数理解析研究所講究録
第1926巻 2014年 72-77

Homology of a Certain Associative Algebra

Nobuo Iiyori, Yamaguchi University
(飯寄信保, 山口大学教育学部)

1 序

本講演の内容は, 千葉大学教育学部澤辺正人氏との共同研究の一部である。我々の目標は,「素数グラフの部分群複体による構造の解明」である。これを行うために, 現時点において, 部分群束をクイバと考え,「クイバのホモロジー」を数種類導入しその単体的複体の構造を調べる方法をとっている。この数種類の「クイバのホモロジー」を代数的な視点からまとめが本講演の内容である。本題に入る前に簡単にクイバの定義, クイバのホモロジーの一例を紹介しよう。

クイバとは, 空でない集合 Q_0 と集合 Q_1, Q_0 から Q_1 への2つの写像 s, r からなる4つ組 $Q = (Q_0, Q_1, s, r)$ のことであり, Q_0 の元を点, Q_1 の元を矢と呼ぶ。また, Q_1 の元からなる n 組 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ で $r(a_i) = s(a_{i+1})$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ を満たすものを長さ n のパスと呼ぶ。いろいろな事情から Q_0 の元を長さ0のパスと考える。また, 長さ1のパスと矢を同一視することにする。以下, Q のパス全体を $P(Q)$ で表す。写像 s, r を次のように $P(Q)$ から Q_0 への写像に拡張しておく。

$$s((a_1, \ldots, a_n)) = s(a_1),\ r((a_1, a_2, \ldots, a_n)) = r(a_n) \text{ 及び } s(a) = r(a) = a\ (a \in Q_0)$$

2元 Δ, Δ' に対し,

$$\Delta\Delta' = \begin{cases} (\Delta, \Delta') & r(\Delta) = s(\Delta') \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

と二項演算を定義すれば (ただし, ${Q_1}^l \times {Q_1}^k$ と ${Q_1}^{l+k}$ を同一視している), $P(Q)$ の可換環 R 上の線形結合全体 $R[Q]$ は, R-代数となる。これを Q のパス代数と呼ぶことにする。また, $(Q_0, P(Q) - Q_0, s, r)$ は, クイバであるがこれを $\bar{Q}$ で表すこととする。

クイバ Q に対し, $\bar{Q}$ のパス代数 $R[\bar{Q}]$ はその長さにより $\mathbf{Z}$-graded R-加群とみなせる

$$R[\bar{Q}] := \bigoplus_{n \geq 0} C_n(\bar{Q}).$$

$R[\bar{Q}]$ の自己 R-線形写像 ∂_Q を $n \geq 2$ のとき,

$$\begin{aligned}\partial_Q((\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n)) &= (\Delta_2, \ldots, \Delta_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i (\ldots, \Delta_i\Delta_{i+1}, \ldots) \\ &\quad + (-1)^n (\Delta_1, \ldots, \Delta_{n-1})\end{aligned}$$

とし, $\partial_Q(\Delta) = r(\Delta) - s(\Delta)$ 及び, $\partial_Q(x) = 0 (x \in Q_0)$ とおけば, $(R[\bar{Q}], \partial_Q)$ は鎖複体となる。$H_n(Q, R) := H_n(R[\bar{Q}], \partial_Q)$ と定義し, Q のホモロジーを得ることが出来る。

2 R-代数Aの基底Bのホモロジー

以下Rを可換環，AをR-代数，$B=\{b_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$を$A$の基底とする。$A$の$B$についての構造定数を

$$b_ib_j=\sum_{k\in\Lambda}c_{ij}^kb_k$$

で定義しておく。以下，$A^{\otimes(n+1)}$の元を$a_0\otimes\ldots\otimes a_n$のように表すことにし，$A$の部分集合$D$に対し$D_{\otimes n}=\{d_0\otimes\ldots\otimes d_n\in A^{\otimes(n+1)}|d_0d_1\cdots d_n\neq 0\}$と表すことにする。また$B_{\otimes n}$で生成される$R$-加群を$A^{[n]}$で表すことにする($A^{[-1]}=0$と定義しておく)。

整数$k\geq -1$，$n\geq 1$に対し，R-線形写像$\mu_{B,k}:A^{[n]}\longrightarrow A^{[n-1]}$を

$$\mu_{B,k}(b_0\otimes\cdots\otimes b_n):=\begin{cases} b_1\otimes\cdots\otimes b_n & k=-1\text{のとき}\\ b_0\otimes\cdots\otimes b_kb_{k+1}\otimes\cdots b_n & 0\leq k\leq n-1\text{のとき}\\ b_0\otimes\cdots\otimes b_{n-1} & k=n\text{のとき}\\ 0 & k>n\text{のとき}\end{cases}$$

のように定義したいのであるが，そのためには

条件$(*)$　任意の$b_0\otimes\cdots\otimes b_n\in B_{\otimes n}$と任意の$0\leq i\leq n-1$に対して$c_{i\ i+1}^k\neq 0$であるならば，$b_0\cdots b_{i-1}b_kb_{i+2}\cdots b_n\neq 0$

