数理解析研究所講究録
第 1926 巻 2014 年 140-145

E-多項式について

高知大学自然科学研究科自然科学系　大浦　学
Manabu Oura
Natural Sciences Cluster, Research and Education Faculty
Kochi University

今日[1]はいくつかの計算結果をしめすことにより、E-多項式の性質を示し、今後の研究の可能性を探りたいと思います。E-多項式の定義はあとの方で述べます。

話しの大元には次のダイアグラムがあって、このダイアグラムをどのように一般化させようか、というのも動機の一つです。

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{F}_2\text{-符号} & \longrightarrow & \mathbf{Z}\text{-格子} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{重み多項式} & \longrightarrow & \text{modular form} \end{array}$$

2000 年前後には小関道夫先生が各 unitary reflection group に符号理論を付随させることができないか、と取り組まれていたと思います。我々もガウス整数環と Hermitian modular form の関連を調べました。今回の話しに合わせると、E-多項式を中心とした拡張ができないか、というのが僕の考えです。

では、まず符号の定義から始めます。$\mathbf{F}_2^n$ の部分空間を長さ n の符号と呼びます。符号という条件だけならあまりにも広すぎるので、我々の目的にあった条件をつけます。それは自己双対

$$C = C^{\perp} := \{v \in \mathbf{F}_2^n :\ (v, u) = 0\ \forall u \in C\}$$

と重偶

$$wt(v) \equiv 0 \pmod 4\ \forall v \in C$$

です。wt の定義はあとで述べます。自己双対かつ重偶な符号を Type II と呼びます。我々は以下で Type II 符号のみ取扱います。後で必要となる特別な Type II 符号を述べておくと長さ 8 の符号で次の 4 つのベクトル

$$\begin{array}{c} (1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0) \\ (0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0) \\ (0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1) \\ (1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 0) \end{array}$$

[1]RIMS 研究集会「有限群とその表現、頂点作用素代数、代数的組合せ論の研究」(代表者澤辺正人)における講演の、おおよそ忠実な記録です。なお、科研費基盤(C) 25400014 の援助を受けています。

で生成される符号が Hamming code e_8 です。もう一つ、長さ 24 の符号 Golay code g_{24} です。ところで Type II 符号の分類は長さ 40 までなされています。一つの符号の座標をある置換で変換して得られた符号を元の符号と同値な符号と言います。同値を除いた Type II 符号の表は以下です。

長さ	Type II 符号の個数	成した人々
8	1	Pless
16	2	Pless
24	9	Pless-Sloane
32	85	Conway-Pless
40	約 10 万	Betsumiya-Harada-Munemasa

つぎに符号の重み多項式を定義します。$\mathbf{F}_2^n \supset C \ni v = (v_1\ v_2\ \cdots\ v_n)$ に対して、

$$wt(v) = \sharp\{i :\ v_i = 1\}$$

と書き、v の重さと言います。このとき、C の重み多項式は

$$W_C(x,y) = \sum_{v \in C} x^{n-wt(v)} y^{wt(v)}$$

で定義されます。先ほど述べた二つの符号の重み多項式はそれぞれ

$$\begin{aligned} W_{e_8}(x,y) &= x^8 + 14x^4y^4 + y^8, \\ W_{g_{24}}(x,y) &= x^{24} + 759x^{16}y^8 + 2576x^{12}y^{12} + 759x^8y^{16} + y^{24} \end{aligned}$$

で与えられます。我々が興味あるのはすべての Type II code の重み多項式で $\mathbf{C}$ 上生成される次数付き環

$$\mathbf{C}[W_C] = \mathbf{C}[W_C :\ C = \text{Type II}]$$

です。アプローチの仕方は色々あるかと思いますが、午前中の伊藤稔氏の話しと関連づけて言いますと、実はこの環は位数 192 の unitary reflection group G の不変式環となっています:

$$\mathbf{C}[W_C] = \mathbf{C}[x,y]^G$$

この群 G は Shephard-Todd の unitary reflection group の分類では No.9 です。我々の場合、First Fundamental Theorem はこの不変式環が W_{e_8} と $W_{g_{24}}$ で生成されること、Second Fundamental Theorem はこれら二つの生成元の

