数理解析研究所講究録
第 1926 巻 2014 年 98-105

ルートを持たない偶格子に付随する頂点作用素代数の対称性について

東北大学 大学院情報科学研究科　端川 朝典
Tomonori Hashikawa
Graduate School of Information Siences, Tohoku University

1　はじめに

頂点作用素代数は非負整数の次数付ベクトル空間 $V=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} V_n$ 上に可算無限個の積を持つ代数構造である. 頂点作用素代数で, 特に重要な例は Frenkel-Lepowsky-Muerman によって構成された Moonshine 頂点作用素代数 $V^\natural$ であり, それは $V^\natural$ の全自己同型群が, 散在型単純群の中でも最大の位数であるモンスター単純群 $\mathbb{M}$ であることからも明らかだろう. Borcherds 氏による Moonshine 予想 (Conway-Norton 予想) の解決から, $V^\natural$ の $\mathbb{M}$ によって固定される部分頂点作用素代数 $(V^\natural)^{\mathbb{M}}$ と, Virasoro element と呼ばれる元 ω によって生成される部分頂点作用素代数 $V_\omega^\natural$ の次数 11 までの斉次部分空間が一致することがわかる. この性質は松尾厚氏によって一般の頂点作用素代数に $\mathcal{S}^n$ 級として定義された. 本稿では, ルートを持たない偶格子に付随する頂点作用素代数の $\mathcal{S}^n$ 級について, 筆者の得られた結果を述べる.

2　記号の準備と基本事項

この章では種々の記号の準備と基本事項をまとめることにする.

2.1　頂点作用素代数

Definition 2.1. 任意の n に対して $\dim V_n<\infty$ である $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 $V=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} V_n$ と頂点作用素

$$\begin{array}{rcl} Y(\cdot,z):V & \to & (\mathrm{End}V)[[z,z^{-1}]] \\ v & \mapsto & \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n z^{-n-1}, \end{array}$$

$\mathbf{1}\in V_0$ (vacuum vector), $\omega\in V_2$ (Virasoro element) の 4 つ組 $(V,Y,\mathbf{1},\omega)$ で "適切な" 条件を満たすものを**頂点作用素代数**と呼ぶ.

詳しい条件は [LL] に従う．本稿で特に関わる条件についてのみ記述することにする．

- Virasoro relation

$$[L(m), L(n)] = (m-n)L(m+n) + \frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0}c1_V.$$

ただし $L(n) = \omega_{n+1}$ であり，$c \in \mathbb{C}$ を**中心電荷**という．すなわち，公理として V 上に Virasoro 代数の作用が要求されている．

- $L(0)$-eigenspace decomposition

斉次空間 V_n の元 v に対して

$$L(0)v = nv.$$

頂点作用素代数 V は $\dim V_0 = 1$ であるとき **CFT 型**という．本稿で扱う頂点作用素代数は CFT 型とする．

Definition 2.2. V を頂点作用素代数とする．$e \in V_2$ を中心電荷 $\frac{1}{2}$ の Virasoro relation を満たす元とする．すなわち e は $L^e(n) = e_{n+1}$ としたとき

$$[L^e(m), L^e(n)] = (m-n)L^e(m+n) + \frac{1}{2}\cdot\frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0}1_V$$

が成立する元である．e の生成する V の部分頂点作用素代数が単純 (非自明なイデアルを持たない) であるとき e を **Ising vector** と呼ぶ．

次は Ising vector と V の次数 2 の空間 V_2 に関する命題である．

Proposition 2.3. ([Mi], [HLY]) V を CFT 型の頂点作用素代数とし，$V_1 = 0$ を仮定する．さらに V は Ising vector e を持つと仮定する．このとき V_2 は

$$V_2 = \mathbb{C}e \oplus B^e(0) \oplus B^e\left(\frac{1}{2}\right) \oplus B^e\left(\frac{1}{16}\right)$$

と分解される．ただし $B^e(k) = \{v \in B|\ e_1 v = kv\}$ である．

V が Ising vector e をもつとき $d^e(k) = \dim B^e(k)$ と書くことにする．

Remark 2.4. 本稿では特に触れないが VOA は CFT 型で $V_1 = 0$ であるとき V_2 上に 1 積で可換 (非結合的) 代数の構造が入る．これを V に付随する **Griess 代数**という．