を満たさなければならない。

補題　Bは，条件$(*)$を満たしていると仮定する。$\partial_B:=\sum_{k\geq-1}(-1)^n\mu_{B,k}$とおく。$(\bigoplus_{n\geq 0}A^{[n]},\partial_B)$が鎖複体である必要十分条件は，

$$\text{もし}\ b_ib_j\neq 0\ \text{ならば，}\sum_{k\in\Lambda}c_{ij}^k=1$$

である。

定義 Bは，上の補題の諸条件を満たしていると仮定する。このとき
$H_*(A,B):=\mathrm{Ker}\partial_B/\mathrm{Im}\partial_B$を$A$の$B$に関するホモロジーと呼ぶ。

このホモロジーの定義の仮定を満たしている自明な例として$B\cup\{0\}$が積について半群をなしているような場合が考えられる。n次正方行列全体の為す行列環$M_n(R)$の行列単位全体$\{e_{ij}\}_{ij}$や群環$R[G]$におけるGなどがこの条件を満たしている。

上で定義したホモロジーは，A全体のホモロジーというものであり，実際に必要になるものはこれ以外に$\oplus_{n\geq 0}A^{[n]}$の∂_B-不変な$\mathbf{Z}$-graded 部分加群$D=\oplus_{n\geq 0}D_n$へ制限したもの

$$H_*(D):=(\mathrm{Ker}\partial_B|_D)/(\mathrm{Im}\partial_B|_D)$$

である。

3 例

この章においては，前の章で準備したホモロジーの具体的な例を挙げる。記号等は、前の章のものを引き継ぐものとし，更に特に断らない場合は，基底 B 等はホモロジーのための条件をすべて満たしているものとする。今回は特に $H_0(*)$ に特に焦点を当てて例示する。次の注意は，自明なことではあるが以下において重要である。

補題 可換環 R 上の代数 A の基底 B が A の単位元 1 を含んでいるとき，

$$\mathrm{Im}(\partial_B)_1 = \langle 1, ab-(a+b) | a, b \in B, ab \neq 0 \rangle \cdot$$

が成り立つ。

この注意から $H_0(*)$ においては，R-代数 A の積が和に変換されることを（実数における対数関数のようなもの）意味している。しかし、積が可換になることとは微妙に異なるので注意が必要である。

3.1 $M_2(\mathbf{C})$ の場合

$A = M_2(\mathbf{C})$ の基底として $B = \{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$ をとる。ここで $e_{st} = (\delta_{is}\delta_{jt})_{ij}$ (δはクロネッカーのデルタ) である。このとき $B \cup \{0\}$ は半群をなすので我々の条件を満たしていることがわかる。$B_{\otimes n}$ の定義により

$$B_{\otimes 1} = \{e_{11}\otimes e_{11}, e_{11}\otimes e_{12}, e_{12}\otimes e_{21}, e_{12}\otimes e_{22}, e_{21}\otimes e_{11}, e_{21}\otimes e_{12}, e_{22}\otimes e_{21}, e_{22}\otimes e_{22}\}$$

よって

$$\mathrm{Im}(\partial_B)_1 = \langle e_{11}, e_{12}+e_{21}-e_{11}, e_{22}, e_{21}+e_{12}-e_{22} \rangle$$

となるので

$$H_0(A,B) \simeq \mathbf{C}$$

を得る。同様に計算を行うと $n = 1, 2$ については次のようになる。

$$H_1(A,B) \simeq 0,\ H_2(A,B) \simeq \mathbf{C}$$

$\oplus_{n\geq 0} A^{[n]}$ の部分加群として上三角行列全体から作られるもの D (A の部分代数で $B = \{e_{11}, e_{12}, e_{22}\}$ と考えて得られるものから計算した結果と一致）について計算を同様にすると

$$H_0(D) = \mathbf{C}, \quad H_n(D) \simeq 0\ (n \geq 1)$$

となることがわかる。

3.2 群環の場合

Gを有限生成な群とし，Aとして$\mathbf{Z}[G]$, BとしてGを考える。このときホモロジーを考えられる諸条件を満たしていることは明らかである。まず，Gがアーベル群の場合を考える。

補題 Gが有限生成アーベル群である場合,

$$H_0(\mathbf{Z}[G], G) \simeq G$$

が成り立つ。

この補題の証明をキチン等やろうとすると$\mathrm{Im}(\partial_B)_1 \cap G = \{1\}$を示すことが要になると思われる。群とその剰余群については次のような関係がある。

補題 G, Kを群とし，$h : G \to K$を全射準同形写像とする。このときhを$\bar{h} : H_0(\mathbf{Z}[G], G) \to H_0(\mathbf{Z}[K], K)$なる全射準同形に持ち上げることが出来る。