間に関係式はないこと、と述べられます。特にこの環は（重み付き）多項式環となっています。

この環と色んな場面で接するうちに、「生成元として、どの取り方がいのだろうか」という疑問が沸き起こりました。重さ 8 の所は定数倍を除き一意的なのですが、重さ 24 の所はよく

$$x^4y^4(x^4-y^4)^4$$

も用いられます。勿論、答えはケースバイケースなのでしょうが、自分なりの答えとして、E-多項式があると思うのです。実際、この場合、重さ 8, 24 の E-多項式で書き下すことができます。

少し、話題を変えて modular form の話しに移りたいと思います。次のテータ関数

$$\theta_{ab}(\tau)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}\exp 2\pi i\left\{\frac{1}{2}\tau\left(n+\frac{a}{2}\right)^2+\left(n+\frac{a}{2}\right)\frac{b}{2}\right\}$$

を考えます。ここで $a,b\in\mathbf{F}_2$ で τ は上半平面の点です。重み多項式は x,y の多項式ですが、theta map

$$\begin{aligned} x &\longmapsto \theta_{00}(2\tau)\\ y &\longmapsto \theta_{10}(2\tau)\end{aligned}$$

により、$SL(2,\mathbf{Z})$ に関する modular form となります。実はこの対応により、重み多項式のなす環から $SL(2,\mathbf{Z})$ に関する重さが 4 の倍数全体のなす環が得られることが知られています。

種数 g の E-多項式を定義するためには以上の話しを一般化しておく必要があります。変数が $\mathbf{F}_2^g$ の元で index づけられた多項式環 $\mathbf{C}[x_a]=\mathbf{C}[x_a:a\in\mathbf{F}_2^g]$ を準備します。種数 g の重み多項式は

$$W_C^{(g)}(x)=\sum_{v_1,\ldots,v_g\in C}\prod_{a\in\mathbf{F}_2^g}x_a^{wt_a(v_1,\ldots,v_g)}$$

で定義されます。この多項式もある有限群の不変式となるのですが、その群を次に述べます。種数 g のテータ関数は

$$\theta_{ab}(\tau)=\sum_{n\in\mathbf{Z}^g}\exp 2\pi i\left\{{}^t\left(n+\frac{a}{2}\right)\frac{\tau}{2}\left(n+\frac{a}{2}\right)+{}^t\left(n+\frac{a}{2}\right)\frac{b}{2}\right\}$$

で定義されます。ここで $a, b \in \mathbf{F}_2^g$ で τ はジーゲル上半空間 (すなわち、$2g \times 2g$ の対称な整数行列で、imaginary part が半正定値) です。$\Gamma_g = Sp(2g, \mathbf{Z}) \subset GL(2g, \mathbf{Z})$ はテータ関数に

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tau = (a\tau + b)(c\tau + d)^{-1}$$

で作用します。ここで Eisenstein 級数について述べておくと、Siegel modular form とはこの作用でほぼ不変に近い挙動をする関数を言います。典型的な例として Eisenstein 級数

$$\psi_\ell(\tau) = \sum_{\Delta \backslash \Gamma_g \ni \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix}} (\det(c\tau + d))^{-\ell}$$

があります。ここで

$$\Delta = \{ \begin{pmatrix} * & * \\ O & * \end{pmatrix} \in \Gamma_g \}$$

です。Eisenstein 級数に対応する理論を作りたい、というのも E-多項式の動機の一つでした。

話しを戻します。Γ_g の $\theta_{a0}(2\tau)$ への作用から有限群 H_g が得られます。この群もシンプレクティック群と関係しており、ある部分群で割ってやると $Sp(2g, \mathbf{F}_2)$ が得られます。H_g の各元は $2^g \times 2^g$ の行列ですが、成分は $\mathbf{F}_2^g$ の元で index づけされているとみることができます。そこで H_g は $\mathbf{C}[x_a]$ に自然に作用しています。Γ_g と H_g の対応により、Δ に対応する群を K_g と書くことにします。また

$$k_g = |K_g \backslash H_g|$$

とおきます。

さて、H_g に関する重さ ℓ の Eisenstein 多項式 (E-多項式) は

$$\varphi_\ell^{H_g}(x) = \frac{|K_g|}{|H_g|} \sum_{K_g \backslash H_g \ni \sigma} (\sigma x_0)^\ell$$