Definition 2.5. $\sigma \in GL(V)$ が V の**自己同型写像**とは任意の $u, v \in V$ と任意の $n \in \mathbb{Z}$, Virasoro element ω に対して

$$\sigma(u_n v) = \sigma(u)_n \sigma(v), \quad \sigma(\omega) = \omega$$

を満たすことをいう．また V の自己同型写像全体は群となり，これを $\mathrm{Aut}(V)$ と書く．

2.2 V_L について

偶格子 L から構成される頂点作用素代数 V_L 及び, その自己同型写像と V_L^+ について述べる. L を偶格子とし, L の内積を $\langle\cdot,\cdot\rangle$ で表す. また $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_L=\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{Z}}L$ とし, L の内積を $\mathfrak{h}$ 上の対称双線型形式へと拡張する. さらに $\hat{\mathfrak{h}}^-=\mathfrak{h}\otimes t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$ とする (ただし t は不定元).

$$1\to\langle\kappa\mid\kappa^2=1\rangle\to\hat{L}\bar{\to}L\to 1 \tag{2.2.1}$$

を $\alpha,\beta\in L$ に対して $c(\alpha,\beta)=\kappa^{\langle\alpha,\beta\rangle}$ である commutator map をもつ, 位数 2 の巡回群 $\langle\kappa\rangle$ による L の中心拡大とする. 巡回群 $\langle\kappa\rangle$ の生成元 κ を $\mathbb{C}$ 上 -1 倍作用させることで $\mathbb{C}$ を $\langle\kappa\rangle$ 加群と見る.

$$\mathbb{C}\{L\}=\mathbb{C}[\hat{L}]\otimes_{\langle\kappa\rangle}\mathbb{C}\cong\mathbb{C}[L]\ \text{(linearly)}$$

とする. $a\in\hat{L}$ に対して $\iota(a)=a\otimes 1\in\mathbb{C}\{L\}$ と書くことにする. このとき $S(\hat{\mathfrak{h}}^-)$ を $\hat{\mathfrak{h}}^-$ の対称代数とすると

$$V_L=S(\hat{\mathfrak{h}}^-)\otimes\mathbb{C}\{L\}$$

に中心電荷が L の階数の頂点作用素代数の構造が入る.

2.3 V_L の自己同型写像と V_L^+

次に自己同型写像について述べる. 群 G に対して $\mathrm{Aut}(G)$ を G の全自己同型群とする. (2.2.1) より

$$\begin{aligned} O(L) &= \{\sigma\in\mathrm{Aut}(L)\mid \langle\sigma(\alpha),\sigma(\beta)\rangle=\langle\alpha,\beta\rangle,\forall\alpha,\beta\in L\},\\ O(\hat{L}) &= \{g\in\mathrm{Aut}(\hat{L})\mid \nu(g)\in O(L)\}\end{aligned}$$

とすると

$$1\to\mathrm{Hom}(L,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\xrightarrow{*}O(\hat{L})\xrightarrow{\nu}O(L)\to 1 \tag{2.3.2}$$

も完全列となる. ただし, ν は $f\in\mathrm{Aut}(\hat{L}),\alpha=\bar{a}\in L$ に対して $\nu(f)(\alpha)=\overline{f(a)}$ で定まる写像であり, $\lambda\in\mathrm{Hom}(L,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ に対して $*(\lambda)=\lambda^*$ は $\lambda^*(a)=(-1)^{\lambda(\bar{a})}a$ $(a\in\hat{L})$ である. 任意の $\sigma\in O(\hat{L})$ は $\alpha_i\in\mathfrak{h},n_i\in\mathbb{Z}_{\geq 1},k\in\mathbb{Z}_{\geq 0},a\in\hat{L}$ に対して

$$\sigma(\alpha_1(-n_i)\cdots\alpha_k(-n_k)\otimes\iota(a))=\nu(\sigma)(\alpha_1)(-n_1)\cdots\nu(\sigma)(\alpha_k)(-n_k)\otimes\iota(\sigma(a))$$

と作用させると V_L の自己同型写像となる. ただし, $h\in\mathfrak{h},n\in\mathbb{Z}$ に対して $h(n)=h\otimes t^n$ である. この作用によって $O(\hat{L})\leq\mathrm{Aut}(V_L)$ とみなせる. ここで $\theta\in\nu^{-1}(-1)$ $(-1\in O(L))$ をとる. このとき

$$V_L^+=V_L^\theta=\{u\in V_L\mid \theta(u)=u\}$$

とすると, V_L^+ は中心電荷が L の階数の V_L の部分頂点作用素代数となる.