$\kappa : G \to H_0(\mathbf{Z}[G], G)$を$\kappa(g) = g + \mathrm{Im}(\partial_G)_1$で定義するとこれは準同形であり，その核は$G$の可換子部分群を含んでいる。この写像と上の二つの補題を考えて

$$G/G' \to H_0(\mathbf{Z}[G], G) \to H_0(\mathbf{Z}[G/G'], G/G') \simeq G/G'$$

という列を考えると以下のようになる。

命題 Gを有限生成な群とする。このとき

$$H_0(\mathbf{Z}[G], G) \simeq G/G'$$

が成り立つ。

3.3 B等が半群でない場合

R-代数Aの基底Bが半群でない場合は，Bが2章で述べた条件(*)及び補題の条件を満たしているかをチェックするのが難しくなってくる。しかしクイバの世界や群論の世の中を見渡せば，うまく条件を満たしているようなものがゴロゴロとしている。その中で現時点で特に重要と思われる例を2つ挙げ説明する。

・有限群の$\mathbf{Q}$上の指標環
以下、Gを有限群，$\mathrm{Irr}(G)$をGの通常指標全体の集合とする。群Gがアーベル群で

あれば，$\mathrm{Irr}(G)$ は積について閉じており G と同形であるので，先に述べた命題より $H_0(\mathbf{Z}[\mathrm{Irr}(G)], \mathrm{Irr}(G)) \simeq \mathrm{Irr}(G) \simeq G$ となる。しかし，G がアーベル群でない場合は $\mathrm{Irr}(G)$ が２章の補題の条件を満たさないのでこのままではうまくホモロジーを定義することが出来ない。そこで $N = \mathrm{l.c.m}\{\chi(1) | \chi \in \mathrm{Irr}(G)\}$ とおき $R = \mathbf{Z}[\frac{1}{N}]$, $B = \mathrm{NIrr}(G) := \{\frac{\chi}{\chi(1)} | \chi \in \mathrm{Irr}(G)\}$, $A = R[\mathrm{NIrr}(G)]$ とすれば，B の任意個の積の単位元での値が常に 1 であることよりホモロジーを与える諸条件を容易に示すことが出来る。これについて $H_0(A, B)$ は $\pi(G) - \pi(N)$-群であることが示せ, さらに

$$H_0(A \otimes \mathbf{Q}, B) = 0$$

を示すことが出来る。これをまねて群環の中心についても似たような議論が出来る。

・バーンサイド環の場合
有限群 G の有理整数環上のバーンサイド環を $B(G)$ で表すこととし, G の部分群 H に対する $B(G)$ の生成元を $[H]$ で表すことにする。このとき $A = B(G) \otimes \mathbf{Q}$, $B = \{\frac{1}{(G:H)}[H] | H \leq G\}$ とすれば,

$$H_0(A, B) = 0$$

となる。

4　半束（meet-semilattice）の場合

$(L, \wedge)$ を半束とする。このとき，半順序 $\leq$ を $a \leq b$ を $a \wedge b = a$ で定めると $(L, \leq)$ はポセットになる。L の全順序部分集合を単体とみると L の全順序部分集合全体 $O(L)$ は，抽象単体的複体となる。以下，$O(L)$ を抽象単体的複体とみなし，$O(L)_k$ で $O(L)$ の k 次元単体全体を表すことにする。

記号　$s \in L, K \subseteq L$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}(K_{<s})_n := \{b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_n | (b_0 > b_1 > \cdots > b_n) \in O(K_{<s})\}\ (n \geq 0) \\
&s \otimes \mathcal{F}(K_{<s})_n := \{s \otimes b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_n | b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_n \in \mathcal{F}(K_{<s})_n\} \\
&s \otimes \mathcal{F}(K_{<s})_{-1} := \{s\} \\
&D(K_{<s}) := \textstyle\bigcup_{n \geq -1} s \otimes \mathcal{F}(K_{<s})_n
\end{aligned}$$

を表すことにする。また，$\widetilde{H}_*(O(K_{<s}))$ で $O(K_{<s})$ の通常の簡約ホモロジーを表すことにする。

命題　$s \in L, K \subseteq L$ に対して，$D(K_{<s})$ は ∂_L-不変であり,

$$H_n(D(K_{<s})) \simeq \widetilde{H}_{n-1}(O(K_{<s}))\ (n \geq 0)$$

が成り立つ。特に $D(L) = \bigcup_{s \in L} D(L_{<s})$ としたとき，R-加群として

$$H_n(D(L)) \simeq \bigoplus_{s \in L} \widetilde{H}_{n-1}(O(L_{<s}))$$

が成り立つ。

文献

[1] N.Iiyori and M.Sawabe, Representation of path algebaras with applications to subgroup lattices and group characters, to appear in *Tokyu Journal of Mathematics.*

[2] N.Iiyori and M.Sawabe, Simpliecail complexes associated to quivers arising from finite groups, to appear in *Osaka Journal of Mathematics.*

[3] N.Iiyori and M.Sawabe, Hompology of a certain associative algebra, submitted.