数理解析研究所講究録
第 1926 巻 2014 年 114-121

A commutant in a cyclic permutation orbifold model of the lattice vertex operator algebra V_{A_1} of order 4

安部　利之（愛媛大学）[1]

1　序

頂点作用素代数のいくつかのコピーのテンソル積に対し，そのテンソル因子の置換は自己同型を引き起こす．この置換達からなる自己同型群の固定点として得られる部分頂点作用素代数（オービフォールド模型）を置換オービフォールド模型という．本稿ではレベル 1 アフィン頂点作用素代数のテンソル積 $(\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(1,0)^{\otimes 4})$ の置換 $\tau=(1\,2\,3\,4)$ に対する置換オービフォールド模型を考え，その部分頂点代数として自然に現れるレベル 4 アフィン頂点作用素代数 $\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(4,0)$ に対し，コミュタント $\mathrm{Com}_{(\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(1,0)^{\otimes l})^{\tau}}(\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(l,0))$ の構造について解説する．

一般にアフィン頂点作用素代数 $\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(1,0)$ の l 個のテンソル積 $\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(1,0)^{\otimes l}$ と，巡回置換 $\tau=(1\,2\cdots l)$ に対し，置換オービフォールド模型 $(\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(1,0)^{\otimes l})^{\tau}$ は自然に $\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(l,0)$ を部分頂点代数として含む．$\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(l,0)$ 自身はヴィラソロ元を持つ頂点作用素代数であるが，$l\geq 2$ の場合，そのヴィラソロ元は $\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(1,0)^{\otimes l}$ のヴィラソロ元は一致しない．よってコミュタント $\mathrm{Com}_{(\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(1,0)^{\otimes l})^{\tau}}(\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(l,0))$ もまた頂点作用素代数となる．$l\geq 2$ のときが研究の対象であるが，$l=2$ のときはコミュタントは中心電荷 1/2 の単純ヴィラソロ頂点作用素代となり，その構造や表現論は非常によく知られている．$l=3$ のときは中心電荷は 6/5 であるが，この場合には [DLTYY] によって構造や表現論が調べられている．$l=4$ の場合は，コミュタント $\mathrm{Com}_{(\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(1,0)^{\otimes 4})^{\tau}}(\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(4,0))$ の中心電荷は 2 であるが，その頂点作用素代数としての構造についてはこれまで良く知られていなかった．本稿ではこのコミュタントが，ある階数 2 の格子に付随する格子頂点作用素代数の $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$-オービフォールドと同型となることについて解説する．

本研究成果は山田裕理氏との共同研究に基づくものである．また Ching Hung Lam 氏には非常に有用な助言を頂いた．この場をお借りしてお礼を申し上げる．

2　コミュタント $M^{\tau}=\mathrm{Com}_{(\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(1,0)^{\otimes l})^{\tau}}(\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(l,0))$

レベル 1 アフィン頂点作用素代数 $\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(1,0)$ はルート格子 $A_1=\mathbb{Z}\alpha$, $\langle\alpha,\alpha\rangle=2$ に付随する頂点作用素代数 V_{A_1} と同型である．従って $A_1^{\oplus l}=\oplus_{i=1}^{l}\mathbb{Z}\alpha_i$, $\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle=2\delta_{ij}$ とおくと，同一視

$$\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(1,0)^{\otimes l}\cong V_{A_1}^{\otimes l}\cong V_{A_1^{\oplus l}}$$

が得られる．この V_{A_1} は頂点代数として重み 1 の元

$$\alpha,\quad e^{\alpha},\quad e^{-\alpha}$$

[1]本研究は学術研究助成基金助成金若手研究 (B) 23740022 の助成を受けたものである．

で生成されており, この同一視のもとで,

$$H = \alpha_1 + \cdots + \alpha_l, \quad E = e^{\alpha_1} + \cdots + e^{\alpha_l}, \quad F = e^{-\alpha_1} + \cdots + e^{-\alpha_l}$$

で生成される $\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(1,0)^{\otimes l}$ の部分頂点代数は, レベル l のアフィン頂点作用素代数 $\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(l,0)$ と頂点代数として同型となる. このとき

$$M = \{u \in V_{\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(1,0)^{\otimes l}} | a_{(i)}u = 0 \text{ for } a \in \mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(l,0)\} (= \mathrm{Com}_{\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(1,0)^{\otimes l}}(\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(l,0)))$$

とおくと, M もまた $\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(1,0)^{\otimes l}$ の部分頂点代数となる. この頂点作用素代数 M を $\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(1,0)^{\otimes l}$ における $\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(l,0)$ の**コミュタント**という.