2.4 V_L^+ の自己同型群

n を正の整数とし, $\Omega_n = \{1, \ldots, n\}$ とおく. また $\{\alpha_i | \ i \in \Omega_n\}$ をノルム2の $\mathbb{R}^n$ の直交基底とし, Ω_n の部分集合 J に対して, $\alpha_J = \sum_{i \in J} \alpha_i$ とする. C を長さ n の二元線型符号とすると, このとき C は Ω_n の冪集合 $P(\Omega_n)$ の部分集合としてみなせる. 格子

$$L_A(C) = \sum_{c \in C} \mathbb{Z}\frac{1}{2}\alpha_c + \sum_{i \in \Omega_n} \mathbb{Z}\alpha_i$$

を $\{\alpha_i | \ i \in \Omega_n\}$ に関して C から**構成法 A で得られる格子**といい, また

$$L_B(C) = \sum_{c \in C} \mathbb{Z}\frac{1}{2}\alpha_c + \sum_{i,j \in \Omega_n} \mathbb{Z}(\alpha_i + \alpha_j) \tag{2.4.3}$$

を $\{\alpha_i | \ i \in \Omega_n\}$ に関して C から**構成法 B で得られる格子**という [CS]. ここで C を長さ n の二元線型重偶符号とする. $k \in \Omega_n$ に対して $a_k \in \widehat{L_A(C)}$ を $\alpha_k = \overline{a_k}$ であるものとする. このとき σ_0 を

$$\sigma_0 = \prod_{k=1}^{n} \exp((1+\sqrt{-2})(a_k)_0)\exp((\sqrt{\frac{-1}{2}})(a_k^{-1})_0)\exp((-1+\sqrt{-2})(a_k)_0) \tag{2.4.4}$$

とおく. これは [FLM] で構成された $V_{L_A(C)}$ の自己同型写像であり, 同時に $V_{L_B(C)}^+$ の自己同型写像になる. σ_0 と V_L^+ の自己同型群について次の事実がある.

Theorem 2.6. ([Sh]) L をルートを持たない偶格子とする. このとき

$$O(\hat{L})/\langle\theta\rangle \subsetneq \mathrm{Aut}(V_L^+) \iff L \text{ は構成法 B で得られる}$$

である. さらに L が構成法 B で得られる格子ならば $\mathrm{Aut}(V_L^+) = \langle O(\hat{L})/\langle\theta\rangle, \sigma_0\rangle$ である.

3 $\mathcal{S}^n$ 級

本稿で言うところの "頂点作用素代数の対称性" である, $\mathcal{S}^n$ 級について述べる. V_ω を Virasoro element ω によって生成される V の部分頂点作用素代数とする. また,

$$V^{\mathrm{Aut}(V)} = \{v \in V | \ g(v) = v, \forall g \in \mathrm{Aut}(V)\}$$

とすると $V^{\mathrm{Aut}(V)}$ は V の部分頂点作用素代数となる.

Definition 3.1. ([Ma]) 頂点作用素代数 V が $\mathcal{S}^n$ 級であるとは $V^{\mathrm{Aut}(V)}$ と V_ω の次数 n までの斉次部分空間が等しいとき, すなわち $0 \leq m \leq n$ に対して

$$(V^{\mathrm{Aut}(V)})_m = (V_\omega)_m$$

が成立することを言う.

Remark 3.2. 頂点作用素代数 V の Virasoro element ω は自己同型写像の定義から, 常に自己同型写像によって固定されている. よって常に $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $(V_\omega)_m \subset (V^{\mathrm{Aut}(V)})_m$ が成立している. つまり次数 n までの斉次部分空間に対して逆の包含関係が成立すれば $\mathcal{S}^n$ 級となる.

