

非分離型 2 次元ウェーブレットの構成と 画像処理への応用

Construction of two-dimensional nonseparable wavelets and their applications to image processing

藤ノ木 健介*

東海大学理学部情報数理学科

Kensuke Fujinoki

Department of Mathematical Sciences, Tokai University

概要

非分離型 2 次元ウェーブレットを 2 次元格子に構成する方法を述べる。結晶構造の定式化をもとにした 1 次元ウェーブレットの直接的な一般化を用いて、3 角形格子に 2 次元リフティングを使って一連の双直交ウェーブレットを構成する。画像処理における応用例を紹介し、格子上の直交 Haar ウェーブレットについても触れる。

1 はじめに

非分離型 2 次元ウェーブレット (two-dimensional nonseparable wavelets) [2, 14, 15, 16] とは、1 次元ウェーブレットをテンソル積により 2 次元へと拡張した分離型ウェーブレットとは異なり、本質的な 2 次元ウェーブレットを意味する。通常の離散ウェーブレット変換は、ウェーブレットフィルタと呼ばれるある条件を満たすフィルタの組 $\{h[k], g[k]\}_{k \in \mathbb{Z}}$ を信号に適用することであるが、分離型の方法ではこの (1 次元の) フィルタをもとに 2 次元フィルタを構成する [18]。つまり分離型の 2 次元フィルタは 1 次元の形に分解できるため、構造が簡単で扱いやすいという特長がある。しかし逆にそれが制約となってフィルタの特性が均質的になってしまい、たとえば画像の方向性解析など、2 次元信号特有の状況に応じた複雑な処理には適していないといえる。

非分離型の場合は上のように分離できないため構造はいくらか複雑になるが、望む性質を持ったフィルタを設計することができる。より自由度の高い多様なフィ

*e-mail: fujinoki@tokai-u.jp

ルタを設計できる利点の反面、フィルタ係数が複素数になるなど、その設計はやさしくない。

本稿では1次元ウェーブレットの直接的な一般化を用いた、極めて扱いやすい非分離型2次元ウェーブレットの構成法を紹介する。このアプローチでは、固体物理学における結晶構造の定式化をもとにしており、さまざまな形の2次元格子に応じたウェーブレットの設計が考えられるが、ここでは主に3角形格子の場合に着目した3角形ウェーブレット (triangular wavelet) [20, 10]を扱う。これは、六方対称性 (hexagonal symmetry) をもつため、応用では等方的画像処理を可能とする特長がある。

本稿では主に双直交の場合を想定し、関数系よりもフィルタの性質にフォーカスする。このため、2節ではまず1次元の双直交ウェーブレットフィルタとその周辺の簡単なレビューからはじめる。3節では、リフティング (lifting) [23, 24]を格子上に拡張して、一連の非分離型2次元双直交ウェーブレットを構成する方法を述べ、3角形格子の場合における理論を展開する。また、直交 Haar ウェーブレットの構成法にも触れ、最後に画像処理における応用と展望について述べる。

2 1次元双直交ウェーブレット

2.1 ポリフェーズ表現

解像度 $2^j, j \in \mathbb{Z}$ の数列データ、または信号 $\{c_j[k]\}_{k \in \mathbb{Z}}$ のフーリエ変換を

$$\hat{c}_j(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_j[k] e^{-i\omega k}, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

とし、 $c_j[k]$ を偶数番地 $c_j[2k]$ と奇数番地 $c_j[2k+1]$ からなる独立な成分

$$\hat{c}_{j,e}(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_j[2k] e^{-i\omega k}, \quad \hat{c}_{j,o}(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_j[2k+1] e^{-i\omega k} \quad (2.1)$$

として定義する。同様に信号のフーリエ変換も偶数と奇数にわけると

$$\begin{aligned} \hat{c}_j(\omega) &= \sum_k c_j[k] e^{-i\omega k} = \sum_k c_j[2k] e^{-i\omega 2k} + \sum_k c_j[2k+1] e^{-i\omega(2k+1)} \\ &= \sum_k c_j[2k] e^{-i2\omega k} + e^{-i\omega} \sum_k c_j[2k+1] e^{-i2\omega k} \end{aligned}$$

となり、上の定義から次式を得る。

$$\hat{c}_j(\omega) = \hat{c}_{j,e}(2\omega) + e^{-i\omega} \hat{c}_{j,o}(2\omega) \quad (2.2)$$

これを $\hat{c}_j(\omega)$ のポリフェーズ表現 (polyphase representation) と呼び、この場合は信号を $\hat{c}_{j,e}(\omega)$ と $\hat{c}_{j,o}(\omega)$ の2つのポリフェーズ成分で扱うことになる。 $\hat{c}_j(\omega)$ の周期性を利用して両辺に $\omega \rightarrow \omega + \pi$ を代入し、これらを逆に解けば関係式

$$\hat{c}_{j,e}(2\omega) = \frac{\hat{c}_j(\omega) + \hat{c}_j(\omega + \pi)}{2}, \quad \hat{c}_{j,o}(2\omega) = \frac{\hat{c}_j(\omega) - \hat{c}_j(\omega + \pi)}{2e^{-i\omega}} \quad (2.3)$$

を得る。 $\hat{c}_j(\omega + \pi)$ の項は信号を偶数と奇数にわけた際、つまり2でダウンサンプリングした際に生じるエイリアス成分である。

ウェーブレット変換はポリフェーズ表現を用いて次のように定義される。

$$\begin{pmatrix} \hat{c}_{j-1}(\omega) \\ \hat{d}_{j-1}(\omega) \end{pmatrix} = \widehat{P}(\omega)^\dagger \begin{pmatrix} \hat{c}_{j,e}(\omega) \\ \hat{c}_{j,o}(\omega) \end{pmatrix}$$

ここで、 $\widehat{P}(\omega)^\dagger$ はポリフェーズ行列 $\widehat{P}(\omega)$ のエルミート共役を表す。もともと $\hat{c}_{j,e}(\omega)$ と $\hat{c}_{j,o}(\omega)$ はそれぞれ原信号の半分の長さの成分しか含んでいないことから、この変換は信号 $c_j[k]$ を解像度が半分の近似成分 $c_{j-1}[k]$ と詳細成分 $d_{j-1}[k]$ に分解することを意味する。

ここで、ポリフェーズ行列 $\widehat{P}(\omega)$ はローパスフィルタ $\{h[k]\}_{k \in \mathbb{Z}}$ とハイパスフィルタ $\{g[k]\}_{k \in \mathbb{Z}}$ のポリフェーズ表現から

$$\widehat{P}(\omega) = \begin{pmatrix} \hat{h}_e(\omega) & \hat{g}_e(\omega) \\ \hat{h}_o(\omega) & \hat{g}_o(\omega) \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

と定める。もとの信号を再構成するためには、上記の双対フィルタ (dual filters) $\{\hat{h}[k], \hat{g}[k]\}_{k \in \mathbb{Z}}$ から構成される双対ポリフェーズ行列

$$\widehat{\widehat{P}}(\omega) = \begin{pmatrix} \hat{\hat{h}}_e(\omega) & \hat{\hat{g}}_e(\omega) \\ \hat{\hat{h}}_o(\omega) & \hat{\hat{g}}_o(\omega) \end{pmatrix}$$

を用いて

$$\begin{pmatrix} \hat{c}_{j,e}(\omega) \\ \hat{c}_{j,o}(\omega) \end{pmatrix} = \widehat{\widehat{P}}(\omega) \begin{pmatrix} \hat{c}_{j-1}(\omega) \\ \hat{d}_{j-1}(\omega) \end{pmatrix}$$

とすればよいが、フィルタは完全再構成条件 (perfect reconstruction condition)

$$\widehat{\widehat{P}}(\omega) \widehat{P}(\omega)^\dagger = I \quad (2.5)$$

を満たさなければならない。 I は2次の単位行列である。これは双直交条件としても知られており、関係式 (2.3) を用いて

$$\begin{aligned} \hat{h}^*(\omega) \hat{\hat{h}}(\omega) + \hat{g}^*(\omega) \hat{\hat{g}}(\omega) &= 2 \\ \hat{h}^*(\omega + \pi) \hat{\hat{h}}(\omega) + \hat{g}^*(\omega + \pi) \hat{\hat{g}}(\omega) &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

とも表現できる。 \hat{h}^* は複素数値関数 \hat{h} の複素共役である。 一行目はフィルタ処理からの信号の完全再構成を保証し、 2行目は信号を偶数と奇数にわけ（ダウンサンプリングする）ことにより生じるエイリアス成分をキャンセルする条件である。 この条件を満たすフィルタは通常次のような関係で結ばれている。

$$\hat{g}(\omega) = e^{-i\omega} \hat{h}^*(\omega + \pi), \quad \hat{h}(\omega) = e^{-i\omega} \hat{g}^*(\omega + \pi) \quad (2.7)$$

このような性質を持つフィルタを双直交フィルタ、あるいは完全再構成フィルタと呼び、 $\{h[k-2\ell], g[k-2\ell]\}_{\ell \in \mathbb{Z}}$, および $\{\tilde{h}[k-2\ell], \tilde{g}[k-2\ell]\}_{\ell \in \mathbb{Z}}$ は $\ell^2(\mathbb{Z})$ の双直交基底となることが知られている。 ウェーブレット理論ではスケーリング関数

$$\phi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sqrt{2} h[k] \phi(2t - k), \quad \tilde{\phi}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sqrt{2} \tilde{h}[k] \tilde{\phi}(2t - k),$$

とウェーブレット

$$\psi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sqrt{2} g[k] \phi(2t - k), \quad \tilde{\psi}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sqrt{2} \tilde{g}[k] \tilde{\phi}(2t - k)$$

が各フィルタから生成され、それぞれ伸張方程式 (dilation equation) とウェーブレット方程式 (wavelet equation) で定義される。 これらは $L^2(\mathbb{R})$ の双直交基底となる。

2.2 リフティング

双直交ウェーブレットを作るのに便利なりフティングは次の4ステップで記述できる [25].