頂点作用素代数 $\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(1,0)^{\otimes l}$ には, テンソル因子の置換

$$\tau(u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_l) = u_l \otimes u_1 \otimes \cdots \otimes u_{l-1}, \quad u_i \in \mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(1,0)$$

として, 位数 l の自己同型が存在する. この τ は $\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(l,0)$ の生成元 E, H, F を固定することがわかる. 従って τ は M の自己同型を誘導する. その固定点のなす頂点作用素代数を M^τ と表わす.

一般に頂点作用素代数 V とその部分頂点作用素代数 U が与えられたとき, ω^V, ω^U をそれぞれ V, U のヴィラソロ元とすると, $\omega' = \omega^V - \omega^U$ はコミュタント

$$\mathrm{Com}_V(U) = \{v \in V | u_{(i)}v = 0 \text{ for } u \in U\}$$

のヴィラソロ元となる. 実はコミュタントは

$$\mathrm{Com}_V(U) = \{v \in V | \omega^U_{(0)}v = 0\}$$

と表わされるので, U というより U のヴィラソロ元によって定まる. いいかえれば等しいヴィラソロ元を持つ V 部分頂点作用素代数は V において同じコミュタントを与える.

3 M^τ の指標

一般に頂点作用素代数 V の加群, すなわち $L_0 = \omega^V_{(1)}$ の作用に関し有限次元固有空間の直和に分解するような弱加群 N に対し, 指標

$$\mathrm{ch}_N(\tau) = \mathrm{tr}_N\, q^{L_0 - \frac{c}{24}}, \quad q = e^{2\pi i \tau}$$

が定まる. V にいくつかの条件を仮定すると, この級数は $|q| < 1$ で正則関数に絶対収束することがわかるが, ここでは q の形式的冪級数のまま話を進める. アフィン頂点作用素代数 $\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(l,0)$ の既約加群は $\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(l,k)$ $(0 \le k \le l)$ の l 個存在することが知られている (cf. [FZ92]) が, その (アフィンリー環の加群としての) 指標については [Kac90] にあるように

$$\mathrm{ch}_{\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(l,k)}(z,\tau) = \mathrm{tr}_{\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(l,k)}\, q_z^{\frac{H(0)}{2}} q^{L_0^{\mathrm{aff}} - \frac{c}{24}}, \quad q_z = e^{2\pi i z}, \quad c = \frac{3l}{l+2}$$

で与えられる. ここで $L_0^{\mathrm{aff}} = \omega_{(1)}^{\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(l,0)}$ である.

頂点作用素代数 $\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(l,0)$ は有理的であるので, 任意の $\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(l,0)$-加群は, その既約加群の直和に分解する. よって $\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(l,0) \subset V$ が成り立っているならば, V は

$$V = \bigoplus_{j=0}^{l} \mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(l,j) \otimes U_j, \quad U_j \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(l,0)}(\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(l,j), V)$$

の形に分解される. 特に $U_0 = \mathrm{Com}_V(\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(l,0))$ であり, 各 U_i は U_0-加群となる. $H(0)$ の作用は U_0 の作用と可換であることに注意すると,

$$\mathrm{ch}_V(z,\tau) := \mathrm{tr}_V\, q_z^{\frac{H(0)}{2}} q^{L_0^V} = \sum_{j=0}^{l} \mathrm{ch}_{\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(l,k)}(z,\tau)\mathrm{ch}_{U_j}(\tau)$$

が得られる.