$V_1 = 0$ の頂点作用素代数 V は中心電荷が $0, 1/2, -46/3, -3/5, -22/5, -68/7, -232/11$ でないと仮定する. このとき [Ma] より, V が $\mathcal{S}^{2k}$ 級 $(1 \leq k \leq 5)$ ならば, V_2 上の k 次の跡公式が得られる. ここで V に更に次を仮定する.

- V は Ising vector e をもつ.
- 中心電荷 c は正の整数である.
- $d := \dim V_2$ は 2 以上である.

このとき V が $\mathcal{S}^4$ 級かつ $d^e(\frac{1}{16}) = 0$ であるならば [Ma] で得られた跡公式から (c, d) は

$$(4, 22), (8, 156), (10, 685) \tag{3.0.1}$$

のいずれかとなる. 更に $\mathcal{S}^6$ 級ならば次の命題が成立する.

Proposition 3.3. ([Ma]) 頂点作用素代数 V は $d^e(\frac{1}{16}) = 0$ となる Ising vector を持つと仮定する. このとき V が $\mathcal{S}^6$ 級かつ $d \geq 2$ ならば $c = 8, d = 156$ となる.

また V が $\mathcal{S}^6$ 級かつ $d^e(\frac{1}{16}) \neq 0$ であるとき, (c, d) は

$$(16, 2296), (20, 10310), (24, 196884), (32, 139504), (36, 35856) \tag{3.0.2}$$

のいずれかとなる.

一方で, $L = \sqrt{2}D_4, \sqrt{2}E_8, BW_{16}$ に付随する頂点作用素代数 V_L^+ の中心電荷 c と次数 2 の斉次部分空間 $(V_L^+)_2$ の次元 d は

V_L^+	$V_{\sqrt{2}D_4}^+$	$V_{\sqrt{2}E_8}^+$	$V_{BW_{16}}^+$
(c, d)	(4, 22)	(8, 156)	(16, 2296)

となっている (ここで $\sqrt{2}D_4$ は $\sqrt{2}$ 倍の D_4 ルート格子, $\sqrt{2}E_8$ は $\sqrt{2}$ 倍の E_8 ルート格子, BW_{16} は階数 16 の Barnes-Wall 格子である). これら (c, d) は (3.0.1), (3.0.2) のリストに現れる. よって [Ma] にて, それぞれ $\mathcal{S}^4$ 級, $\mathcal{S}^6$ 級, $\mathcal{S}^6$ 級になるだろうと考察された. 本稿では, これらに関する研究で得られた結果を述べる.

4 V_L^+ の $\mathcal{S}^n$ 級について

ルートを持たない, すなわちノルム 2 のベクトルを持たない偶格子 L について考える. 次の 2 つの主張がこれまでの V_L^+ の対称性の研究で得られた筆者の主結果である.

Theorem 4.1 (主結果 1). L を $\langle L, L\rangle \subset 2\mathbb{Z}$ を満たすルートを持たない偶格子とする. V_L^+ が $\mathcal{S}^4$ 級であることと L が $2A_1, \sqrt{2}D_4, \sqrt{2}E_8$ のいずれかと同型であることは必要十分である.

Theorem 4.2 (主結果 2). L をルートを持たない偶格子とする. V_L^+ が $\mathcal{S}^6$ 級であることと L が $2A_1, \sqrt{2}E_8, BW_{16}$ のいずれかと同型であることは必要十分である.

すなわち, 本稿 3 章で述べた, [Ma] で考察されたことを肯定的に解決し, さらに対称性の高い V_L^+ の分類を行った. Theorem 4.1, 4.2 の証明をいくつかの命題に分けて述べる. $S(\hat{\mathfrak{h}}^-)_k$ を $u_1(-n_1)\cdots u_r(-n_r)$ $(u_i \in \mathfrak{h}, n_1 \geq \cdots \geq n_r \geq 1, r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \sum_{i=1}^r n_i = k)$ で生成される $S(\hat{\mathfrak{h}}^-)$ の部分ベクトル空間とする. このとき筆者は次の命題を示した.

Proposition 4.3. L をルートを持たない構成法 B で得られる偶格子とする. このとき $\dim S(\hat{\mathfrak{h}}^-)_4^{O(L)} = 3$ ならば V_L^+ は $\mathcal{S}^4$ 級である.