1. スプリット (Split) : まずは信号 $c_j[k]$ を偶数番地 $c_{j,e}[k]$ と奇数番地 $c_{j,o}[k]$ にわけて扱う。

$$\begin{aligned} c_{j,e}[k] &:= c_j[2k] \\ c_{j,o}[k] &:= c_j[2k+1] \end{aligned} \quad (2.8)$$

2. 予測 (Predict) : 次に予測作用素 (prediction operator) p により $c_{j,e}[k]$ を用いて $c_{j,o}[k]$ を予測することを考える。 その予測誤差 (prediction error) を詳細成分 $d_{j-1}[k]$ として、 $c_{j,e}[k]$ と置き換える。

$$c_{j,o}[k] \rightarrow d_{j-1}[k] = c_{j,o}[k] - p(c_{j,e})[k]$$

3. アップデート (Update) : アップデート作用素 (update operator) u により予測誤差の結果 $d_{j-1}[k]$ を使って $c_{j,e}[k]$ をスムーズな $c_{j-1}[k]$ として置き換える。

$$c_{j,e}[k] \rightarrow c_{j-1}[k] = c_{j,e}[k] + u(d_{j-1})[k]$$

4. スケーリング (Scaling) : 最後に必要であれば変換前後でエネルギー等が変わらないよう定数 K で正規化する.

$$\begin{aligned}c_{j-1}[k] &= K c_{j-1}[k] \\d_{j-1}[k] &= 1/K d_{j-1}[k]\end{aligned}$$

ここで, 予測を主リフティング (primal lifting), アップデートを双対リフティング (dual lifting) と呼ぶ場合もある (文献により逆の場合もあるので注意). 各リフティングステップは構造上, 逆変換が容易に可能である.

$$\begin{aligned}c_{j,e}[k] &= c_{j-1}[k] - u(d_{j-1})[k] \\c_{j,o}[k] &= d_{j-1}[k] + p(c_{j,e})[k]\end{aligned}$$

リフティングを先ほどのポリフェーズ領域で考えてみよう. まずスプリットという操作は本質的にはポリフェーズ領域で信号を偶数と奇数にわけて扱う (2.1) に他ならないことがすぐにわかる. さらに, リフティングのスケーリング, アップデート, 予測の各ステップは $\widehat{P}(\omega)^\dagger$ を次の形に分解することに対応する [5].

$$\widehat{P}(\omega)^\dagger = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \hat{u}(\omega) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\hat{p}(\omega) & 1 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

たとえば簡単に

$$\hat{p}(\omega) = 1, \quad \hat{u}(\omega) = \frac{1}{2}, \quad K = \sqrt{2}$$

とすれば Haar フィルタ

$$\hat{h}(\omega) = \frac{1 + e^{-i\omega}}{\sqrt{2}}, \quad \hat{g}(\omega) = \frac{-1 + e^{-i\omega}}{\sqrt{2}}$$

が得られる. ここで関係式 (2.2) を使った. Haar フィルタは $h = \tilde{h}$, $g = \tilde{g}$ となる直交フィルタである¹. K はそのままにして線形予測 (linear prediction)

$$\hat{p}(\omega) = \frac{1 + e^{i\omega}}{2}, \quad \hat{u}(\omega) = \frac{1 + e^{-i\omega}}{4}$$

を用いれば, 2 次の双直交ウェーブレットフィルタ

$$\hat{h}(\omega) = \frac{-e^{i2\omega} + 2e^{i\omega} + 6 + 2e^{-i\omega} - e^{-i2\omega}}{4\sqrt{2}}, \quad \hat{g}(\omega) = \frac{-1 + 2e^{-i\omega} - e^{-i2\omega}}{2\sqrt{2}} \quad (2.10)$$

が得られる. これは CDF (2.2) 双直交ウェーブレットフィルタ²[3] と呼ばれ, 双対フィルタ $\hat{h}(\omega), \hat{g}(\omega)$ は (2.9) の逆行列を用いて次のように与えられる.

$$\widehat{P}(\omega) = \widehat{P}(\omega)^{\dagger-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \hat{p}(\omega) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\hat{u}(\omega) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}$$

¹ $K = 1$ とすれば双直交 (非正規形) Haar フィルタが得られる

² (N, \tilde{N}) は g と \tilde{g} の次数 ($\omega = 0$ での零点) を表し, 各ウェーブレットのモーメント消滅個数に対応する. また 5/3 ウェーブレットフィルタと呼ぶ場合もある. この場合は各フィルタ係数の個数を表す.

ポリフェーズ行列のリフティング表現 (2.9) では逆行列が存在することは自明であり、このような形で導かれたフィルタは必ず完全再構成条件 (2.5) を満たす。また、各リフティングステップの行列式は常に 1 であることも明らかである。もともと、(双) 直交ウェーブレットのポリフェーズ行列は $\det \widehat{P}(\omega) = 1$ であることから、リフティングは $\det \widehat{P}(\omega)$ を変えない変換であることがわかる。このことから、予測作用素 \hat{p} とアップデート作用素 \hat{u} を任意に決めることにより、様々な性質を持った完全再構成フィルタを導出できる。三角多項式を選ぶと有限インパルス応答を持つ FIR (finite impulse response) フィルタが得られる。

たとえば、線形予測により得られたフィルタは 2 次の次数を持つが、さらに次数の高い N 次のフィルタはラグランジュ補間 (Lagrange interpolation) [19] をもとに次のように p を決定し、

$$p^N[k] = \frac{(-1)^{k+L-1} \prod_{n=1}^{2L} (L+1/2-n)}{(L-k)!(L-1+k)!(k-1/2)}, \quad L \geq 1, \quad -L < k \leq L \quad (2.11)$$

この結果を u に利用して

$$u^{\tilde{N}}[k] = \frac{\tilde{p}^{\tilde{N}}[k]}{2}, \quad \tilde{N} \leq N$$

と定めることで算出できる。なお $\tilde{p}[k] = p[-k]$, $N = 2L$ である。このラグランジュ補間をもとにしたリフティングの予測 (2.11) を補間予測 (interpolating prediction) と呼ぶこととする。この方式から得られるフィルタは N 次の Deslauriers–Dubuc フィルタ [6, 7] と呼ばれ、 $\hat{h}(\omega)$ はハーフバンド条件 (halfband condition)

$$\hat{h}(\omega) + \hat{h}(\omega + \pi) = 1 \quad (2.12)$$

を満たすラグランジュハーフバンドフィルタ (Lagrange halfband filter) [1] と等価となる。さらに、

$$\hat{h}(\omega) = \hat{h}(-\omega) \quad (2.13)$$

となる対称性も持っており、関連するスケーリング関数 $\tilde{\phi}(t)$ は $N-1$ 次の多項式を復元する補間スケーリング関数 (interpolating scaling function) である。

補間予測 (2.11) において任意の補間次数 L を選べば、(2.12) と (2.13) を満たす $2N$ 次の補間フィルタを設計することができる。たとえば $N = \tilde{N} = 4$ のときは

$$\hat{p}^4(\omega) = \frac{-e^{i\omega} + 9 + 9e^{-i\omega} - e^{i2\omega}}{16}$$

として、以下を得る。

$$\hat{h}(\omega) = \frac{348 + 144e^{\pm i\omega} - 63e^{\pm i2\omega} - 16e^{\pm i3\omega} + 18e^{\pm i4\omega} - e^{\pm i6\omega}}{256}$$

$$\hat{g}(\omega) = \frac{e^{i\omega} - 9 + e^{-i\omega} - 9e^{-i2\omega} + e^{-i4\omega}}{16}$$

なお $N = \tilde{N} = 2$ の場合は CDF(2,2) フィルタ (2.10) に帰着する。

3 非分離型2次元ウェーブレット

3.1 ブラベー格子

固体物理学では、一部の結晶は3つの基本並進ベクトル (primitive translation vectors) により生成されるブラベー格子 (Bravais lattice) として分類される [13]. これは、結晶構造を系統的に記述する優れた方法として知られている. この方法を利用して格子空間内に非分離型3次元ウェーブレット [17] を構成することができるが、ここではこの結晶構造の定式化を2次元信号に応用することを考える.

まず2つの基本並進ベクトル $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^2$ を定義する. これらは線形独立ではあるが、互いに直交する必要はない. ブラベー格子 Λ は基本並進ベクトルの線形結合により次のように生成される.

$$\Lambda = \{t = n_1 t_1 + n_2 t_2 \mid (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2\}$$

ふつうの2次元格子は $t_1 = (1 \ 0)^T, t_2 = (0 \ 1)^T$ としたときであり、一般的なデジタル画像は格子上の各点 $t \in \Lambda$ に画素値が与えられていると考えればよい. 画像のピクセルに相当するのは、ウィグナーザイツ胞 (Wigner-Seitz cell)³ と呼ばれる領域で、これが平面を埋め尽くす.

ブラベー格子には逆格子 (reciprocal lattice) が存在する. 2つの逆格子ベクトル (reciprocal lattice vectors) λ_1, λ_2 を

$$\lambda_k \cdot t_k = 0, \quad k = 1, 2 \quad (3.1)$$

となるように定めると、逆格子は次のように与えられる.

$$\tilde{\Lambda} = \{2\pi(\lambda = m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2) \mid (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2\}$$

ブラベー格子 Λ 上に定義される信号 $\{c_j[t]\}_{t \in \Lambda}$ のフーリエ変換を

$$\hat{c}_j(\omega) = \sum_{t \in \Lambda} c_j[t] e^{-i\omega \cdot t}, \quad \omega \in \mathbb{R}^2$$

で定めると、 $\hat{c}_j(\omega)$ は

$$\hat{c}_j(\omega) = \hat{c}_j(\omega + 2\pi\lambda), \quad \lambda \in \tilde{\Lambda}$$

の二重周期構造を持つ. 逆格子はブラベー格子のフーリエ領域に対応しており、ブリルアンゾーン \mathcal{B} (Brillouin zone) と呼ばれる領域が定義される. これはフィルタの基本領域となり、ナイキスト周波数 (1次元の場合の区間 $[-\pi, \pi]$) に対応している. 特に、 $\omega = \pi$ に相当する点は $\omega = \pi\lambda_1, \pi\lambda_2$ であり、二重周期性のため2つあることに注意しよう.

³文献によってはボロノイセル (Voronoi Cell) と呼ぶ場合もある.