今 $z_0, \cdots, z_l \in \mathbb{C}$ に対し, 式

$$\mathrm{ch}_V(z_0,\tau) = \sum_{j=0}^{l} \mathrm{ch}_{\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(l,k)}(z_0,\tau)\mathrm{ch}_{U_j}(\tau),$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{ch}_V(z_l,\tau) = \sum_{j=0}^{l} \mathrm{ch}_{\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(l,k)}(z_l,\tau)\mathrm{ch}_{U_j}(\tau)$$

が得られるが、クラメルの公式より

$$\mathrm{ch}_{U_0}(\tau) = \frac{\begin{vmatrix} \mathrm{ch}_V(z_0,\tau) & \mathrm{ch}_{L(\ell,1)}(z_0,\tau) & \cdots & \mathrm{ch}_{L(\ell,\ell)}(z_0,\tau) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{ch}_V(z_l,\tau) & \mathrm{ch}_{L(\ell,1)}(z_l,\tau) & \cdots & \mathrm{ch}_{L(\ell,\ell)}(z_l,\tau) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathrm{ch}_{L(\ell,0)}(z_0,\tau) & \cdots & \mathrm{ch}_{L(\ell,\ell)}(z_0,\tau) \\ \vdots & & \vdots \\ \mathrm{ch}_{L(\ell,0)}(z_\ell,\tau) & \cdots & \mathrm{ch}_{L(\ell,\ell)}(z_0,\tau) \end{vmatrix}} \tag{3.1}$$

が得られる. [2]

上で得られた式を $V = (\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(1,0)^{\otimes l})^{\tau}$ に対し適用する. そのために指標 $\mathrm{tr}_V\, \tau^j q_z^{\frac{H(0)}{2}} q^{L_0^V}$ $(0 \le j \le l)$ を計算する. V_L の $(H(0), L_0)$-同時固有ベクトルからなる基底 $\{u_i\}_{i\in I}$ を一つ選び, $H(0)u_i = \lambda_i u_i$, $L_0 u_i = \mu_i u_i$ とおく. 簡単のため $f = q_z^{\frac{H(0)}{2}} q^{L_0}$ とおく. そうするとベクトル

$$u = u_{i_1} \otimes \cdots \otimes u_{i_l}$$

[2]実際には, j が奇数のとき $U_j = 0$ となるので, 行列式のサイズは小さくできる.

に作用素 $f^{\otimes l}$ は $q_{\frac{z}{2}}^{(\lambda_{i_1}+\cdots+\lambda_{i_l})}q^{(\mu_{i_1}+\cdots+\mu_{i_l})}$ 倍として作用する. 従って, τ^k に対し, $\tau^k(u)\neq u$ ならば, $\tau^k f^{\otimes l}(u)$ の u の係数は 0 である. 一方 $\tau^k(u)=u$ であるとする. このとき $d=\gcd(k,l)$ とおけば, $i_t=i_{t+d}=\cdots=i_{t+(l-d)}$ $(1\leq t\leq d-1)$ となる. 従って $\tau^k f^{\otimes l}(u)$ の u の係数は

$$q_{\frac{z}{2}}^{\frac{l}{d}(\lambda_{i_1}+\cdots+\lambda_{i_d})}q^{\frac{l}{d}(\mu_{i_1}+\cdots+\mu_{i_d})}$$

で与えられることがわかる. 従って

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}_{\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(1,0)^{\otimes l}}\,\tau^k f^{\otimes l}&=\sum_{i_1,\cdots,i_d\in I}q_{\frac{z}{2}}^{\frac{l}{d}(\lambda_{i_1}+\cdots+\lambda_{i_d})}q^{\frac{l}{d}(\mu_{i_1}+\cdots+\mu_{i_d})}\\&=\left(\mathrm{ch}_{\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(1,0)}(\frac{lz}{d},\frac{l\tau}{d})\right)^d\end{aligned}$$

を得る. よって l の約数 d について, l との最大公約数が d となる l 以下の自然数の個数を $\mu_l(d)$ と表わせば,

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}_{(\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(1,0)^{\otimes l})^\tau}(z,\tau)&=\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{l}\mathrm{tr}_{\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(1,0)^{\otimes l}}\,\tau^k f^{\otimes l}\\&=\frac{1}{l}\sum_{d|l}\mu_l(l/d)(\mathrm{ch}_{\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(1,0)}(dz,d\tau))^{l/d}\end{aligned}\tag{3.2}$$

