数理解析研究所講究録
第1926巻 2014年 88-97

Vertex operator algebras associated with $\mathbb{Z}_k$-codes

一橋大学大学院経済学研究科　山田裕理[1]
Hiromichi Yamada
Graduate School of Economics,
Hitotsubashi University[2]

1 はじめに

$k\geq 2$ を整数とする．有限次元単純リー代数 $\mathfrak{g}$ のアフィンリー代数 $\hat{\mathfrak{g}}$ に関するレベル k の可積分表現 $L_{\hat{\mathfrak{g}}}(k,0)$ は，単純頂点作用素代数の構造を持つ．$\mathfrak{g}$ のカルタン部分代数 $\mathfrak{h}$ で生成される $L_{\hat{\mathfrak{g}}}(k,0)$ の部分頂点作用素代数はハイゼンベルグ頂点作用素代数で，その $L_{\hat{\mathfrak{g}}}(k,0)$ におけるコミュタント $K(\mathfrak{g},k)$ はパラフェルミオン頂点作用素代数と呼ばれる頂点作用素代数である ([7]).

最も基本的な $\mathfrak{g}=sl_2$ の場合のパラフェルミオン頂点作用素代数 $K(sl_2,k)$ については，既約加群の分類などの基本的な性質は [2], [4], [5] により知られている．本稿では，$K(sl_2,k)$ の既約加群のうち性質の良いものを用いて，長さ n の $\mathbb{Z}_k$-code D で一定の条件を満たすものに対して，新しい頂点作用素代数 M_D が構成できることを紹介する．$k=2,3,4$ の場合の M_D は既に知られており，本稿の結果はそれらを一般の k に拡張したものである．

本稿は荒川知幸氏，山内博氏との共同研究に基づくものである．Ching Hung Lam 氏には，コードに関して有益なアドバイスをいただいた．

2 既約 $K(sl_2,k)$-加群 $M^{(j)}$, $0\leq j\leq k-1$

この節では，パラフェルミオン頂点作用素代数 $K(sL_2,k)$ の既約加群 $M^{(j)}$, $0\leq j\leq k-1$ を，ある種の格子頂点作用素代数の既約加群の中に構成する．

$k\geq 2$ を整数とし，$L=\mathbb{Z}\alpha_1+\cdots+\mathbb{Z}\alpha_k$ を階数 k の格子とする．ここで，$\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle=2\delta_{ij}$ である．したがって，L は A_1 型ルート格子の k 個の直交和 $A_1^{\oplus k}$ である．$\gamma=\alpha_1+\cdots+\alpha_k$ とおき，γ と直交する L の元全体を N とおく．$N=\sum_{p=1}^{k-1}\mathbb{Z}(\alpha_p-\alpha_{p+1})\cong\sqrt{2}A_{k-1}$ である．$R=N\oplus\mathbb{Z}\gamma$ とおくと，次の補題が成り立つ．なお，$X^{\perp}$ は格子 X の双対格子 $X^{\perp}=\{\alpha\in\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}X\mid\langle\alpha,X\rangle\subset\mathbb{Z}\}$ を表す．

---

[1]本研究は学術研究助成基金助成金 基盤研究 (C) 23540009 の助成を受けたものである．
[2]e-mail: yamada@econ.hit-u.ac.jp

補題 2.1 (1) $R \subset L \subset L^{\perp} \subset R^{\perp}$.
(2) $L = \cup_{i=0}^{k-1}(R + i\alpha_1)$.
(3) $L + \mathbb{Z}\frac{1}{2k}\gamma = \cup_{i=0}^{k-1} \cup_{j=0}^{2k-1} (R + i\alpha_1 + \frac{j}{2k}\gamma)$.
(4) $R^{\perp} = N^{\perp} \oplus (\mathbb{Z}\gamma)^{\perp}$, $(\mathbb{Z}\gamma)^{\perp} = \mathbb{Z}\frac{1}{2k}\gamma$.