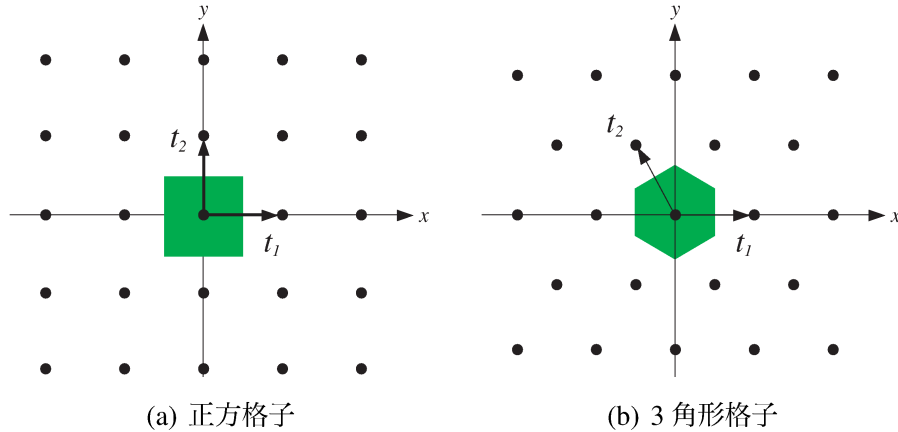


図 1: ブラベー格子 Λ , 基本並進ベクトル t_1, t_2 , ウィグナーザイツ胞.

いま基本並進ベクトルを

$$t_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

と定義すると, 図 1 のような 3 角形ブラベー格子が生成される. この 3 角形格子 Λ の場合のウィグナーザイツ胞は 6 角形の領域となる.

逆格子ベクトルは

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

とする. したがってブリルアンゾーンも 6 角形の領域である (図 2 を参照). ここで $t_3 = -t_1 - t_2$, $\lambda_3 = \lambda_1 - \lambda_2$ とすれば格子上でのポリフェーズ表現を考える上で後に便利なのがわかる. また $t_0 = \lambda_0 = \mathbf{0}$ であり,

$$e^{-i\pi n \lambda_i \cdot t_j} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ (-1)^n, & i \neq j, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (3.3)$$

である.

3.2 格子上でのポリフェーズ表現

以下では, 3 角形ブラベー格子において 1 次元ウェーブレットの直接的な一般化について述べる. まず, ブラベー格子 Λ は 4 つの独立な部分格子 (sublattices) $\Lambda_m, m = 0, 1, 2, 3$ に分解することができる.

$$\Lambda = \sum_{m=0}^3 \Lambda_m, \quad \Lambda_m = \{2t + t_m \mid t \in \Lambda\} \quad (3.4)$$

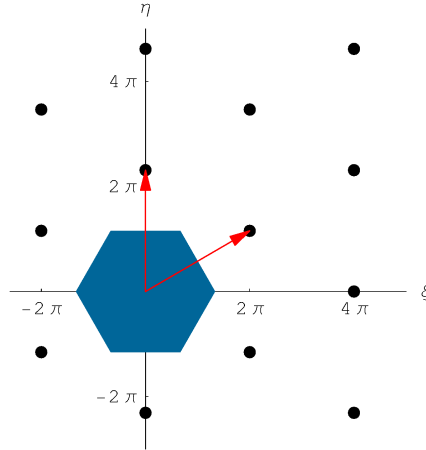


図 2: 図 1(b) の $\omega = (\xi, \eta)$ 空間における逆格子 $\tilde{\Lambda}$, 逆格子ベクトル $2\pi\lambda_1, 2\pi\lambda_2$, ブリルアンゾーン.

逆格子についても同様である.

$$\widehat{\Lambda} = \sum_{m=0}^3 \widehat{\Lambda}_m, \quad \widehat{\Lambda}_m = \{2\pi(2\lambda + \lambda_m) \mid 2\pi\lambda \in \widehat{\Lambda}\} \quad (3.5)$$

各部分格子におけるすべての格子点を集めれば, もとの格子が復元される. これはブラベー格子のポリフェーズ分解に他ならない. つまり, 部分格子の各格子点の選択には 4 つの組み合わせ

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= \{2t + \mathbf{0} \mid t \in \Lambda\}, & (\text{even, even}) \\ \Lambda_1 &= \{2t + t_1 \mid t \in \Lambda\}, & (\text{even, odd}) \\ \Lambda_2 &= \{2t + t_2 \mid t \in \Lambda\}, & (\text{odd, even}) \\ \Lambda_3 &= \{2t + t_3 \mid t \in \Lambda\}, & (\text{odd, odd}) \end{aligned} \quad (3.6)$$

が考えられる.

この事情に関連して, 信号 $\{c_j[t]\}_{t \in \Lambda}$ は各部分格子 Λ_m 上の独立な点として

$$\hat{c}_{m,j}(\omega) = \sum_{t \in \Lambda} c_j[2t + t_m] e^{-i\omega \cdot t}, \quad m = 0, 1, 2, 3 \quad (3.7)$$

のようにフーリエ領域において 4 つのポリフェーズ成分で表される. これは (2.1) の一般化であり, 1次元では信号を偶数と奇数にわけて扱うことに相当する. した

がって $\{c_j[t]\}_{t \in \Lambda}$ のフーリエ変換も 4 つにわけること、ポリフェーズ表現は

$$\begin{aligned}
 \hat{c}_j(\omega) &= \sum_{t \in \Lambda} c_j[t] e^{-i\omega \cdot t} = \sum_{m=0}^3 \sum_{t \in \Lambda_m} c_j[t] e^{-i\omega \cdot t} \\
 &= \sum_{m=0}^3 \sum_{t \in \Lambda} c_j[2t + t_m] e^{-i\omega \cdot (2t + t_m)} \\
 &= \sum_{m=0}^3 e^{-i\omega \cdot t_m} \sum_{t \in \Lambda} c_j[2t + t_m] e^{-i2\omega \cdot t} \\
 &= \sum_{m=0}^3 e^{-i\omega \cdot t_m} \hat{c}_{m,j}(2\omega)
 \end{aligned}$$

で与えられる。 $\hat{c}_j(\omega)$ が $2\pi\lambda$ 周期であることから、1次元の場合に倣って上の式に $\omega \rightarrow \omega + \pi\lambda_k$, $k = 1, 2, 3$ を代入すると

$$\hat{c}_j(\omega + \pi\lambda_k) = \sum_{m=0}^3 e^{-i(\omega + \pi\lambda_k) \cdot t_m} \hat{c}_{m,j}(2\omega)$$

を得る。行列形では

$$\begin{pmatrix} \hat{c}_j(\omega) \\ \hat{c}_j(\omega + \pi\lambda_1) \\ \hat{c}_j(\omega + \pi\lambda_2) \\ \hat{c}_j(\omega + \pi\lambda_3) \end{pmatrix} = \widehat{U}(\omega) \begin{pmatrix} \hat{c}_{0,j}(2\omega) \\ \hat{c}_{1,j}(2\omega) \\ \hat{c}_{2,j}(2\omega) \\ \hat{c}_{3,j}(2\omega) \end{pmatrix}, \quad \widehat{U}(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & e^{-i\omega \cdot t_1} & e^{-i\omega \cdot t_2} & e^{-i\omega \cdot t_3} \\ 1 & e^{-i\omega \cdot t_1} & -e^{-i\omega \cdot t_2} & -e^{-i\omega \cdot t_3} \\ 1 & -e^{-i\omega \cdot t_1} & e^{-i\omega \cdot t_2} & -e^{-i\omega \cdot t_3} \\ 1 & -e^{-i\omega \cdot t_1} & -e^{-i\omega \cdot t_2} & e^{-i\omega \cdot t_3} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

となるから

$$\begin{pmatrix} \hat{c}_{0,j}(2\omega) \\ \hat{c}_{1,j}(2\omega) \\ \hat{c}_{2,j}(2\omega) \\ \hat{c}_{3,j}(2\omega) \end{pmatrix} = \widehat{U}(\omega)^{-1} \begin{pmatrix} \hat{c}_j(\omega) \\ \hat{c}_j(\omega + \pi\lambda_1) \\ \hat{c}_j(\omega + \pi\lambda_2) \\ \hat{c}_j(\omega + \pi\lambda_3) \end{pmatrix}$$

という関係が導かれる。位相因子からなる行列 $\widehat{U}(\omega)$ の計算には関係式 (3.3) を使った。

3.3 格子上でのウェーブレット変換

ブラベー格子での部分格子 Λ_m の組み合わせ (3.6) に倣えば、信号 $\{c_j[t]\}_{t \in \Lambda}$ は偶数成分 $\hat{c}_{0,j}$ と 3 つの奇数成分 $\hat{c}_{k,j}$, $k = 1, 2, 3$ として独立に表現できる。そこで、信

号を対応する各成分にわけ，ブラベー格子 Λ 上でのウェーブレット変換は

$$\begin{pmatrix} \hat{c}_{j-1}(\omega) \\ \hat{d}_{1,j-1}(\omega) \\ \hat{d}_{2,j-1}(\omega) \\ \hat{d}_{3,j-1}(\omega) \end{pmatrix} = \widehat{P}(\omega)^\dagger \begin{pmatrix} \hat{c}_{0,j}(\omega) \\ \hat{c}_{1,j}(\omega) \\ \hat{c}_{2,j}(\omega) \\ \hat{c}_{3,j}(\omega) \end{pmatrix}$$

で与えられるとする。これより，信号 $c_j[t]$ は解像度が半分の近似成分 $c_{j-1}[t]$ と 3 つの詳細成分 $d_{k,j-1}[t]$, $k=1,2,3$ に分解されるが，この分解には 4 つの独立なフィルタの組が必要であることが示唆されている。ここでポリフェーズ行列 $\widehat{P}(\omega)^\dagger$ は (2.4) を一般化して，ポリフェーズ形式のローパスフィルタ $\hat{h}_m(\omega)$, $m=0,1,2,3$ と 3 つの独立なハイパスフィルタ $\hat{g}_{k,m}(\omega)$ から

$$\widehat{P}(\omega) = \begin{pmatrix} \hat{h}_0(\omega) & \hat{g}_{1,0}(\omega) & \hat{g}_{2,0}(\omega) & \hat{g}_{3,0}(\omega) \\ \hat{h}_1(\omega) & \hat{g}_{1,1}(\omega) & \hat{g}_{2,1}(\omega) & \hat{g}_{3,1}(\omega) \\ \hat{h}_2(\omega) & \hat{g}_{1,2}(\omega) & \hat{g}_{2,2}(\omega) & \hat{g}_{3,2}(\omega) \\ \hat{h}_3(\omega) & \hat{g}_{1,3}(\omega) & \hat{g}_{2,3}(\omega) & \hat{g}_{3,3}(\omega) \end{pmatrix}$$