で与えられることがわかる. 特に $l=4$ のときは

$$\begin{aligned}&\mathrm{ch}_{(\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(1,0)^{\otimes 4})^\tau}(z,\tau)\\&=\frac{1}{4}\left(2\mathrm{ch}_{\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(1,0)}(z,\tau)^4+\mathrm{ch}_{\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(1,0)}(2z,2\tau)^2+\mathrm{ch}_{\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(1,0)}(4z,4\tau)\right)\end{aligned}$$

となる.

式 (3.1) の左辺は $z_0,\cdots,z_l$ に依存しないので, 右辺の式は $z_0,\cdots,z_l$ の取り方に依存しない. また指標 $\mathrm{ch}_{\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(1,0)}(z,\tau)$ や $\mathrm{ch}_{\mathcal{L}_{\mathrm{sl}_2}(l,0)}(z,\tau)$ の具体的な形は知られている (cf. [Kac90, Chapter 12]) ので, 適切に $z_0,\cdots,z_l$ を指定し, (3.2) を (3.1) に代入することで, M^τ の指標の q-展開の低次の項は計算機によって計算できる. 筆者は $l\leq 9$, q の次数が 100 程度まで計算したが, 本稿で必要な情報として $l=4$ の場合の 8 次までの結果を載せる:

$$\mathrm{ch}_{M^\tau}(\tau)=q^{-1/12}(1+2q^2+3q^3+9q^4+13q^5+26q^6+45q^7+86q^8+O(q^9)).\tag{3.3}$$

4 M^τ の構造 $(l=4)$ の場合

一般の $l\geq 2$ に対し, M^τ の重み 0 の空間が 1 次元, M^τ の重み 1 の空間が 0 次元であることはその構成方法から容易にわかるが, 重みが 2 以上の空間の次

元は l に依存し, やや複雑になる. 山田氏は [Yam] において, グライス代数と呼ばれる非結合可換代数である M^τ の重み 2 の空間の構造を考察し, 次元と直交基底を具体的に与えている. 特に $l=4$ の場合は 2 個の中心電荷 1 の共形ベクトルが互いに直交する形で存在しそれらが基底をなす. この事実より, M^τ には, 中心電荷が 1 の単純ヴィラソロ頂点作用素代数 $L(1,0)$ のテンソル積 $L(1,0)\otimes L(1,0)$ が含まれることがわかる.

更に M^τ の重み 4 の空間を調べると, 互いに直交する二個のヴィラソロプライマリベクトルが存在することが確認できる. 一方 $L(1,0)$ を含む頂点作用素代数として, 中心電荷 1 の自由ボゾン頂点作用素代数の $\mathbb{Z}_2$-オービフォルド模型 $M(1)^+$ があり, これはヴィラソロ元と重み 4 のプライマリベクトルで生成される. そこで M^τ は $M(1)^+\otimes M(1)^+$ を含み, 単純 $M(1)^+\otimes M(1)^+$-加群の直和であると仮定する. $M(1)^+$ の単純加群は [DN1] で分類されており, $M(1)^\pm$, $M(1,\lambda)(\lambda\in\mathbb{C})$ と二個のツイステッド型と呼ばれる単純加群からなる. それぞれの指標は

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{ch}_{M(1)^+}(\tau)=q^{-\frac{1}{24}}(1+q^2+q^3+3q^4+3q^5+6q^6+7q^7+12q^8+O(q^9)),\\
&\mathrm{ch}_{M(1)^-}(\tau)=q^{-\frac{1}{24}}(q+q^2+2q^3+2q^4+4q^5+5q^6+8q^7+10q^8+O(q^9)),\\
&\mathrm{ch}_{M(1,\lambda)}(\tau)=q^{\frac{\lambda^2}{2}-\frac{1}{24}}\\
&\qquad\qquad\times(1+q+2q^2+3q^3+5q^4+7q^5+11q^6+15q^7+22q^8+O(q^9))
\end{aligned}
$$

