_\chi(\xi')S_\chi(\xi)+T_\chi(\eta')T_\chi(\eta)+T_\chi(\eta')S_\chi(\xi)+S_\chi(\xi')T_\chi(\eta) \\
&= S_\chi(\xi')(S_\chi(\xi)+T_\chi(\eta'))+T_\chi(\eta')(T_\chi(\eta)+S_\chi(\xi)) \\
&= (S_\chi(\xi')+T_\chi(\eta'))(S_\chi(\xi)+T_\chi(\eta)) \\
&= U_\chi(\beta)U_\chi(\alpha)
\end{aligned}
$$

がわかり, 証明できた. □

Lemma 21. $\alpha=\sum_{g\in G}A_gg$ とする. $\alpha=U_{\chi_2}(\alpha)$ であることの必要十分条件は, $\alpha=\sum_{g\in\langle a\rangle}A_gg\ (A_g=A_g^{-1})$ となることである.

Proof. $\alpha=U_{\chi_2}(\alpha)$ とする. $g\in\langle a\rangle$ ならば $A_gg=A_{g^{-1}}g$, $g\in\langle a\rangle b$ ならば $A_gg=-A_gg$ が成り立たなければならない. ゆえに, $\alpha=\sum_{g\in\langle a\rangle}A_gg\ (A_g=A_{g^{-1}})$ となる. 逆は明らか. □

5.2 二面体群と一般四元数群についての結果の証明

二面体群と一般四元数群についての結果を証明する.

$\chi_2\circ\chi_2=\mathrm{Id}$ より, $U_{\chi_2\circ U_{\chi_2}}=\mathrm{Id}$ となる. よって, Lemma 20 より, $\alpha\in\mathbb{C}G[x_g]$ に対して, $\alpha+U_{\chi_2}(\alpha)$, $\alpha U_{\chi_2}(\alpha)$ は U_{χ_2} によって不変となる. ゆえ

に, Lemma 21 より, $\alpha+U_{\chi_2}(\alpha)$, $\alpha U_{\chi_2}(\alpha) \in \left\{\sum_{g\in\langle a\rangle} A_g g \mid A_g = A_{g^{-1}}\right\}$ となる. $\left\{\sum_{g\in\langle a\rangle} A_g g \mid A_g = A_{g^{-1}}\right\}$ の元は$\mathbb{C}G[x_g]$ の元と可換なので, $\alpha U_{\chi_2}(\alpha) = U_{\chi_2}(\alpha)\alpha$ がわかる. また, $\chi_4 = \chi_2 \circ \chi_3$ なので,

$$\begin{aligned} T_{\chi_3}(\alpha U_{\chi_2}(\alpha)) &= T_{\chi_3}(\alpha)(T_{\chi_3} \circ U_{\chi_2})(\alpha) \\ &= T_{\chi_3}(\alpha)U_{\chi_4}(\alpha) \end{aligned}$$

となる. $\alpha U_{\chi_2}(\alpha) = \sum_{g\in\langle a\rangle} A_g g$, ω を 1 の原始 $|\langle a\rangle|$ 乗根として, $\chi'_l(a^k) = \omega^{lk}$ とすれば, $\chi_3|_{\langle a\rangle} = \chi'_{\frac{m}{2}}$ なので, $T_{\chi_3}(\alpha)U_{\chi_4}(\alpha) = \sum_{g\in\langle a\rangle} \chi'_{\frac{m}{2}}(g)A_g g$ がわかる. また計算により, $A_h = \sum_{g\in\langle a\rangle}(x_g x_{hg} - x_{gb}x_{hgb^{-1}})$ が確かめられる. さて, Theorem 2 より, $C \in \mathbb{C}[x_g]$ が存在して,

$$\prod_{\chi\in\widehat{\langle a\rangle}} \sum_{g\in\langle a\rangle} \chi(g)A_g g = Ce$$

となるので, $C = \Theta(G)$ を示せば, 二面体群と一般四元数群の場合の主結果を証明できたことになる. このことは,

$$\det\left(\sum_{g\in G} \varphi_l(g)x_g\right) = \sum_{h\in\langle a\rangle} \chi'_l(h)A_h$$

を示せばよいが, これはすぐに確かめられる.

参考文献

[1] Benjamin Steinberg, *Representation Theory of Finite Groups*. Springer, 2012.

[2] C. Shan, C. Hong, T. Guoping, Augmentation quotients for complex representation rings of dihedral groups, Frontiers of Mathematics in China. Vol. 7, pp. 1-18, 2012.

[3] K. W. Jonson, On the group determinant, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 109, pp. 299-311, 1991.

[4] 清田正夫, 群指標とその応用. 数理解析研究所講究録 1214 (2001 年), 76-82.

[5] N. Yamaguchi, Factorization of Group Determinant in Some Group Algebra. arXiv:1405.1900, 2014.

[6] Z. Qingxia, Y. Hong, On the Structure of Augmentation Quotient Groups for the Generalized Quaternion Group, Algebra Colloquium. Vol. 19, pp. 137-148, 2012.