と構成される。ここで

$$\begin{aligned} \hat{h}_m(\omega) &= \sum_{t \in \Lambda} h[2t + t_m] e^{-i\omega t}, \\ \hat{g}_{k,m}(\omega) &= \sum_{t \in \Lambda} g_k[2t + t_m] e^{-i\omega t}, \quad m=0,1,2,3 \end{aligned}$$

である。

逆変換は同様に構成された双対ポリフェーズ行列 $\widehat{\widehat{P}}(\omega)$ を使って

$$\begin{pmatrix} \hat{c}_{0,j}(\omega) \\ \hat{c}_{1,j}(\omega) \\ \hat{c}_{2,j}(\omega) \\ \hat{c}_{3,j}(\omega) \end{pmatrix} = \widehat{\widehat{P}}(\omega) \begin{pmatrix} \hat{c}_{j-1}(\omega) \\ \hat{d}_{1,j-1}(\omega) \\ \hat{d}_{2,j-1}(\omega) \\ \hat{d}_{3,j-1}(\omega) \end{pmatrix}$$

と定められ，完全再構成条件は

$$\widehat{\widehat{P}}(\omega) \widehat{P}(\omega)^\dagger = I \quad (3.9)$$

と一般化される。 I は 4 次の単位行列である。この条件より，双直交条件 (2.6) も

2次元に拡張することができる。

$$\begin{aligned}
\hat{h}(\omega)\hat{h}^*(\omega) + \sum_{k=1}^3 \hat{g}_k(\omega)\hat{g}_k^*(\omega) &= 4 \\
\hat{h}(\omega)\hat{h}^*(\omega + \pi\lambda_1) + \sum_{k=1}^3 \hat{g}_k(\omega)\hat{g}_k^*(\omega + \pi\lambda_1) &= 0 \\
\hat{h}(\omega)\hat{h}^*(\omega + \pi\lambda_2) + \sum_{k=1}^3 \hat{g}_k(\omega)\hat{g}_k^*(\omega + \pi\lambda_2) &= 0 \\
\hat{h}(\omega)\hat{h}^*(\omega + \pi\lambda_3) + \sum_{k=1}^3 \hat{g}_k(\omega)\hat{g}_k^*(\omega + \pi\lambda_3) &= 0
\end{aligned} \tag{3.10}$$

3.4 2次元リフティング

1次元の場合に倣って、リフティングを2次元に拡張すれば、 $\widehat{P}(\omega)^\dagger$ は

$$\widehat{P}(\omega)^\dagger = \begin{pmatrix} K & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{K} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{K} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \hat{u}_1(\omega) & \hat{u}_2(\omega) & \hat{u}_3(\omega) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\hat{p}_1(\omega) & 1 & 0 & 0 \\ -\hat{p}_2(\omega) & 0 & 1 & 0 \\ -\hat{p}_3(\omega) & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

と分解できる。直接的な一般化を用いているため、各行列の行列式は1のままであり、どのような三角多項式 \hat{p}_k と \hat{u}_k , $k=1,2,3$ を設定しても $\widehat{P}(\omega)^{\dagger^{-1}}$ が存在することは明らかである。各行列のブラベ-格子における意味、つまりは格子上におけるリフティングは次のように解釈することができる。

まず、 $c_j[t]$ のポリフェーズ分解で観測したように、格子上に与えられた信号 $c_j[t]$ は偶数成分 $c_j[2t]$ と3つの奇数成分 $c_j[2t + t_k]$ に分割できることから、スプリットを

$$\begin{aligned}
c_{0,j}[t] &:= c_j[2t] \\
c_{k,j}[t] &:= c_j[2t + t_k], \quad k=1,2,3
\end{aligned}$$

と定める。予測誤差 $d_{k,j-1}[t]$ の計算は3つの奇数成分 $c_{k,j}[t]$ に対してそれぞれ行われ、偶数成分 $c_{0,j}[t]$ に予測作用素 p_k を適用することで

$$c_{k,j}[t] \rightarrow d_{k,j-1}[t] = c_{k,j}[t] - p_k(c_{0,j})[t], \quad k=1,2,3 \tag{3.12}$$

と表される。ここで、予測作用素 p_k が3つあることに注意しよう。次にこの結果を用いて $c_{0,j}[t]$ は $c_{j-1}[t]$ へとアップデートされる。

$$c_{0,j}[t] \rightarrow c_{j-1}[t] = c_{0,j}[t] + \sum_{k=1}^3 u_k(d_{k,j-1})[t] \tag{3.13}$$

最後に必要であれば正規化を行う。この変換を任意のレベル J まで繰り返せば、次のような階層構造を有する展開係数が得られる。

$$c_j[\mathbf{t}] \rightarrow \{d_{k,j-1}[\mathbf{t}], d_{k,j-2}[\mathbf{t}], \dots, d_{k,J}[\mathbf{t}], c_J[\mathbf{t}]\}, \quad k = 1, 2, 3$$

なお

$$\widehat{P}(\omega)^\dagger \rightarrow \widehat{P}(\omega)^\dagger \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

とする Twist リフティング [9] もあるが、以下では通常の (3.11) を使って双直交フィルタを構成する。Twist 型を用いれば 3 角形直交 Haar フィルタが得られるが、その詳しい導出過程は付録を参照されたい。

3.5 3 角形双直交ウェーブレット

3 角形格子 Λ に定義される最も簡単な非分離型ウェーブレットフィルタは 3 角形双直交 Haar フィルタ [20] と呼ばれ、2次元リフティング (3.11) において

$$\hat{p}_k(\omega) = 1, \quad \hat{u}_k(\omega) = \frac{1}{4}, \quad K = 2, \quad k = 1, 2, 3$$

としたとき関係式 (3.8) を使って

$$\begin{aligned} \hat{h}(\omega) &= \frac{1 + e^{-i\omega \cdot t_1} + e^{-i\omega \cdot t_2} + e^{-i\omega \cdot t_3}}{2} \\ \hat{g}_k(\omega) &= \frac{-1 + e^{-i\omega \cdot t_k}}{2}, \quad k = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (3.14)$$

で与えられる。

図3にブリルアンゾーン内における $|\hat{h}(\omega)|$ の特性を示す。双対フィルタ $\hat{h}(\omega), \hat{g}_k(\omega)$ は 1次元の場合と同様に、式 (3.11) の性質から $\widehat{P}(\omega) = \widehat{P}(\omega)^{\dagger^{-1}}$ とすることで算出でき、これらのフィルタは完全再構成条件 (3.9) を満足する。

この条件を満たす 3 角形格子上の完全再構成フィルタは他にもいくつかあるが [4, 21, 22], いずれも数値計算を用いて構成している。3 角形ウェーブレットは一般化されたリフティングスキームを用いて構成される。実際、補間予測をもとにした p_k の決定方法も直接的に一般化でき、(2.11) に $k \rightarrow \ell, \ell \in \mathbb{Z}$ を代入して

$$p_k^N[\ell t_k] = p^N[\ell], \quad k = 1, 2, 3 \quad (3.15)$$

と定めれば、これをもとに u_k を

$$u_k^{\widetilde{N}}[\mathbf{t}] = \frac{\widetilde{p}_k^{\widetilde{N}}[\mathbf{t}]}{4}, \quad \widetilde{N} \leq N, \quad k = 1, 2, 3 \quad (3.16)$$

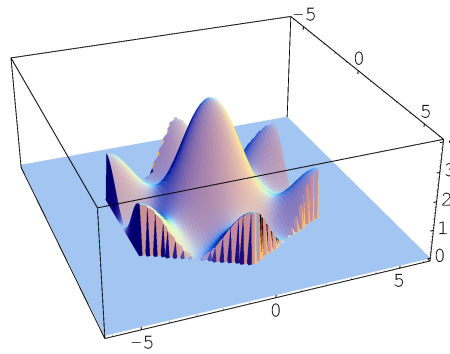


図3: ブリルアンゾーンにおける3角形双直交 Haar フィルタの周波数特性 $(|\hat{h}(\omega)|^2)$.

とすることで任意の次数の (N, \bar{N}) 双直交フィルタが算出できる [10].

$N = \bar{N} = 2$ のときの線形予測の場合は

$$\hat{p}_k^2(\omega) = \frac{1 + e^{i\omega \cdot t_k}}{2}, \quad \hat{u}_k^2(\omega) = \frac{1 + e^{-i\omega \cdot t_k}}{8}, \quad k = 1, 2, 3$$

となり, 2次の3角形双直交フィルタ

$$\begin{aligned} \hat{h}(\omega) &= \frac{1}{8} (10 + 2e^{\pm i\omega \cdot t_1} - e^{\pm i2\omega \cdot t_1} + 2e^{\pm i\omega \cdot t_2} - e^{\pm i2\omega \cdot t_2} + 2e^{\pm i\omega \cdot t_3} - e^{\pm i2\omega \cdot t_3}) \\ \hat{g}_k(\omega) &= \frac{1}{4} (-1 + 2e^{-i\omega \cdot t_k} - e^{-i2\omega \cdot t_k}), \quad k = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

が得られる. これは (2.10) の CDF(2,2) フィルタの一般化である. 双対フィルタ \hat{h} は一般化されたハーフバンド条件

$$\hat{h}(\omega) + \sum_{k=1}^3 \hat{h}(\omega + \pi\lambda_k) = 2 \quad (3.17)$$

を満たす格子上に定義されるラグランジュハーフバンドフィルタである.