となっていることが知られている. これらの指標と (3.3) を比較すると, M^τ は $M(1)^+\otimes M(1)^+$-加群として

$$
\begin{aligned}
M^\tau=&M(1)^+\otimes M(1)^+\oplus M(1)^-\otimes M(1,2)\oplus M(1,2\sqrt{3})\otimes M(1)^-\\
&\oplus M(1,2\sqrt{3})\otimes M(1,2)\oplus M(1)^+\otimes M(1,4)\cdots
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

と分解できるであろうとが推測できる.

また (4.1) の形の既約分解を部分代数に持つ頂点作用素代数として考えられるものとして, 格子頂点作用素代数 $V_{\mathbb{Z}\alpha}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta}$ ($\langle\alpha,\alpha\rangle=12$, $\langle\beta,\beta\rangle=4$) が挙げられる. 実際に分解 (4.1) は $V_{\mathbb{Z}\alpha}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta}=V_{\mathbb{Z}\alpha\oplus\mathbb{Z}\beta}$ の自己同型 θ_α 及び θ_β, $I_{\alpha/24}$, $I_{\beta/8}$ を用いて得られるクライン 4 群

$$K=\langle I_{\frac{\alpha}{24}}\theta_\alpha I_{\frac{\beta}{8}}, I_{\frac{\alpha}{24}}I_{\frac{\beta}{8}}\theta_\beta\rangle$$

によるオービフォールド模型の $M(1)^+\otimes M(1)^+$-加群としての分解になっている. ただし θ_α, θ_β はそれぞれ $\mathbb{Z}\alpha$, $\mathbb{Z}\beta$ の -1-等長変換を拡張して得られる $V_{\mathbb{Z}\alpha}$, $V_{\mathbb{Z}\beta}$ の自己同型で, また $x\in\mathbb{Z}\alpha\oplus\mathbb{Z}\beta$ に対し, I_x は

$$I_x(u)=e^{2\pi i x(0)}u,\quad u\in V_{\mathbb{Z}\alpha\oplus\mathbb{Z}\beta} \tag{4.2}$$

で定義される内部自己同型である. そこで次の予想を得た.

予想 4.1. $l=4$ のとき, M^τ は頂点作用素代数として $(V_{\mathbb{Z}\alpha\oplus\mathbb{Z}\beta})^K$ と同型である. ただし $\mathbb{Z}\alpha\oplus\mathbb{Z}\beta$ は $\langle\alpha,\alpha\rangle=12$, $\langle\beta,\beta\rangle=4$, $\langle\alpha,\beta\rangle=0$ で定まる偶格子である.

5 予想 4.1 の証明

証明の鍵になるのは [DLY99] 及び [DLY01] で与えられた同型関係 $V_{\sqrt{2}A_3} \cong V^+_{A_1^{\oplus 3}}$ である.[3] この事実と $M \subset \mathrm{Com}_{V_{A_1}^{\otimes 4}}(V_{\mathbb{Z}H}) = V_{\sqrt{2}A_3}$ を用いて予想を解決する.

$L = \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \mathbb{Z}\alpha_2 \oplus \mathbb{Z}\alpha_3$ とする. ただし $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 2\delta_{i,j}$ である. 今 V_{A_1} の自己同型 σ を,

$$\sigma(\alpha) = e^{\alpha} + e^{-\alpha}, \quad \sigma(e^{\alpha}) = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}(e^{\alpha} - e^{-\alpha}), \quad \sigma(e^{-\alpha}) = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}(e^{\alpha} - e^{-\alpha})$$

によって定め, V_L の自己同型 ρ を

$$\rho = I_{\frac{\alpha_2+\alpha_3}{4}} \circ (\sigma \otimes \sigma \otimes \sigma) \tag{5.1}$$

によって定義する.