上の命題について述べる. まず $O(\hat{L})/\langle\theta\rangle$ の作用を見ることで $(V_L^+)_4^{\mathrm{Aut}(V_L^+)} \subset S(\hat{\mathfrak{h}}^-)_4^{O(L)}$ が言える. 実は $S(\hat{\mathfrak{h}}^-)_4^{O(L)}$ の次元の下限は 3 である. $S(\hat{\mathfrak{h}}^-)_4^{O(L)}$ の次元が下限と一致するとき, σ_0 の作用を見ることで $(V_\omega)_4$ の次元との一致が示せる. また同様の議論をすることで次の命題も得られる.

Proposition 4.4. L をルートを持たない構成法 B で得られる偶格子とする. また L の階数は 1 より大きいとする. このとき $\dim S(\hat{\mathfrak{h}}^-)_6^{O(L)} = 7$ ならば V_L^+ は $\mathcal{S}^6$ 級である.

Remark 4.5. Proposition 4.4 で格子 L の階数が 1 より大きいと仮定しているが, これは階数が 1 のときは $\dim S(\hat{\mathfrak{h}}^-)_6^{O(L)}$ の下限が 6 となってしまうことから除外している. しかし階数 1 の場合は Proposition 4.4 の仮定を $\dim S(\hat{\mathfrak{h}}^-)_6^{O(L)} = 6$ とすれば同様の議論で V_L^+ が $\mathcal{S}^6$ 級となることが示せる.

実際, $2A_1, \sqrt{2}D_4, \sqrt{2}E_8, BW_{16}$ は構成法 B で得られる格子であることが知られている. また, これら格子について **Molien 級数**を用いて斉次部分空間の次元を評価し, 実際に Proposition 4.3 や Proposition 4.4 仮定を満たすことを示した.

また, 筆者は V_L^+ の対称性が高いとき, L がどのような格子であるか示した.

Proposition 4.6. L をルートを持たない偶格子とする. このとき V_L^+ が $\mathcal{S}^4$ 級ならば L は構成法 B で得られる格子である.

Proof. 簡単にではあるが証明をつけておく. 実際は対偶を示す. L が構成法 B で得られないとすると Theorem 2.6 から $\mathrm{Aut}(V_L^+) = O(\hat{L})/\langle\theta\rangle$ である. このとき $(V_L^+)_4^{\mathrm{Aut}(V_L^+)} = S(\hat{\mathfrak{h}}^-)_4^{O(L)}$ となることがわかり, 後は次元を評価するだけである.

$$
\begin{aligned}
\dim (V_L^+)_4^{\mathrm{Aut}(V_L^+)} &= \dim S(\hat{\mathfrak{h}}^-)_4^{O(L)} \\
&= \dim \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{u_1(-1)u_2(-1)u_3(-1)u_4(-1) \mid u_1, u_2, u_3, u_4 \in \mathfrak{h}\}^{O(L)} \\
&\quad + \dim \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{u_1(-3)u_2(-1) \mid u_1, u_2 \in \mathfrak{h}\}^{O(L)} \\
&\quad + \dim \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{u_1(-2)u_2(-2) \mid u_1, u_2 \in \mathfrak{h}\}^{O(L)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \dim S^4(\mathfrak{h})^{O(L)} + \dim(\mathfrak{h}\otimes\mathfrak{h})^{O(L)} + \dim S^2(\mathfrak{h})^{O(L)} \\
&\geq 3 > 2 = \dim(V_\omega)_4.
\end{aligned}
$$

ここで $S^k(\mathfrak{h})$ は $\mathfrak{h}$ の対称代数の次数 k の部分空間である．上の不等式から V_L^+ は $\mathcal{S}^4$ 級ではないことがわかる． □

Proposition 4.6 から V_L^+ が $\mathcal{S}^4$ 級とすると，L の階数が 1 であるときは $L \cong 2A_1$ となる．また L の階数が 1 より大きいときは，(2.4.3) から L にノルム 4 のベクトルが存在することがわかる．一般に V_L^+ について，L のノルム 4 のベクトル α から Ising vector $w^+(\alpha)$ が構成できることが知られている ([DMZ])．主結果 1 の場合，仮定の $\langle L, L\rangle \subset 2\mathbb{Z}$ から $w^+(\alpha)$ は $d^{w^+(\alpha)}(\frac{1}{16}) = 0$ である Ising vector となる．このとき [Ma] で得られた跡公式から V_L^+ の中心電荷 c と次数 2 の空間の次元 d は (3.0.1) のいずれかとなる．また次のことに注意する．