ここで, 3角形双直交フィルタの性質について考察する. 図4に Haar と線形予測フィルタの逆格子における密度プロットを示す. 図3に示したローパスフィルタの六方対称性がより明らかになっていることが確認できる. なお Haar の場合は $\hat{h} = \hat{h}$ となることに注意しよう. この対称性により, ローパスフィルタ $\hat{h}(\omega), \hat{h}(\omega)$ は各逆格子ベクトル $\lambda_m, m = 1, 2, 3$ の方向において同じ構造を持っていることが予想される. 実際, 等式 (3.17) において各 $\omega\lambda_m$ 方向における1次元特性を見れば, $\hat{h}(\omega)$ は

$$\hat{h}(\omega\lambda_k) + \hat{h}(\omega\lambda_m + \pi\lambda_m) = 2, \quad k, m = 1, 2, 3$$

というハーフバンド特性を有していることがわかる. さらに, 双直交条件 (3.10) より

$$\hat{h}^*(\omega\lambda_k)\hat{h}(\omega\lambda_k) + \hat{h}^*(\omega\lambda_m + \pi\lambda_m)\hat{h}(\omega\lambda_m + \pi\lambda_m) = 4$$

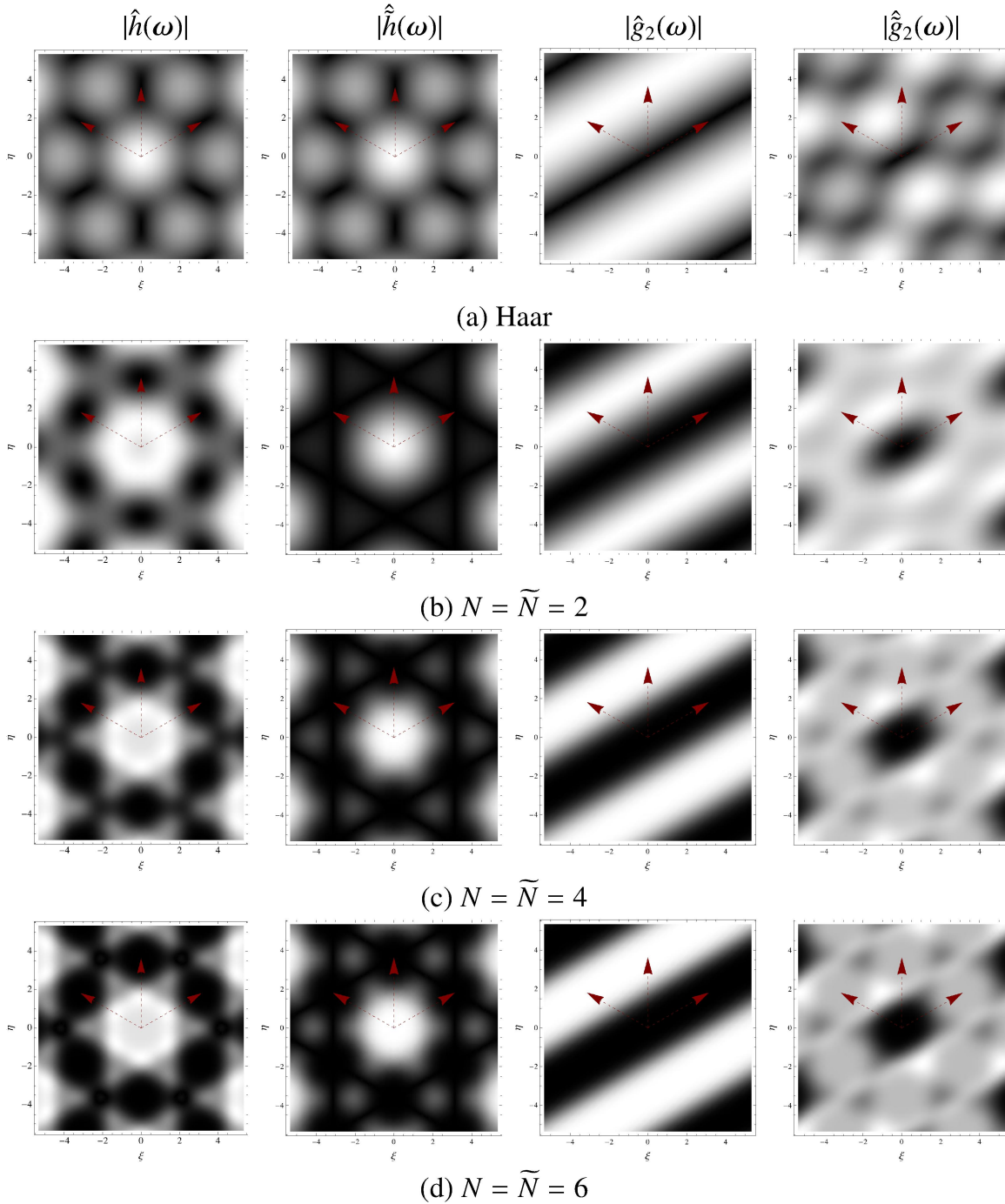


図 4: 3 角形双直交ウェーブレットフィルタの周波数特性と $\pi\lambda_m, m = 1, 2, 3$.

表 1: 3 角形双直交ウェーブレットフィルタの零点

	\hat{h}	\hat{g}_1	\hat{g}_2	\hat{g}_3	$\hat{\tilde{h}}$	$\hat{\tilde{g}}_1$	$\hat{\tilde{g}}_2$	$\hat{\tilde{g}}_3$
$\omega = \pi\lambda_1$	\tilde{N}	0	N	N	N	N	\tilde{N}	\tilde{N}
$\omega = \pi\lambda_2$	\tilde{N}	N	0	N	N	\tilde{N}	N	\tilde{N}
$\omega = \pi\lambda_3$	\tilde{N}	N	N	0	N	\tilde{N}	\tilde{N}	N

が成り立つ。興味深いことに、 $\hat{h}(\omega\lambda_m)$ と $\hat{\tilde{h}}(\omega\lambda_m)$ の特性は 1 次元のそれと等価となっている。 $\hat{g}_k(\omega\lambda_m)$ と $\hat{\tilde{g}}_k(\omega\lambda_m)$, $k \neq m$ についても正規化は異なるが同様のことがいえる。つまりハイパスフィルタにおいても、 λ_m 方向に対する 1 次元特性を用いて、式 (2.7) のような関係式が成り立つ。

$$\hat{g}_k(\omega\lambda_m) = \begin{cases} 0, & k = m \\ \frac{1}{2} e^{-i\omega t_k \lambda_m} \hat{h}(\omega\lambda_m + \pi\lambda_m), & k \neq m \end{cases}$$

$$\hat{\tilde{g}}_k(\omega\lambda_m) = \begin{cases} \hat{\tilde{h}}(\omega\lambda_m + \pi\lambda_m), & k = m \\ e^{-i\omega t_k \lambda_m} \hat{h}(\omega\lambda_m + \pi\lambda_m), & k \neq m \end{cases}$$

図 4 ではハイパスフィルタは $k = 2$ のみ描いているが、 \hat{g}_1 と \hat{g}_3 は逆格子において \hat{g}_2 を $\pm 2\pi/3$ だけ回転することにより得ることができる。ハイパスフィルタ $\hat{g}_k(\omega\lambda_m)$, $\hat{\tilde{g}}_k(\omega\lambda_m)$, $m = 1, 2, 3$ はそれぞれ $\omega = 0$ において (N, \tilde{N}) 個の零点をもつ。同様に、 $\hat{h}(\omega\lambda_m)$ と $\hat{\tilde{h}}(\omega\lambda_m)$ はエイリアスポイントに対応する $\omega = \pi\lambda_m$, つまり $\omega = \pi$ において (N, \tilde{N}) 個の零点をもつ。この事情をまとめると各フィルタの零点は表 1 のようになる。

次にスケーリング関数とウェーブレットの性質についても観察してみよう。図 5 に Haar のスケーリング関数

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{t} \in \Lambda} 2 h[\mathbf{t}] \phi(2\mathbf{r} - \mathbf{t}), \quad \tilde{\phi}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{t} \in \Lambda} 2 \tilde{h}[\mathbf{t}] \tilde{\phi}(2\mathbf{r} - \mathbf{t})$$

とウェーブレット

$$\psi_k(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{t} \in \Lambda} 2 g_k[\mathbf{t}] \phi(2\mathbf{r} - \mathbf{t}), \quad \tilde{\psi}_k(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{t} \in \Lambda} 2 \tilde{g}_k[\mathbf{t}] \tilde{\phi}(2\mathbf{r} - \mathbf{t}), \quad k = 1, 2, 3$$

を示す。図 4 と同様に、Haar の場合は $\phi = \tilde{\phi}$ となる。ここで、 $\phi = \tilde{\phi}$ の場合は白が 1 で黒が 0 の値を表し、他の ψ_k , $\tilde{\psi}_k$ については白が 1, グレーが 0, 黒が -1 となっている。

図より、スケーリング関数 $\phi, \tilde{\phi}$ とウェーブレット $\psi_k, \tilde{\psi}_k$ のすべてにおいてフラクタルな形状が確認できる。これは 1 次元の場合と同様の Haar の不連続性から生じ