格子 L の次の元を考える.

$$\gamma = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \quad \beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \beta_2 = -\alpha_2 + \alpha_3, \quad \beta_3 = -\alpha_1 + \alpha_2.$$

このとき $\{\frac{1}{\sqrt{2}}\beta_1, \frac{1}{\sqrt{2}}\beta_2, \frac{1}{\sqrt{2}}\beta_3\}$ は A_3 型のルート格子を生成する単純ルートの集合となる. また L の部分格子

$$N = \sum_{i,j=1}^{3} \mathbb{Z}(\alpha_i \pm \alpha_j)$$

は, 格子 $\sqrt{2}A_3$ と同型になり, 自己同型 ρ を通して次の同型対応が得られる.

定理 5.1. ([DLY01, Lemma 3.4 (3)]) ρ を制限することによって, 頂点作用素代数の間の同型 $V_N \cong V_L^+$, $M \cong \mathrm{Com}_{V_L^+}(V_{\mathbb{Z}\gamma})$ が得られる.

従って M^{τ} を調べるには τ に対応する $\mathrm{Com}_{V_L^+}(V_{\mathbb{Z}\gamma})$ の自己同型 τ' がわかればよい.

まず $V_{A_1}^{\otimes 4}$ の自己同型 τ は $A_1^{\oplus 4}$ の格子自己同型 $\tau : \alpha_i \mapsto \alpha_{i+1}$ (添え字は 4 を法として考える) を拡張して得られる自己同型である. そこで $N \cong \{u \in A_1^{\oplus 4} | \langle u, H \rangle = 0\}$ であることに注意すると, τ の N への制限は

$$\beta_1 \mapsto \beta_2 \mapsto \beta_3 \mapsto -\beta_1 - \beta_2 - \beta_3 \mapsto \beta_1$$

としても良いことがわかる. この N の自己同型は L の格子自己同型 $\hat{\tau}$

$$\alpha_1 \mapsto \alpha_3 \mapsto -\alpha_1 \mapsto -\alpha_3 \mapsto \alpha_1, \quad \alpha_2 \leftrightarrow -\alpha_2$$

[3] この同型に着目したのは C. H. Lam 氏の助言による.

を N に制限したものである. この $\widehat{\tau}$ を拡張して得られる V_L の自己同型を同じ記号 $\widehat{\tau}$ を用いて表わす. このとき M の自己同型 τ は $\widehat{\tau}$ の M への制限として得られる.

更に, V_L の自己同型

$$\tau' = \rho\widehat{\tau}\rho^{-1}$$

を考えると,

$$M^{\tau} \cong \mathrm{Com}_{V_L^+}(V_{\mathbb{Z}\gamma})^{\tau'} = \mathrm{Com}_{V_L}(V_{\mathbb{Z}\gamma})^{\langle\theta,\tau'\rangle}$$

が得られる.

もう少し構造をはっきりさせるために, τ' について調べてみる. τ' は, 直接計算によって

$$\tau' = (1 \otimes I_{\frac{1}{2}\alpha_2} \otimes I_{\frac{1}{2}\alpha_3})(13).$$

と表わされることがわかる. ここで $(1,3)$ は $V_{A_1}^{\otimes 3}$ の第1テンソル因子と第3テンソル因子を入れ替える置換を表わしている. 特に L の元

$$\gamma_1 = \beta_2 + \beta_3 = \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3, \quad \gamma_2 = \beta_2 - \beta_3 = \alpha_1 - \alpha_3$$

をとると, 次の補題が得られる.

補題 5.2.

$$\tau'(\gamma_1) = \gamma_1, \quad \tau'(e^{\pm\gamma_1}) = -e^{\pm\gamma_1}, \tag{5.2}$$
$$\tau'(\gamma_2) = -\gamma_2, \quad \tau'(e^{\pm\gamma_2}) = -e^{\mp\gamma_2}, \tag{5.3}$$
$$\tau'(\gamma) = \gamma, \quad \tau'(e^{\pm\gamma}) = e^{\pm\gamma}. \tag{5.4}$$