ツイスト群環 $\mathbb{C}\{R^{\perp}\}$ の標準的な基底を $\{e^{\alpha}|\alpha \in R^{\perp}\}$ で表す．$R^{\perp}$ が $N^{\perp}$ と $(\mathbb{Z}\gamma)^{\perp}$ の直交和だから，$\mathbb{C}\{R^{\perp}\}$ における $e^{\alpha}, \alpha \in R^{\perp}$ と $e^{j\gamma/2k}$, $j \in \mathbb{Z}$ の積について，

$$e^{\alpha}e^{j\gamma/2k} = e^{j\gamma/2k}e^{\alpha} = e^{\alpha + j\gamma/2k}, \quad \alpha \in R^{\perp},\ j \in \mathbb{Z} \tag{2.1}$$

が成り立つ．

$V_{R^{\perp}} = M_{\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{Z}}R}(1) \otimes \mathbb{C}\{R^{\perp}\}$ とおく．$v \in V_{R^{\perp}}$ に対して，頂点作用素

$$Y(v,z) = \sum_{n\in\mathbb{Q}} v_n z^{-n-1} \in (\mathrm{End}\, V_{R^{\perp}})\{z\}$$

を [6, Chapter 3] により定義すると，$(V_{R^{\perp}}, Y)$ は一般頂点代数 (generalized vertex algebra) になる ([6, Theorem 9.8])．

$R^{\perp}$ の任意の部分集合 X に対して，$\mathbb{C}\{R^{\perp}\}$ の部分空間

$$\mathbb{C}\{X\} = \mathrm{span}\{e^{\alpha}|\alpha \in X\} \subset \mathbb{C}\{R^{\perp}\} \tag{2.2}$$

を考えて，

$$V_X = M_{\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{Z}}X}(1) \otimes \mathbb{C}\{X\}$$

とおく．頂点作用素 $Y(v,z)$ の定義から，

$$v_n w \in V_{R+\lambda+\mu}, \quad v \in V_{R+\lambda},\ w \in V_{R+\mu},\ \lambda, \mu \in R^{\perp} \tag{2.3}$$

が成り立つことがわかる．

$X = R, N, \mathbb{Z}\gamma, L$ のときは V_X は頂点作用素代数であり，$V_{L^{\perp}}$ は V_L-加群，$V_{R^{\perp}}$ は V_R-加群である．$R^{\perp}$ は $N^{\perp}$ と $(\mathbb{Z}\gamma)^{\perp}$ の直交和だから，$\mathbb{C}\{R^{\perp}\} = \mathbb{C}\{N^{\perp}\} \otimes \mathbb{C}\{(\mathbb{Z}\gamma)^{\perp}\}$ であり，$V_{R^{\perp}} = V_{N^{\perp}} \otimes V_{(\mathbb{Z}\gamma)^{\perp}}$ が成り立つ．また，$V_R = V_N \otimes V_{\mathbb{Z}\gamma}$ である．

$e^{p\gamma/2k}$ をツイスト群環 $\mathbb{C}\{R^{\perp}\}$ の部分にかけることにより，線型同型 $\psi_p : V_{R^{\perp}} \to V_{R^{\perp}}$ が引き起こされる．

$$\psi_p : u \otimes e^{\alpha} \mapsto u \otimes (e^{\alpha}e^{p\gamma/2k}) = u \otimes e^{\alpha + p\gamma/2k}, \quad u \in M_{\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{Z}}R}(1),\ \alpha \in R^{\perp},\ p \in \mathbb{Z}. \tag{2.4}$$

次の補題は，ψ_p の定義と (2.1) からすぐにわかる．

補題 2.2 (1) $\psi_p \circ \psi_q = \psi_{p+q}$, $(\psi_p)^{-1} = \psi_{-p}$, $p, q \in \mathbb{Z}$.
(2) $\psi_p : V_{R^{\perp}} \to V_{R^{\perp}}$ は V_N-加群の同型である．
(3) $\psi_p(V_{R+\lambda}) = V_{R+\lambda+p\gamma/2k}$, $\lambda \in R^{\perp}$, $p \in \mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z}\alpha_i$, $i = 1, \ldots, k$ は A_1 型ルート格子だから，それから定義される頂点作用素代数 $V_{\mathbb{Z}\alpha_i}$ は，A_1 型アフィンリー代数 $\widehat{sl}_2$ のレベル 1 の可積分表現 $L_{\widehat{sl}_2}(1,0)$ である．$L = A_1^{\oplus k}$ だから，次のようにして V_L の中に $\widehat{sl}_2$ のレベル k の可積分表現 $L_{\widehat{sl}_2}(k,0)$ が構成できる．V_L の 3 つの元

$$H = \gamma(-1)\mathbf{1}, \qquad E = e^{\alpha_1} + \cdots + e^{\alpha_k}, \qquad F = e^{-\alpha_1} + \cdots + e^{-\alpha_k}$$