Remark 4.7. L をルートを持たない偶格子とする．このとき V_L^+ の中心電荷を c, 次数 2 の空間の次元を d とすると

$$|L(4)| = 2d - c(c+1)$$

となる．ただし $L(k) = \{u \in L |\ \langle u, u\rangle = k\}$ である．

Remark 4.8. L を長さ n の二元線形符号 C から構成法 B で得られるルートを持たない偶格子とする．このとき

$$|L(4)| = 2n(n-1) + 128|C(8)|$$

となる．ただし $C(s) = \{c \in C |\ |\mathrm{supp}(c)| = s\}$ である．

まず Remark 4.7 を (3.0.1) に適用すると

(c,d)	$\lvert L(4)\rvert$
$(4,22)$	24
$(8,156)$	240
$(10,685)$	1260

を得る．ここで $(c,d) = (10,685)$ と仮定すると Remark 4.8 から $|C(8)| = \frac{3^3\cdot 5}{2^4}$ となり，$|C(8)|$ の整数性に矛盾する．また他の 2 つに関して Remark 4.8 を適用すると

(c,d)	$\lvert L(4)\rvert$	$\lvert C(8)\rvert$
$(4,22)$	24	0
$(8,156)$	240	1

を得る．特に C の長さは中心電荷 c と等しいので C と，C から構成法 B で得られる格子 $L_B(C)$ は次となる．

(c,d)	$\lvert L(4)\rvert$	$\lvert C(8)\rvert$	C	$L_B(C)$
$(4,22)$	24	0	$\{(0^4)\}$	$\sqrt{2}D_4$
$(8,156)$	240	1	$\{(0^8),(1^8)\}$	$\sqrt{2}E_8$

よって主結果 1 を得る. また主結果 2 は, 主結果 1 と同様の議論で Ising vector $w^+(\alpha)$ が $d^{w^+(\alpha)}(\frac{1}{16}) = 0$ ならば $L \cong \sqrt{2}E_8$, $d^{w^+(\alpha)}(\frac{1}{16}) \neq 0$ ならば $L \cong BW_{16}$ が示せる.

現在, 他に階数 32 の Barnes-Wall 格子 BW_{32} から $\mathbb{Z}_2$ 軌道体構成法で得られる頂点作用素代数 $\widetilde{V}_{BW_{32}}$ が $\mathcal{S}^6$ 級になるだろうと考察されている. 今後は $\mathbb{Z}_2$ 軌道体構成法から得られる頂点作用素代数の $\mathcal{S}^n$ 級についても考える必要がある.

参考文献

[CS] Conway, J. H., Sloane, N.J.A. *Sphere packings, lattices and groups. 3rd Edition*, Springer, New York, 1999.

[DMZ] C. Dong, G. Mason and Y. Zhu. Discrete series of the Virasoro algebra and the moonshine module, *Proc. Symp. Pure. Math.*, *American Math. Soc.*56 *II*, (1994), 295-316.

[FLM] I. B. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman. *Vertex Operator Algebras and the Monster*, Pure and Applied Math., Vol 134, Academic Press, Boston, 1988.

[HLY] G. Höhn, C. H. Lam and H. Yamauchi. McKay's E_7 observation on the baby monster, *Int. Math. Res. Not.*, (2012), 166-212.

[Hö] G. Höhn. Conformal designs based on vertex operator algebras, *Adv. Math*, 217, (2008), 2301-2355.

[LL] J. Lepowsky, H. Li. *Introduction to Vertex Operator Algebras and Their Representations*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2004.

[Ma] A. Matsuo. Norton's trace formulae for the Griess algebra of a vertex operator algebra with larger symmetry, *Comm. Math. Phys.* 224 (2001) 565-591.

[Mi] M. Miyamoto. Vertex operator algebras generated by two conformal vectors whose τ-involutions generate S_3, *J. Algebra* 268 (2003) 653-671.

[Sh] H. Shimakura. The automorphism group of the vertex operator algebra V_L^+ for an even lattice L without roots, *J. Algebra* 228 (2004) 29-57.