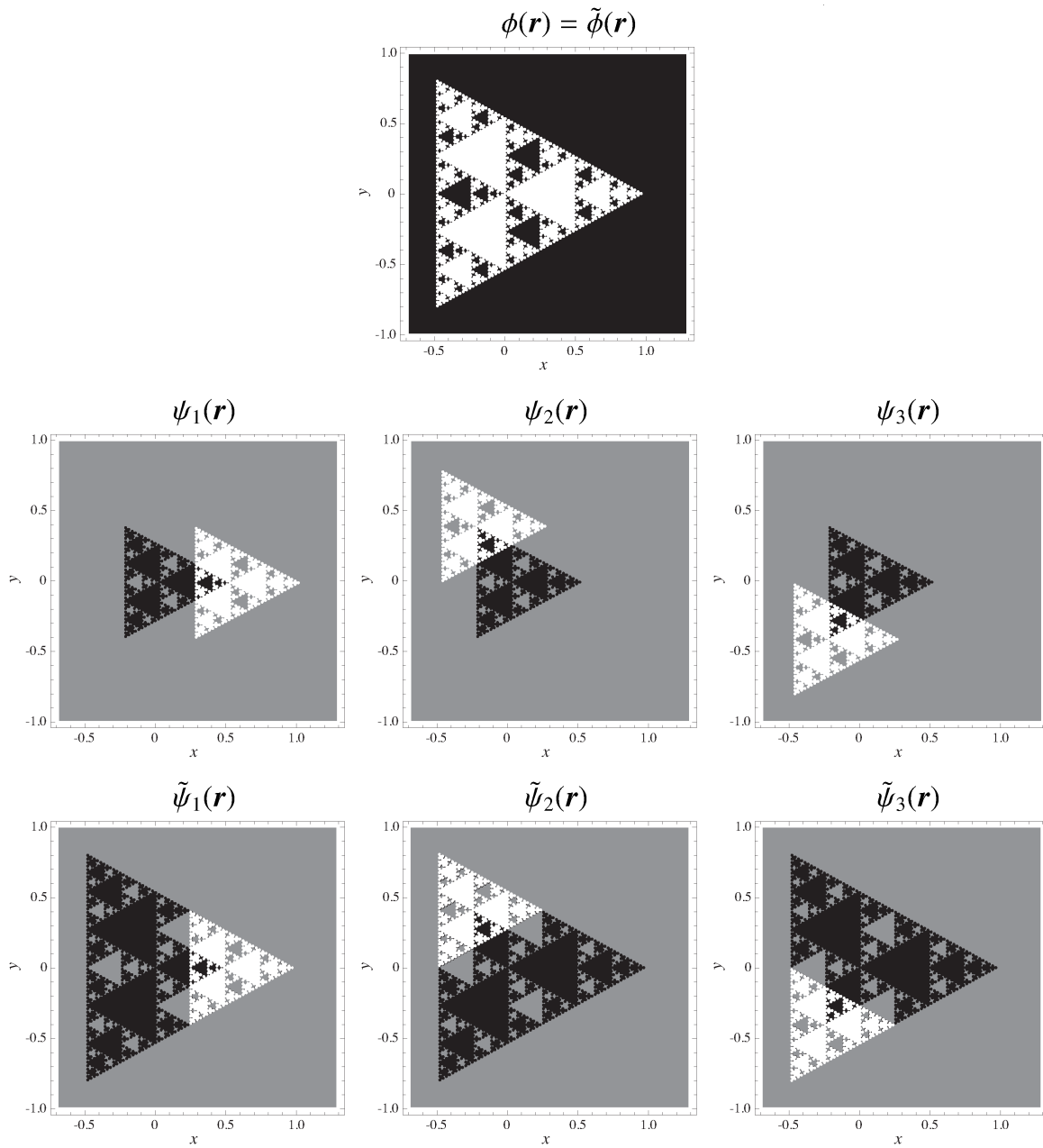


図 5: 3 角形双直交 Haar ウェーブレット.

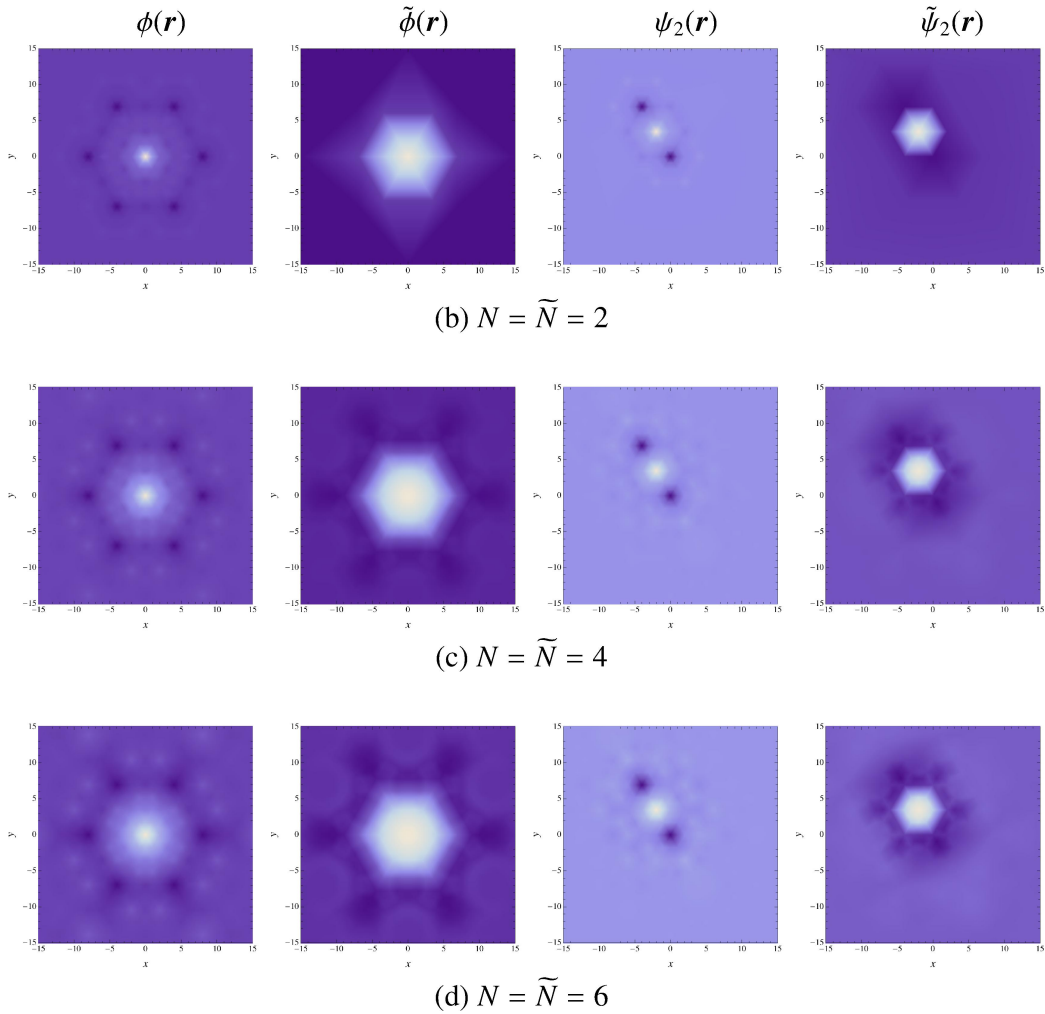


図 6: 3 角形双直交ウェーブレット.

るものと考えられるが、この構造はシェルピンスキーのギャスケット (Sierpinski gasket) のそれと酷似していることがわかる。文献 [12] では同様の性質を持つグラフが \mathbb{R}^2 の self-similar tilings として、正方格子の場合において描かれている。図 6 に補間フィルタをもとにした場合の $\{\phi, \psi_2, \tilde{\phi}, \tilde{\psi}_2\}$ を示すが、次数が上がると、このフラクタル性は見られなくなる。さらにはサポートも広がり、六角形を基本領域とした特性をもつことが確認できる。

4 まとめと画像処理への応用

本論文で紹介した格子上的ウェーブレット変換の手順をまとめると、以下のようになる。

1. 基本並進ベクトル t_1, t_2 を決め、ブラベー格子 Λ を構成する
2. ブラベー格子 Λ の部分格子への分解 (3.4) が成り立つように t_3 を定める。
3. 2次元リフティングにおける予測作用素 p_k とアップデート作用素 u_k を各 $t_k, k = 1, 2, 3$ 方向に設定する。
4. 予測 (3.12) とその結果を使ったアップデート (3.13) を用いて詳細成分 (予測誤差) $d_{k,j-1}[t]$ と近似成分 $c_{j-1}[t]$ を計算する。
5. $c_{j-1}[t]$ を新たな信号として上の変換を任意のレベルまで繰り返す。

手順3.における各作用素の設定には、ポリフェーズ行列の分解形 (3.11) の構造から明らかなように、どのようなものを用いても完全再構成フィルタが得られるが、ラグランジュの補間法に基づき p_k を補間予測 (3.15) で定め、 u_k を (3.16) のように設定すると任意の次数 N の補間フィルタが得られる。

また p_k を設計することは、格子上的各 t_k 方向に対する指向性を持ったハイパスフィルタ $g_k[t]$ を (3.8) によって構成することと等価となる。このため、この構成法では、解析対象である信号の方向特性に応じた t_k を定義し、そこから生成される任意の格子において p_k を設計できる自由度があるといえる。本稿では3角形格子 Λ において 120° 毎に配置された各 t_k 方向に p_k をそれぞれ等しく設計しているため、等方的なフィルタ $g_k[t], \tilde{g}_k[t]$ および詳細成分 $d_{k,j}[t]$ を得ることが可能となる。なおこの選択は図4に示したように $h[t], \tilde{h}[t]$ には六方対称性を与える。

こうして得られた3角形ウェーブレットフィルタは、画像の等方性を保ったエッジ検出、特徴量抽出、非線形近似 [10] や、キーポイント解析 [8] などへと応用することができるが、ここでは基本となる等方的な画像分解を紹介する。図7は画像を $\{c_j[t]\}_{t \in \Lambda}, j = 9$ とし、従来のテンソル形式による Haar ウェーブレットを用いた画像分解と、3角形 Haar ウェーブレットのそれとを比較した結果である。分解画像は、左上から時計回りの順に $c_8[t], d_{1,8}[t], d_{3,8}[t], d_{2,8}[t]$ が配置されている。なお、3角形ウェーブレットを標準画像に適用するには画像をブラベー格子 Λ 上の点としてリサンプルする必要があるが、ここでは簡単のため、画像のピクセルがあらかじめ格子点に対応していると仮定する。

図より、 $d_{k,j}$ は t_k 方向 (横・縦・斜) の詳細成分であることから、各方向のエッジ成分が均一に得られていることがわかる。よって、3角形ウェーブレットは従来のテンソル形式の方法よりも高い等方性をもつといえる。この特性を利用すれば、例えば図8のように、 $c_8[t] = \mathbf{0}$ と置いて詳細成分 $d_{k,8}[t], k = 1, 2, 3$ からのみ画像を再構成したエッジ抽出において、優位な結果を得ることができる。

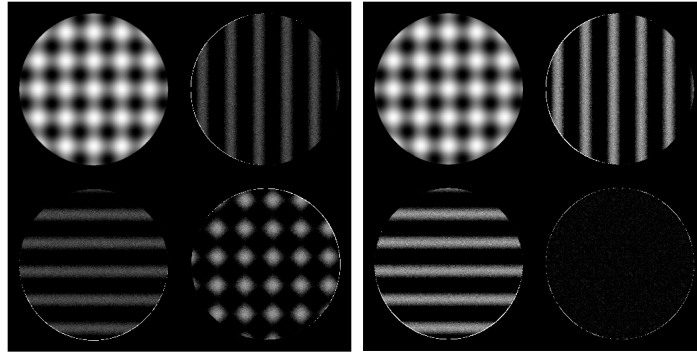


図 7: 3 角形 Haar (左) とテンソル Haar (右) による画像分解例.