で生成される V_L の部分頂点作用素代数，および e^{γ} と $e^{-\gamma}$ で生成される部分頂点作用素代数をそれぞれ V^{aff} および V^{γ} とおく ([5, Section 4])．$V^{\mathrm{aff}} \cong L_{\widehat{sl}_2}(k,0)$，$V^{\mathrm{aff}} \supset V^{\gamma} \cong V_{\mathbb{Z}\gamma}$ である．

$V^{\gamma} \cong V_{\mathbb{Z}\gamma}$ の V^{aff} におけるコミュタントを，M^0 とおく．M^0 は，パラフェルミオン頂点作用素代数 $K(sl_2, k)$ である．$M^0 = \mathrm{Com}_{V^{\mathrm{aff}}}(V_{\mathbb{Z}\gamma}) \cong K(sl_2, k)$．$V^{\mathrm{aff}}$ は，既約 $M^0 \otimes V_{\mathbb{Z}\gamma}$-加群の直和に分解される．それを

$$V^{\mathrm{aff}} \cong \bigoplus_{j=0}^{k-1} M^j \otimes V_{\mathbb{Z}\gamma - j\gamma/k} \tag{2.5}$$

とおくと，M^j, $0 \leq j \leq k-1$ は M^0 の既約加群になる．

$V^{\mathrm{aff}} \cong L_{\widehat{sl}_2}(k,0)$ の既約加群 $L_{\widehat{sl}_2}(k,i)$，$0 \leq i \leq k$ が $V_{L^{\perp}}$ の中に構成できて，それらは既約 $M^0 \otimes V_{\mathbb{Z}\gamma}$-加群の直和

$$L_{\widehat{sl}_2}(k,i) = \bigoplus_{j=0}^{k-1} M^{i,j} \otimes V_{\mathbb{Z}\gamma + (i-2j)\gamma/2k} \tag{2.6}$$

に分解される．$M^{0,j} = M^j$ である．

$M^0 \cong K(sl_2, k)$，および $M^{i,j}$，$0 \leq i \leq k$，$0 \leq j \leq k-1$ について，次のことが知られている ([2], [3], [4], [5])．

(i) M^0 は有理的かつ C_2 余有限な CFT 型の単純頂点作用素代数で，中心電荷は $2(k-1)/(k+2)$ である．

(ii) M^0 の指標の最初の方は $\mathrm{ch}\, M^0 = 1 + q^2 + 2q^3 + \cdots$ である．

(iii) $M^{i,j} \cong M^{k-i,\,k-i+j}$ である．

(iv) $M^{i,j}$，$0 \leq j < i \leq k$ は既約 M^0-加群の同型類の完全代表系である．

(v) M^j のトップレベルのウエイトは $j(k-j)/k$ である．

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & V_L = V_{A_1}^{\otimes k} = L_{\widehat{sl}_2}(1,0)^{\otimes k} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
 & V_{\sqrt{2}A_{k-1}} = V_N \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & V^{\mathrm{aff}} = L_{\widehat{sl}_2}(k,0) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
T & & M^0 & & V^{\gamma} = V_{\mathbb{Z}\gamma}
\end{tikzcd}$$

M^0 の既約加群 M^j, $0 \leq j \leq k-1$ は，(2.5) では既約 $V_{\mathbb{Z}\gamma}$-加群 $V_{\mathbb{Z}\gamma - j\gamma/k}$ とのテンソル積 $M^j \otimes V_{\mathbb{Z}\gamma - j\gamma/k}$ の形で現れる．次のように4つのステップにわけて，M^0 の既約加群 M^j, $0 \leq j \leq k-1$ を単独で取り出す．