で定義します。定義から E-多項式は H_g の不変式であることがわかります。さて、ℓ が 8 の倍数の時を考えてみます。この時は Type II 符号が存在し、H_g 不変となっていますが、実は $\varphi_\ell^{H_g}(x)$ は長さ ℓ の Type II 符号の種数 g

の重み多項式の重み付き和となっていることが知られています。これは、丁度 Eisenstein 級数が Type II 格子の重み付き和となっている事実に対応しています。

種数 1 の Eisenstein 級数のゼロ点に関して、野崎寛氏は著しい結果を得ています。我々の E-多項式のテータ像も似た性質を示しています。また、三枝崎剛氏は E-多項式と Duursma のゼータ多項式との関連した結果も得られているようです。

Roy-Suda により複素単位球面上の代数的組合せ論が研究されています。その一部分との関連をみてみます。まず $\mathbf{C}^d \supset \Omega(d) = \{(z_1,\ldots,z_d) \in \mathbf{C}^d : z_1\overline{z_1} + \cdots + z_d\overline{z_d} = 1\}$ とします。$\Omega(d)$ 上の有限個の集合 X をとり、その内積集合

$$A(X) = \{x^*y :\ x, y \in X, x \neq y\}$$

を考えます。このとき、X を complex spherical code of degree $s = |A(X)|$ と言います。我々の場合、$K_1\backslash H_1$ の代表元の第一列 $a_1,\ldots,a_{24}$ をとりだし、それで complex spherical code

$$X = \{a_1,\ldots,a_{24}\}$$

を作ります。

$$A(X) = \{0, -1, \pm i, \frac{\pm 1 \pm i}{2}\}$$

で、degree 8 の complex spherical code となっています。Roy-Suda にはいくつかの bound が与えられていますが、固定された d と degree s に依存した

$$\text{complex spherical code } X \text{ of degree } s \Rightarrow |X| \leq \binom{d+s}{d}$$

を我々の場合に適用してみますと

$$|X| = 24 \leq \binom{2+8}{2} = 45$$

となり、その開きは大きいようです。Roy-Suda には別の bound も与えてあり、それは内積集合 $A(X)$ の具体的形に依存したもので（それらを代入すると消滅する annihilator polynomial の理論を使う）、我々の内積集合の場合、

$$|X| \leq 24$$

が示されており、我々の例が実際に限界の例を与えていることがわかります。

群の表現は失いますが、置換群としての性質をみてみます。$K_g\backslash H_g = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \mathbf{k_g}\}$ 上の H_g の作用を考えます。$g = 1, 2, 3, 4$ の場合の一点固定部分群による軌道分解の様子は以下のようになります。

$$\begin{aligned}
24 &= 1^4 4^5 \\
240 &= 1^4 12^5 32^4 48^1 \\
4320 &= 1^4 28^5 224^4 336^1 512^4 896^1 \\
146880 &= 1^4 60^5 1120^4 1680^1 7680^4 13440^1 16384^4 30720^1
\end{aligned}$$

文中で挙げませんでしたが、文献をあげて終わります。

Nozaki, H.: A separation property of the zeros of Eisenstein series for $SL(2, \mathbf{Z})$, Bull. Lond. Math. Soc. 40 (2008), no. 1, 2636.

Oura, M.: Eisenstein polynomials associated to binary codes, Int. J. Number Theory 5(2009), 565–640.

Oura, M.: Eisenstein polynomials associated to binary code (II), preprint.

Roy, A., Suda, S.: Complex spherical designs and codes, Journal of Combinatorial Designs 22(2014), 105–148.