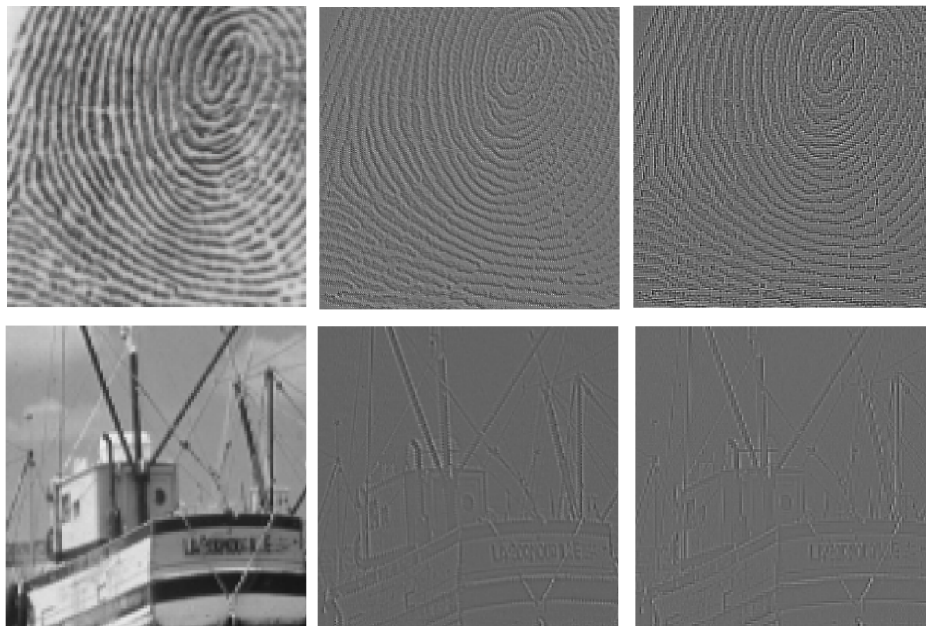


図 8: 詳細成分からのエッジ抽出結果. 原画像 (左), 3 角形 Haar (中央), テンソル Haar (右).

付録 3 角形直交 Haar ウェーブレット

以下では 1 次元における直交ウェーブレットの直接的な一般化により, 3 角形ブラベー格子上に非分離型 2 次元直交 Haar ウェーブレットを構成する. リフティングを拡張する直感的な方法 [9] もあるが, ここでは 3 角形格子 Λ に定義される正規直交スケーリング関数 $\phi(\mathbf{r}) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ の性質を調べることから始める.

まず, スケーリング関数が満たす伸張方程式を

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{t} \in \Lambda} 2h[\mathbf{t}] \phi(2\mathbf{r} - \mathbf{t}), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \quad (\text{A.1})$$

とする。フーリエ領域では

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{1}{2} \hat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (\text{A.2})$$

である。あるいは、1次元の場合に倣って、ローパスフィルタ $\{h[t]\}_{t \in \Lambda}$ のフーリエ変換を用いて

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2} \hat{h}\left(\frac{\omega}{2^j}\right)$$

と表現できる。なお

$$\hat{\phi}(\mathbf{0}) = \iint_{\mathbb{R}^2} \phi(\mathbf{r}) d^2 \mathbf{r} = 1$$

であると仮定する。このとき、スケーリング関数 $\phi(\mathbf{r})$ の正規直交条件は

$$\begin{aligned} \langle \phi | \phi(\cdot - \mathbf{t}) \rangle &= \iint_{\mathbb{R}^2} \phi^*(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r} - \mathbf{t}) d^2 \mathbf{r} \\ &= \frac{1}{|\Delta(T)|(2\pi)^2} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-i\omega \cdot \mathbf{t}} |\hat{\phi}(\omega)|^2 d^2 \omega \\ &= \delta[\mathbf{t}] \end{aligned}$$

で与えられる。ここで、

$$\delta[\mathbf{t}] = \begin{cases} 1, & \mathbf{t} = \mathbf{0} \\ 0, & \mathbf{t} \neq \mathbf{0} \end{cases}$$

は Kronecker のデルタである。また、 $\Delta(T)$ は $T = (t_1 \ t_2)$ における行列式の値であり、 $|\Delta(T)|(2\pi)^2$ はブリルアンゾーン \mathcal{B} の領域の面積を表している。1次元では区間 2π に対応する。ふつうの正方格子 ($t_1 = (1 \ 0)^T$, $t_2 = (0 \ 1)^T$) では $|\Delta(T)| = 1$ であることに注意しよう。

この直交条件は、ブリルアンゾーン \mathcal{B} の周期的なタイリングにより $\omega \in \mathbb{R}^2$ 平面を分割し、 $e^{-i\omega \cdot \mathbf{t}}$ の周期性を利用して

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\Delta(T)|(2\pi)^2} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-i\omega \cdot \mathbf{t}} |\hat{\phi}(\omega)|^2 d^2 \omega &= \frac{1}{|\Delta(T)|(2\pi)^2} \sum_{2\pi\lambda \in \tilde{\Lambda}} \iint_{\mathcal{B}} e^{-i(\omega+2\pi\lambda) \cdot \mathbf{t}} |\hat{\phi}(\omega+2\pi\lambda)|^2 d^2 \omega \\ &= \frac{1}{|\Delta(T)|(2\pi)^2} \iint_{\mathcal{B}} e^{-i\omega \cdot \mathbf{t}} \sum_{2\pi\lambda \in \tilde{\Lambda}} |\hat{\phi}(\omega+2\pi\lambda)|^2 d^2 \omega \\ &= \frac{1}{|\Delta(T)|(2\pi)^2} \iint_{\mathcal{B}} e^{-i\omega \cdot \mathbf{t}} d^2 \omega \end{aligned}$$

と展開できる。したがって、 ϕ の直交性に関する次の等式を得る。

$$\sum_{2\pi\lambda \in \tilde{\Lambda}} |\hat{\phi}(\omega+2\pi\lambda)|^2 = 1 \quad (\text{A.3})$$

ここで、さらに伸張方程式 (A.2) とブラベー格子 $\widehat{\Lambda}$ のポリフェーズ分解 (3.5) を適用すれば

$$\begin{aligned}
& \sum_{2\pi\lambda \in \widehat{\Lambda}} \iint_{\mathcal{B}} e^{-i\omega t} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi\lambda)|^2 d^2\omega \\
&= \frac{1}{|\Delta(T)|(2\pi)^2} \sum_{2\pi\lambda \in \widehat{\Lambda}} \iint_{\mathcal{B}} e^{-i\omega t} \frac{1}{4} \left| \hat{h}\left(\frac{\omega + 2\pi\lambda}{2}\right) \right|^2 \left| \hat{\phi}\left(\frac{\omega + 2\pi\lambda}{2}\right) \right|^2 d^2\omega \\
&= \frac{1}{|\Delta(T)|(2\pi)^2} \sum_{m=0}^3 \sum_{2\pi\lambda \in \widehat{\Lambda}_m} \iint_{\mathcal{B}} e^{-i\omega t} \frac{1}{4} \left| \hat{h}\left(\frac{\omega + 2\pi\lambda}{2}\right) \right|^2 \left| \hat{\phi}\left(\frac{\omega + 2\pi\lambda}{2}\right) \right|^2 d^2\omega \\
&= \frac{1}{|\Delta(T)|(2\pi)^2} \sum_{m=0}^3 \sum_{2\pi\lambda \in \widehat{\Lambda}} \iint_{\mathcal{B}} e^{-i\omega t} \frac{1}{4} \left| \hat{h}\left(\frac{\omega + 2\pi(2\lambda + \lambda_m)}{2}\right) \right|^2 \left| \hat{\phi}\left(\frac{\omega + 2\pi(2\lambda + \lambda_m)}{2}\right) \right|^2 d^2\omega \\
&= \frac{1}{|\Delta(T)|(2\pi)^2} \iint_{\mathcal{B}} e^{-i\omega t} \sum_{m=0}^3 \frac{1}{4} \left| \hat{h}\left(\frac{\omega}{2} + \pi\lambda_m\right) \right|^2 d^2\omega
\end{aligned}$$

となるから

$$|\hat{h}(\omega)|^2 + \sum_{k=1}^3 |\hat{h}(\omega + \pi\lambda_k)|^2 = 4 \quad (\text{A.4})$$

が得られる。これは、逆格子において一般化された直交ハーフバンド条件であり、 $\omega \in \mathbb{R}^2$ 空間は $|\hat{h}(\omega)|^2$ とその平行移動 $\omega \rightarrow \omega + \pi\lambda_k$ によって隙間なく埋め尽くされることを意味する。ブラベー格子における上の等式は

$$\sum_{t \in \Lambda} h^*[t] h[t + 2s] = \delta[s], \quad s \in \Lambda$$

と表現できるが、これより

$$\sum_{t \in \Lambda} |h[t]|^2 = 1$$

が成り立ち、伸張方程式 (A.1) よりフィルタの総和則 (sum rule)

$$\hat{h}(\mathbf{0}) = \sum_{t \in \Lambda} h[t] = 2$$

が導かれる。またハーフバンド条件 (A.4) によりエイリアスポイントでは

$$\hat{h}(\pi\lambda_1) = \hat{h}(\pi\lambda_2) = 0$$

となっていることがわかる。

以上の観察より、ブラベー格子における直交ウェーブレットフィルタを導くためには、 $|\hat{h}(\mathbf{0})|^2 = 4$ であつ $\hat{h}(\pi\lambda_k) = 0, k = 1, 2$ となるローパスフィルタ \hat{h} を探すと

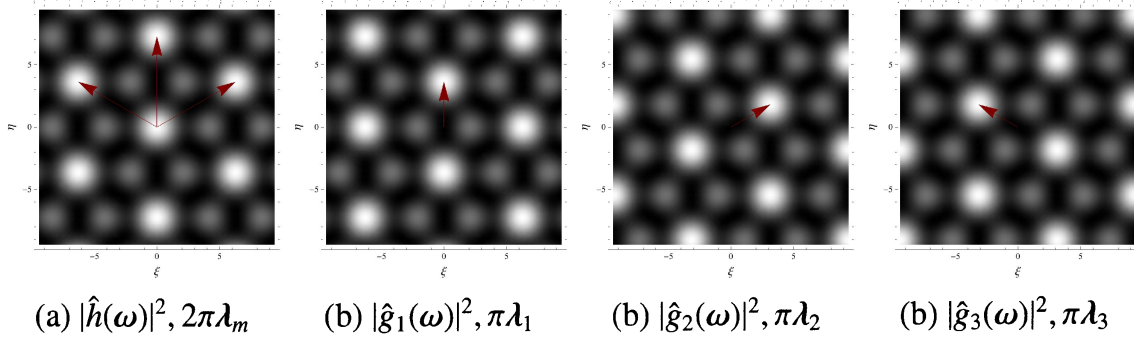


図9: 逆格子における3角形直交 Haar フィルタの周波数特性.