Step 1. $\gamma(0) = H_0$ の作用により，$V_{R^\perp}$ の線型同型 $\sigma = \exp(2\pi\sqrt{-1}\gamma(0)/2k)$ が引き起こされる．補題 2.1 (2) により $V_L = \bigoplus_{i=0}^{k-1} V_{R+i\alpha_1}$ だから，

$$\{v \in V_L | \sigma v = \exp(2\pi i \sqrt{-1}/k)v\} = V_{R+i\alpha_1}$$

である．一方，(2.5) より

$$\{v \in V^{\mathrm{aff}} | \sigma v = \exp(-2\pi j\sqrt{-1}/k)v\} \cong M^j \otimes V_{\mathbb{Z}\gamma - j\gamma/k}$$

である．よって，

$$V^{\mathrm{aff}} \cap V_{R-j\alpha_1} \cong M^j \otimes V_{\mathbb{Z}\gamma - j\gamma/k}, \quad 0 \leq j \leq k-1 \tag{2.7}$$

という $M^0 \otimes V_{\mathbb{Z}\gamma}$-加群の同型がわかる．

Step 2. $M^0 = \mathrm{Com}_{V^{\mathrm{aff}}}(V_{\mathbb{Z}\gamma}) \subset \mathrm{Com}_{V_L}(V_{\mathbb{Z}\gamma}) = V_N$ で，補題 2.2 (2) により ψ_p は V_N-加群の同型だから，ψ_p は M^0-加群の同型である．また，既約 $V_{\mathbb{Z}\gamma}$-加群 $V_{\mathbb{Z}\gamma - j\gamma/k}$ の ψ_{2j} による像は $V_{\mathbb{Z}\gamma}$ である．よって，(2.7) より $M^0 \otimes V_{\mathbb{Z}\gamma}$-加群の同型

$$\psi_{2j}(V^{\mathrm{aff}} \cap V_{R-j\alpha_1}) \cong M^j \otimes V_{\mathbb{Z}\gamma}, \quad 0 \leq j \leq k-1 \tag{2.8}$$

がわかる．

Step 3. V^{aff} の V_L におけるコミュタントを $T = \mathrm{Com}_{V_L}(V^{\mathrm{aff}})$ とおく．T は M^0 の V_N におけるコミュタントでもある．T の V_L におけるコミュタントは V^{aff} に一致するので，T の共形元を ω_T とおくと $V^{\mathrm{aff}} = \{v \in V_L \,|\, (\omega_T)_1 v = 0\}$ が成り立つ．特に

$$\{v \in V_{R-j\alpha_1} \,|\, (\omega_T)_1 v = 0\} = V^{\mathrm{aff}} \cap V_{R-j\alpha_1} \tag{2.9}$$

である．

$\omega_T \in V_N$ で V_N が $V_{\mathbb{Z}\gamma}$ の V_L におけるコミュタントだから，ψ_{2j} の作用と $(\omega_T)_1$ の作用は可換であることに注意する．ψ_{2j} の定義から $\psi_{2j}(V_{R-j\alpha_1}) = V_{R-j\alpha_1+j\gamma/k}$ だから，(2.9) の両辺の ψ_{2j} による像をとると，(2.8) より

$$\{v \in V_{R-j\alpha_1+j\gamma/k} \,|\, (\omega_T)_1 v = 0\} \cong M^j \otimes V_{\mathbb{Z}\gamma}, \quad 0 \leq j \leq k-1 \tag{2.10}$$

が得られる．

Step 4. $j \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$N^j = N - j\alpha_1 + j\gamma/k \subset N^\perp \tag{2.11}$$

とおく．$-k\alpha_1+\gamma \in N$ だから，N^j は $j \pmod k$ で定まる．$R-j\alpha_1+j\gamma/k = N^j \oplus \mathbb{Z}\gamma$ は N^j と $\mathbb{Z}\gamma$ の直交和だから，$V_{R-j\alpha_1+j\gamma/k} = V_{N^j} \otimes V_{\mathbb{Z}\gamma}$ で

$$V_{N^j} = \{v \in V_{R-j\alpha_1+j\gamma/k} | (\omega_\gamma)_1 v = 0\}$$

が成り立つ．ここで，ω_γ は $V^\gamma \cong \mathbb{Z}\gamma$ の共形元を表す．$(\omega_T)_1$ の作用と $(\omega_\gamma)_1$ の作用は可換だから，(2.10) より，$\{v \in V_{N^j} \,|\, (\omega_T)_1 v = 0\}$ は既約 M^0-加群 M^j と同型であることがわかる．

$$M^{(j)} = \{v \in V_{N^j} \,|\, (\omega_T)_1 v = 0\}, \quad 0 \le j \le k-1 \tag{2.12}$$