このことより L の部分格子 $K = \mathbb{Z}\gamma_1 + \mathbb{Z}\gamma_2 + \mathbb{Z}\gamma$ とその格子頂点作用素代数 V_K を考えると, τ' の V_K への制限は対合になることがわかる. 更に

$$\begin{aligned}\mathrm{Com}_{V_L}(V_{\mathbb{Z}\gamma}) &= \mathrm{Com}_{V_K}(V_{\mathbb{Z}\gamma}) \\ &= V_{\mathbb{Z}\gamma_1} \otimes V_{\mathbb{Z}\gamma_2} \oplus V_{\frac{1}{2}\gamma_1+\mathbb{Z}\gamma_1} \otimes V_{\frac{1}{2}\gamma_2+\mathbb{Z}\gamma_2}.\end{aligned}$$

となるので τ' は $\mathrm{Com}_{V_{\mathbb{Z}\gamma}}(V_L)$ の自己同型を誘導し, そのオービフォールド模型は $(V_{\mathbb{Z}\gamma_1} \otimes V_{\mathbb{Z}\gamma_2})^{\tau'}$ となることがわかる. 従って

$$\mathrm{Com}_{V_L^+}(V_{\mathbb{Z}\gamma})^{\tau'} = (V_{\mathbb{Z}\gamma_1} \otimes V_{\mathbb{Z}\gamma_2})^{\langle\theta,\tau'\rangle}$$

を得る. ここで $\langle\gamma_1,\gamma_1\rangle = 12$, $\langle\gamma_2,\gamma_2\rangle = 4$ に注意すると, 補題 5.2 により

$$\tau'|_{V_{\mathbb{Z}\gamma_1}} = I_{\frac{1}{24}\gamma_1}, \quad \tau'|_{V_{\mathbb{Z}\gamma_2}} = I_{\frac{1}{8}\gamma_2}\theta_{\gamma_2}.$$

が得られる. 従って $\alpha = \gamma_1$, $\beta = \gamma_2$ とおくと, 次の定理を得る.

定理 5.3. 格子 $L = A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$ とし, ρ を (5.1) で定義したものとする. このときある $\alpha, \beta \in L$ が存在して次が成立する.

(1) $\langle\alpha,\alpha\rangle = 12$, $\langle\beta,\beta\rangle = 4$, $\langle\alpha,\beta\rangle = 0$.

(2) $\rho(M^\tau) = (V_{\mathbb{Z}\alpha}\otimes V_{\mathbb{Z}\beta})^G$. ただし $G = \langle\theta, I_{\frac{\alpha}{24}+\frac{\beta}{8}}\theta_\beta\rangle$ である.

群 G の生成元について

$$(I_{\frac{\alpha}{24}+\frac{\beta}{8}}\theta_\beta)\theta = (I_{\frac{\alpha}{24}}\theta_\alpha)I_{\frac{\beta}{8}}$$

であることは容易に分かるので, G は予想 4.1 にある群と同じものである.

References

[DLTYY] C. Dong, C.-H. Lam, K. Tanabe, H. Yamada and K. Yokoyama, $\mathbb{Z}_3$ symmetry and W_3 algebra in lattice vertex operator algebras, *Pacific J. Math.* **215**, 245–296, (2004).

[DLY99] C. Dong, C.-H. Lam and H. Yamada, Decomposition of the Vertex Operator Algebra $V_{\sqrt{2}A_3}$, *J. Alg.* **222**, 500–510, (1999).

[DLY01] C. Dong, C.-H. Lam and H. Yamada, Decomposition of the Vertex Operator Algebra $V_{\sqrt{2}D_l}$, *Commun. Contemp. Math.* **3**, 137–151, (2001).

[DN1] C. Dong and K. Nagatomo, Classification of irreducible modules for the vertex operator algebra $M(1)^+$, *J. Algebra* **216**, 384–404, (1999).

[FZ92] I. Frenkel and Y.-C. Zhu, Vertex operator algebras associated to representations of affine and Virasoro algebras, *Duke Math. J.* **66**, 123–168, (1992).

[Kac90] V. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, Third edition, , Cambridge University Press, 1990.

[Yam] 山田 裕理, ある種のオービフォールドの共形元, 有限群とその表現, 頂点作用素代数, 代数的組合せ論の研究, RIMS 講究録 **1872**(Japanese), 2013.