いう問題になる. 3つのハイパスフィルタ $\hat{g}_k, k = 1, 2, 3$ はハーフバンド条件 (A.4) より, $\hat{h}(\omega)$ をもとに

$$\hat{g}_k(\omega) = -\hat{h}(\omega + \pi\lambda_k), \quad k = 1, 2, 3 \quad (\text{A.5})$$

とすることで得られる.

最も簡単な解は

$$h[t_0] = h[t_1] = h[t_2] = h[t_3] = \frac{1}{2} \quad (\text{A.6})$$

としたときで, そのフーリエ変換は

$$\hat{h}(\omega) = \frac{1 + e^{-i\omega t_1} + e^{-i\omega t_2} + e^{-i\omega t_3}}{2} \quad (\text{A.7})$$

である. これを3角形直交 Haar フィルタと呼ぶが, \hat{h} のフィルタ係数は双直交 Haar フィルタ (3.14) のそれと全く同じである. しかし, \hat{g}_k に関しては, (A.5) を使って全く異なるフィルタが導かれる. まとめると, 3角形直交 Haar フィルタは

$$\begin{pmatrix} \hat{h}(\omega) \\ \hat{g}_1(\omega) \\ \hat{g}_2(\omega) \\ \hat{g}_3(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{h}(\omega) \\ \hat{g}_1(\omega) \\ \hat{g}_2(\omega) \\ \hat{g}_3(\omega) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-i\omega t_1} \\ e^{-i\omega t_2} \\ e^{-i\omega t_3} \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

で与えられることになる. この ± 1 からなる係数行列は, 各行と列が互いに直交する形になっており, 4次のアダマール行列 (Hadamard matrix) [11] に等しい. 各フィルタの非ゼロ要素は格子において t_k 方向に対称的に配置されることから, すべてのフィルタが六方対称性を有することがわかる (図9). また, $\hat{g}_k(\omega)$ は $\hat{h}(\omega)$ をもとに $\omega \rightarrow \pi\lambda_k$ だけ各逆格子ベクトルの方向にシフトした形になっている.

関連するウェーブレットを図10に示す. 双直交の場合よりもサポートが広がっていることがわかるが, Haar の不連続性から生じるフラクタルな形には変わらない.

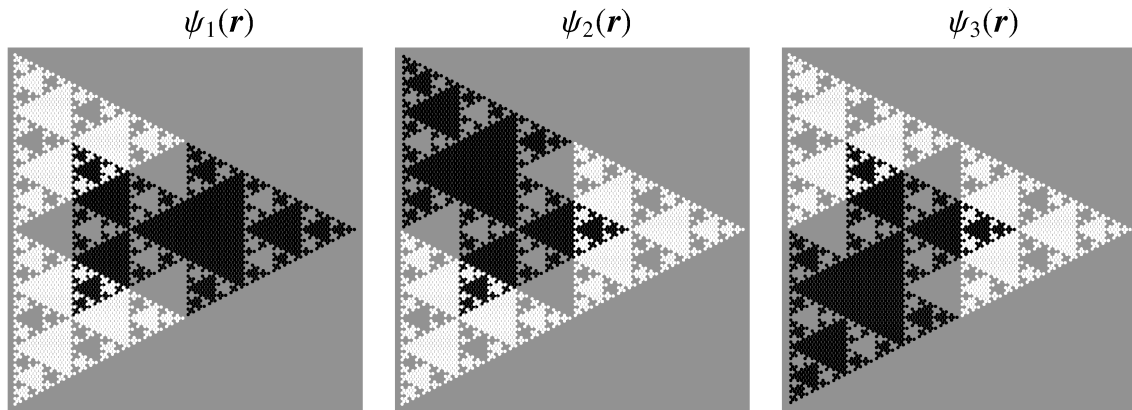


図 10: 3 角形直交 Haar ウェーブレット

謝辞

本研究は元東京電機大学教授の榊原進先生との共同研究に基づきます。本論文をまとめるにあたり、改めて先生の功績が大きいことを実感しました。この場をお借りして感謝の意を表します。また、今回の講演と講究録を書く機会を与えてくださった、大阪教育大学の芦野隆一教授と京都大学の山田道夫教授に深く感謝いたします。

参考文献

- [1] R. Ansari, C. Guillemot, and J. F. Kaiser, Wavelet construction using Lagrange halfband filters, *IEEE Trans. Circuits Syst.* **38** (1991) 1116–1118.
- [2] A. Cohen, I. Daubechies, Non-separable bidimensional wavelet bases, *Revista Matematica Iberoamericana*, Vol. 9, No. 1, pp. 51–137, 1993.
- [3] A. Cohen, I. Daubechies, and J. Feauveau, Bi-orthogonal bases of compactly supported wavelets, *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. 45, pp. 486–560, 1992.
- [4] A. Cohen and J. M. Schlenker, Compactly supported wavelets with hexagonal symmetry, *Construct. Approx.*, Vol. 9, pp. 209–236, 1993.
- [5] I. Daubechies and W. Sweldens, Factoring wavelet transforms into lifting steps, *J. Fourier Anal. Appl.*, Vol. 4, No. 3, pp. 247–269, 1998.
- [6] G. Deslauriers and S. Dubuc, Symmetric iterative interpolation processes, *Construct. Approx.*, Vol. 5, pp. 49–68, 1989.

- [7] S. Dubuc, Interpolation through an iterative scheme, *J. Math. Anal. Applicat.*, Vol. 114, pp. 185–204, 1986.
- [8] K. Fujinoki, Multiscale Keypoint Analysis with Triangular Biorthogonal Wavelets Via Redundant Lifting, EUSIPCO 2014, September 2014 (To appear).
- [9] K. Fujinoki and S. Ishimitsu, Triangular Biorthogonal Wavelets with Extended Lifting, *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*, Vol. 11, No. 4, pp. 1–24, July 2013.
- [10] K. Fujinoki and O. V. Vasilyev, Triangular Wavelets: An Isotropic Image Representation with Hexagonal Symmetry, *EURASIP Journal on Image and Video Processing*, No. 248581, 16 pages, 2009.
- [11] A. V. Geramita and J. Seberry, *Orthogonal Designs: Quadratic Forms and Hadamard Matrices*, New York: M. Dekker, 1979.
- [12] K. Gröchenig and W. R. Madych, Multiresolution analysis, Haar bases, and self-similar tilings of \mathbb{R}^n , *IEEE Trans. Information Theory*, Vol. 38, No. 2, pp. 556–568, 1992.
- [13] G. Grosso and G. P. Parravicini, *Solid State Physics*, Elsevier Academic Press, 2000.
- [14] H. Kawabata, H. Toda, Z. Zhang and H. Fujiwara, A new complex wavelet transform by using RI-spline wavelet, *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol. 2, pp. 937–940, 2004.
- [15] N. Kingsbury, The dual-tree complex wavelet transform: a new technique for shift invariance and directional filters, *Proc. 8th IEEE DSP Workshop*, Paper No. 86, 1998.
- [16] J. Kovačević and M. Vetterli, Nonseparable multidimensional perfect reconstruction filter banks and wavelet bases for \mathbb{R}^n , *IEEE Trans. Information Theory*, Vol. 38, No. 2, pp. 533–555, 1992.
- [17] 遠藤 智子, 坂本直道, 安野拓也, 武川直樹, 結晶構造の分析に適用可能な三次元ウェーブレットの構築, *電子情報通信学会論文誌 A*, Vol. J92-A, No. 8, pp. 540–550, 2009.
- [18] S. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, 3rd ed., Academic Press, 2008.
- [19] M. J. D. Powell, *Approximation theory and methods*, Cambridge University Press, 1981.

- [20] S. Sakakibara and Oleg V. Vasilyev, Construction of triangular biorthogonal wavelet filters for isotropic image processing, Proceedings of European Signal Processing Conference (EUSIPCO 2006), Florence, Italy, September, 2006
- [21] E. P. Simonchelli and E. H. Adelson, Non-separable extensions of quadrature mirror filters in multiple dimensions, *Proc. IEEE*, Vol. 78, No.4, pp. 652–664, 1990.
- [22] E. P. Simonchelli, W. T. Freeman, E. H. Adelson and D. J. Heeger, Shiftable Multiscale Transform, *IEEE Trans. Information Theory*, Vol. 38, No.2, pp. 587–607, 1992.
- [23] W. Sweldens, The lifting scheme: a custom-design construction of biorthogonal wavelets, *J. Appl. Comput. Harmon. Anal.*, Vol. 3, No. 2, pp. 186–200, 1996.
- [24] W. Sweldens, The lifting scheme: a construction of second generation wavelets, *SIAM J. Math. Analysis*, Vol. 29, No. 2, pp. 511–546, 1997.
- [25] W. Sweldens and P. Schröder, Building your own wavelets at home, ACM SIGGRAPH course notes, 1996.