とおく．$M^{(0)} = M^0$ である．以上の議論により，次の定理が得られた．

定理 2.3 M^0-加群として，$M^{(j)} \cong M^j$, $0 \le j \le k-1$ である．

3 $\mathbb{Z}_k$-code VOA M_D

n を正の整数とする．$(\mathbb{Z}_k)^n$ の和に関する部分群を，長さ n の $\mathbb{Z}_k$-code と呼ぶ．この節では，前節で定義した $M^{(j)}$, $0 \le j \le k-1$ を用いて，長さ n の $\mathbb{Z}_k$-code に対して，それに付随する頂点作用素代数を構成する．

$\xi = (i_1, \ldots, i_n)$, $\eta = (j_1, \ldots, j_n) \in (\mathbb{Z}_k)^n$ に対して，標準的な内積

$$(\xi|\eta) = i_1 j_1 + \cdots + i_n j_n \in \mathbb{Z}_k \tag{3.1}$$

を考える．D は長さ n の $\mathbb{Z}_k$-code で，次の (A) と (B) のどちらかの条件を満たすとする．

(A) すべての $\xi \in D$ について $(\xi|\xi) = 0$ である．

(B) k は偶数で，すべての $\xi, \eta \in D$ について $(\xi|\eta) \in \{0, k/2\}$ であり，$(\xi|\xi) = k/2$ を満たす $\xi \in D$ が存在する．

k が奇数のとき，(A) の場合はすべての $\xi, \eta \in D$ について $(\xi|\eta) = 0$ が成り立つので，D は self-orthogonal である．しかし，k が偶数のときは事情が異なる．

D を，(A) あるいは (B) の条件を満たす長さ n の $\mathbb{Z}_k$-code とする．D に対して，$N^\perp$ の n 個の直交和 $(N^\perp)^{\oplus n}$ の中に次のような格子 Γ_D を作る．

$\xi = (i_1, \ldots, i_n) \in (\mathbb{Z}_k)^n$ に対して

$$N_\xi = N^{i_1} \oplus \cdots \oplus N^{i_n} \subset (N^\perp)^{\oplus n} \tag{3.2}$$

とおく．$N^j = N - j\alpha_1 + j\gamma/k \subset N^\perp$, $j \in \mathbb{Z}_k$ は前節 (2.11) のものである．さらに，

$$\Gamma_D = \bigcup_{\xi \in D} N_\xi \subset (N^\perp)^{\oplus n} \tag{3.3}$$

とおく．$\alpha \in N_\xi$, $\beta \in N_\eta$ について $\alpha + \beta \in N_{\xi+\eta}$ であり，D は和に関する $(\mathbb{Z}_k)^n$ の部分群だから，Γ_D は和に関する $(N^\perp)^{\oplus n}$ の部分群である．さらに，$a \in N^i$, $b \in N^j$ ならば $\langle a, b\rangle \in -2ij/k + 2\mathbb{Z}$ だから，$\alpha \in N_\xi$, $\beta \in N_\eta$ ならば

$$\langle \alpha, \beta\rangle \in -\frac{2}{k}(\xi|\eta) + 2\mathbb{Z} \tag{3.4}$$

が成り立つ．よって，次の補題が得られる．

補題 3.1 (1) D が条件 (A) を満たせば，Γ_D は正定値偶格子である．

(2) k が偶数で D が条件 (B) を満たせば，Γ_D 正定値奇格子である．すなわち，Γ_D は整格子であって $\langle \alpha, \alpha\rangle$ が奇数となるような $\alpha \in \Gamma_D$ が存在する．

k が偶数で D が (B) の場合には，$\alpha \in N_\xi$ について，(3.4) により $(\xi|\xi) = 0$ あるいは $(\xi|\xi) = k/2$ にしたがって $\langle \alpha, \alpha\rangle$ は偶数あるいは奇数となる．

$$\Gamma_D^{\bar{p}} = \{\alpha \in \Gamma_D \,|\, \langle \alpha, \alpha\rangle \in p + 2\mathbb{Z}\}, \quad p = 0, 1 \tag{3.5}$$

とおくと，$\Gamma_D = \Gamma_D^{\bar{0}} \cup \Gamma_D^{\bar{1}}$ であり，

$$\Gamma_D^{\bar{0}} = \bigcup_{\substack{\xi \in D \\ (\xi|\xi)=0}} N_\xi, \qquad \Gamma_D^{\bar{1}} = \bigcup_{\substack{\xi \in D \\ (\xi|\xi)=k/2}} N_\xi \tag{3.6}$$

が成り立つ．

以上の議論により，

$$V_{\Gamma_D} = M_{\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{Z}}\Gamma_D}(1) \otimes \mathbb{C}\{\Gamma_D\} \subset (V_{N^\perp})^{\otimes n} \tag{3.7}$$

について，次のことがわかる．

命題 3.2 (1) D が条件 (A) を満たせば，V_{Γ_D} は頂点作用素代数である．

(2) k が偶数で D が条件 (B) を満たせば，$V_{\Gamma_D} = V_{\Gamma_D}^{\bar{0}} \oplus V_{\Gamma_D}^{\bar{1}}$ は頂点作用素超代数で，偶部分 $V_{\Gamma_D}^{\bar{0}}$ と奇部分 $V_{\Gamma_D}^{\bar{1}}$ は

$$V_{\Gamma_D}^{\bar{p}} = M_{\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{Z}}\Gamma_D}(1) \otimes \Big(\bigoplus_{\alpha \in \Gamma_D^{\bar{p}}} e^\alpha\Big), \qquad p = 0, 1$$

である．

$\xi = (i_1, \ldots, i_n) \in (\mathbb{Z}_k)^n$ に対して，

$$V_{N_\xi} = V_{N^{i_1}} \otimes \cdots \otimes V_{N^{i_n}} \subset (V_{N^\perp})^{\otimes n}$$

とおく．これは既約 $(V_N)^{\otimes n}$-加群であり，V_{Γ_D} はこれらの既約加群の直和

$$V_{\Gamma_D} = \bigoplus_{\xi \in D} V_{N_\xi} \tag{3.8}$$

になる．

$\xi = (i_1, \ldots, i_n) \in (\mathbb{Z}_k)^n$ に対して，

$$M_\xi = M^{(i_1)} \otimes \cdots \otimes M^{(i_n)} \tag{3.9}$$

とおく．ここで，$M^{(j)}$, $j \in \mathbb{Z}_k$ は第 2 節で構成した既約 M^0-加群であり，したがって M_ξ は既約 $(M^0)^{\otimes n}$-加群である．さらに，(2.12) により

$$M_\xi = \{v \in V_{N_\xi} \mid (\omega_{T^{\otimes n}})_1 v = 0\} \tag{3.10}$$

が成り立つことがわかる．ここで，$\omega_{T^{\otimes n}}$ は $(V_N)^{\otimes n}$ の部分代数 $T^{\otimes n}$ の共形元である．

ξ が $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ のときは，$M_{\mathbf{0}} = (M^{(0)})^{\otimes n}$ は $M^{(0)} = M^0$ の n 個のテンソル積にほかならない．$M^{(j)} \cong M^j$ のトップレベルのウエイトは $j(k-j)/k$ だから，M_ξ のトップレベルのウエイトは，

$$\Big(\sum_{p=1}^{n} i_p\Big) - \frac{(\xi|\xi)}{k} \tag{3.11}$$

である．

$T^{\otimes n}$ の V_{Γ_D} におけるコミュタントを M_D とおく．

$$M_D = \mathrm{Com}_{V_{\Gamma_D}}(T^{\otimes n}) = \{v \in V_{\Gamma_D} \mid (\omega_{T^{\otimes n}})_1 v = 0\}.$$

M_D は $M_{\mathbf{0}} = (M^{(0)})^{\otimes n}$ の加群として，既約加群の直和

$$M_D = \bigoplus_{\xi \in D} M_\xi \tag{3.12}$$

に分解する．M_D について，次の定理が成り立つ．

定理 3.3 (1) D が条件 (A) を満たせば，M_D は有理的かつ C_2 余有限な CFT 型の単純頂点作用素代数で，中心電荷は $2(k-1)n/(k+2)$ である．

(2) k が偶数で D が条件 (B) を満たせば，$M_D = M_D^{\bar{0}} \oplus M_D^{\bar{1}}$ は単純頂点作用素超代数で，偶部分 $M_D^{\bar{0}}$ と奇部分 $M_D^{\bar{1}}$ は

$$M_D^{\bar{0}} = \bigoplus_{\substack{\xi \in D \\ (\xi|\xi)=0}} M_\xi, \qquad M_D^{\bar{1}} = \bigoplus_{\substack{\xi \in D \\ (\xi|\xi)=k/2}} M_\xi$$

で与えられる．偶部分 $M_D^{\bar{0}}$ は有理的かつ C_2 余有限な CFT 型の単純頂点作用素代数である．奇部分 $M_D^{\bar{1}}$ のウエイトはすべて $1/2 + \mathbb{Z}$ に属する．

実際，頂点作用素代数 $M^0 \cong K(sl_2,k)$ が単純で有理的かつ C_2 余有限だから，その n 個のテンソル積 $M_{\mathbf{0}} = (M^{(0)})^{\otimes n}$ も単純で有理的かつ C_2 余有限である．よって [1], [12] により，D が (A) の場合は頂点作用素代数 M_D が単純で有理的かつ C_2 余有限であることがわかる．k が偶数で D が (B) の場合は，偶部分 $M_D^{\bar{0}}$ は単純で有理的かつ C_2 余有限な頂点作用素代数である．

注意 3.4 $M^0 \cong K(sl_2,k)$ の $k(k+1)/2$ 個の既約加群 $M^{i,j}$ のうち $M^{0,j} = M^j$，$0 \le j \le k-1$ は単純カレントであることが知られている ([3])．したがって，M_ξ，$\xi \in D$ は単純カレント既約 $M_{\mathbf{0}}$-加群であり，(3.12) は $M_{\mathbf{0}}$ の単純カレント拡大である．本稿では，code D から得られる格子 Γ_D に付随する頂点作用素代数ないし頂点作用素超代数 V_{Γ_D} を先に構成し，そこにおける部分代数 $T^{\otimes n}$ のコミュタントとして M_D を定義するという直接的な方法を採用しており，M_ξ が単純カレント既約 $M_{\mathbf{0}}$-加群であることは用いていない．

4 k が小さいときの例

条件 (A) あるいは条件 (B) を満たす長さ n の $\mathbb{Z}_k$-code D は多数あるので，多くの有理的かつ C_2 余有限な単純頂点作用素代数が M_D として得られる．$k = 2,3,4$ の場合の $K(sl_2,k)$ は，それぞれ中心電荷 1/2 のヴィラソロ頂点作用素代数 $\mathcal{L}(1/2,0)$，3-state Potts model $\mathcal{L}(4/5,0) \oplus \mathcal{L}(4/5,3)$，および $\langle\alpha,\alpha\rangle = 6$ を満たす α を基底とする階数 1 の格子 $\mathbb{Z}\alpha$ に付随する格子頂点作用素代数のオービフォールド $V_{\mathbb{Z}\alpha}^+$ に同型であり，これらの場合の M_D は詳しく研究されている．本節では，これらの先行研究と本稿での記号の対応を説明する．

4.1 Case $k = 2$

$k = 2$ の場合は $L = \mathbb{Z}\alpha_1 + \mathbb{Z}\alpha_2 \cong A_1^{\oplus 2}$, $\gamma = \alpha_1 + \alpha_2$, $N = \mathbb{Z}(\alpha_1 - \alpha_2) \cong \sqrt{2}A_1$ で，$V^{\mathrm{aff}} \cong L_{\widehat{sl}_2}(2,0)$ は中心電荷 3/2 である．$N^1 = N - \alpha_1 + \gamma/k$ は

$$N^1 = N + \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)$$

であり，(2.5) の分解は

$$V^{\mathrm{aff}} \cong (M^0 \otimes V_{\mathbb{Z}\gamma}) \oplus (M^1 \otimes V_{\mathbb{Z}\gamma-\gamma/2})$$

となる．$M^0 \cong \mathcal{L}(1/2,0)$ は中心電荷 1/2 のヴィラソロ頂点作用素代数で，$M^1 \cong \mathcal{L}(1/2,1/2)$ はその最高ウエイト 1/2 の既約加群である．$n = 1$ で $D = \{(0),(1)\}$ のときは，

$$M_D \cong \mathcal{L}(\frac{1}{2},0) \oplus \mathcal{L}(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$$

は頂点作用素超代数である.

$k=2$ だから $\{0,k/2\}=\mathbb{Z}_k$ が成り立ち，任意の長さ n の $\mathbb{Z}_2$-code D は (A) または (B) の条件を満たす．$k=2$ のときの M_D の研究は，[10], [11] により開始された.

4.2 Case $k=3$

$k=3$ の場合は $L=\mathbb{Z}\alpha_1+\mathbb{Z}\alpha_2+\mathbb{Z}\alpha_3\cong A_1^{\oplus 3}$, $\gamma=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, $N=\mathbb{Z}(\alpha_1-\alpha_2)+\mathbb{Z}(\alpha_2-\alpha_3)\cong\sqrt{2}A_2$ である．$N^j=N-j\alpha_1+j\gamma/k$, $j=1,2$ は

$$
\begin{aligned}
N^1 &= N+\frac{1}{3}\big((\alpha_1-\alpha_2)-(\alpha_2-\alpha_3)\big),\\
N^2 &= N+\frac{1}{3}\big(-(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3)\big)
\end{aligned}
$$

となる．$k=3$ の場合の M_D は，[9] で論じられている.

4.3 Case $k=4$

$k=4$ の場合の M_D は，扱い方は若干異なるが [8] において実質的に調べられている．[8] における $\gamma/2+N$ は本稿の $N-\alpha_1+\gamma/4$ に対応し，[8, Section 5] の 4 つの加群

$$
\begin{aligned}
\{v\in M^0\,|\,\omega_1^3 v=0\} &\cong V_F^+,\\
\{v\in M^2\,|\,\omega_1^3 v=0\} &\cong V_{\gamma/2+N}^+,\\
\{v\in M^4\,|\,\omega_1^3 v=0\} &\cong V_F^-,\\
\{v\in M^6\,|\,\omega_1^3 v=0\} &\cong V_{\gamma/2+N}^-
\end{aligned}
$$

はそれぞれ，本稿の記号では $M^{(0)}$, $M^{(1)}$, $M^{(2)}$, $M^{(3)}$ という M^0-加群に対応する.

参考文献

[1] T. Abe, G. Buhl and C. Dong, Rationality, regularity and C_2-cofiniteness, *Trans. Amer. Math. Soc.* **356** (2004). 3391–3402.

[2] T. Arakawa, C.H. Lam and H. Yamada, Zhu's algebra, C_2-algebra and C_2-cofiniteness of parafermion vertex operator algebras, preprint, arXiv:1207.3909.

[3] T. Arakawa, C.H. Lam and H. Yamada, in preparation.

[4] C. Dong, C.H. Lam, Q. Wang and H. Yamada, The structure of parafermion vertex operator algebras, *J. Algebra* **323** (2010), 371–381.

[5] C. Dong, C.H. Lam and H. Yamada, W-algebras related to parafermion algebras, *J. Algebra* **322** (2009), 2366–2403.

[6] C. Dong and J. Lepowsky, *Generalized Vertex Algebras and Relative Vertex Operators*, Progress in Math., Vol. 112, Birkhäuser, Boston, 1993.

[7] C. Dong and Q. Wang, The structure of parafermion vertex operator algebras: general case, *Commun. Math. Phys.* **299** (2010), 783–792.

[8] M. Kitazume, C.H. Lam and H. Yamada, A class of vertex operator algebras constructed from $\mathbb{Z}_8$ codes, *J. Algebra* **242** (2001), 338–359.

[9] M. Kitazume, M. Miyamoto and H. Yamada, Ternary codes and vertex operator algebras, *J. Algebra* **223** (2000), 379–395.

[10] M. Miyamoto, Binary codes and vertex operator (super)algebras, *J. Algebra* **181** (1996), 207–222.

[11] M. Miyamoto, Representation theory of code vertex operator algebra, *J. Algebra* **201** (1998), 115–150.

[12] H. Yamauchi, Module categories of simple current extensions of vertex operator algebras, *J. Pure Appl. Algebra* **189** (2004), 315–328.