数理解析研究所講究録
第 1928 巻 2014 年 58-62

ウェーブレット理論を応用した微分方程式の数値解析

福田 尚広 *
* 筑波大学大学院 数理物質科学研究科 博士後期課程

概要. 数値解析は多くの工学分野において重要な役割を果たす．その際，近似の精度，解析にかかる時間などが問題となる．本講演では，ウェーブレット理論の微分方程式の数値解析への応用について紹介し，その有効性について議論する．

An application of wavelet theory to numerical analysis of differential equations

Naohiro Fukuda*
*Institute of Mathematics, University of Tsukuba

Abstract. Numerical analysis plays an important role in several fields of engineering. In this talk, we introduce an application of wavelet theory to numerical analysis of differential equations, and discuss its effectiveness.

1. はじめに

数値解析は電気・機会・情報など種々の工学分野で応用され，計算機の処理能力の向上と共に日々発展している．特に，微分方程式を離散問題に帰着し，その近似解を得るための方法であるガレルキン法・有限要素法は，微分方程式の数値解法として非常に強力な道具である．例として，常微分方程式の境界値問題

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2}{dx^2}u + u = f, \quad 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

を考える．この問題に対応する弱形式は $\langle u, v\rangle_{L^2(0,1)} + \left\langle \frac{d}{dx}u, \frac{d}{dx}v\right\rangle_{L^2(0,1)} = \langle f, v\rangle_{L^2(0,1)}$ である．v をテスト関数という．

関数 φ に対して，$\varphi_{j,k}(x) = \varphi(2^j x - k)$ とおく．φ を基底関数と呼ぶ．(1.1) の近似解 $\tilde{u}$ のうち，$\tilde{u} = \sum_{k=0}^{N} u_k \varphi_{j,k}$ なる形のものを求めたい．そのために，テスト関数として $\varphi_{j,k}$ $(k = 0, 1, \cdots, N)$ を順次適用し，得られた連立方程式を解いて係数 u_k を求める．ここで，N は φ に依存して決まる自然数である．具体的には，

$$MU = F$$

を解く．ここで，係数行列 M の (k,ℓ) 成分は $\langle \varphi'_{j,k}, \varphi'_{j,\ell} \rangle_{L^2(0,1)} + \langle \varphi_{j,k}, \varphi_{j,\ell} \rangle_{L^2(0,1)}$ で与えられる．また，$F = {}^t\{\langle f, \varphi_{j,k} \rangle_{L^2(0,1)}\}_k$ は f とテスト関数の内積から決まる列ベクトルであり，$U = {}^t\{u_k\}_k$ は求めたい係数からなる未知の列ベクトルである．この方程式を解く (M の逆行列を求める) ことで近似解を得る方法をガレルキン法といい，特に，基底・テスト関数として区分的多項式（ハット関数など）を用いるガレルキン法を有限要素法という．

2. 正規直交スケーリング関数の利用

基底関数 φ を次のようにとる:

$$\varphi(x) = \mathcal{E} * \Phi(x). \tag{2.1}$$

ここで Φ は正規直交スケーリング関数であり，$\mathcal{E}$ はエレベーターと呼ばれる関数である．ガレルキン法の基底関数にはコンパクトサポートを持つ関数が一般に用いられる．そのような基底関数で，2 次の B スプライン N_2 より滑らかなものを構成するために，Φ として，コンパクトサポートを持つ Daubechies のスケーリング関数 [1] を用いる:

$$\varphi_2^D(x) = N_1 * \Phi_2^D(x). \tag{2.2}$$

ここで，Φ_2^D は 2 次の Daubechies スケーリング関数，N_1 は 1 次の B スプライン (Haar のスケーリング関数) である．φ_2^D について，次が成立する：

定理 1 ([6]) $c_{k,\ell} = \langle \varphi_2^D(\cdot - k), \varphi_2^D(\cdot - \ell) \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$, $a_{k,\ell} = -\left\langle \frac{d}{dx}\varphi_2^D(\cdot - k), \frac{d}{dx}\varphi_2^D(\cdot - \ell) \right\rangle_{L^2(\mathbb{R})}$ とする．このとき，

$$c_{k,\ell} = \begin{cases} 131/180 & \text{if } k = \ell, \\ 37/240 & \text{if } k = \ell \pm 1, \\ -11/600 & \text{if } k = \ell \pm 2, \\ 1/3600 & \text{if } k = \ell \pm 3. \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

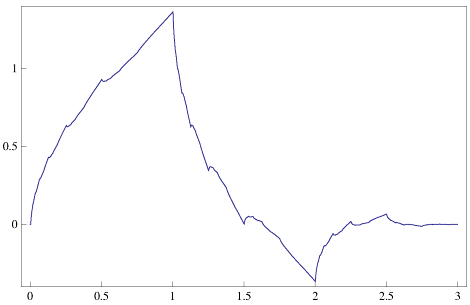
及び

$$a_{k,\ell} = \begin{cases} -2 & \text{if } k = \ell, \\ 1 & \text{if } k = \ell \pm 1, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

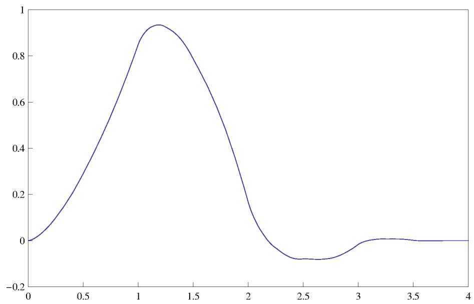
が成り立つ．

3. 双直交スケーリング関数の利用

ガレルキン法の基底関数とテスト関数は，同一の関数のシフトを用いるのが一般的であるが，異なる関数を基底関数，テスト関数に用いる（これを重み付き残差法という）こと



(a) Φ_2^D



(b) $\varphi_2^D = N_1 * \Phi_2^D$

Fig. 1. Daubechies スケーリング関数 Φ_2^D とその N_1 による elevation φ_2^D

で，双直交スケーリング関数 $\phi, \tilde{\phi}$ のガレルキン法への適用を考えることができる．特に，2 次の Deslauriers–Dubuc スケーリング関数 φ_2^{DD} [2–5] と 2 次の B スプライン N_2 に対して次が成立する：

定理 2 ([7]) $c_{k,\ell} = \langle \varphi_2^{DD}(\cdot - k), N_2(\cdot - \ell)\rangle_{L^2(\mathbb{R})}$, $a_{k,\ell} = -\left\langle \frac{d}{dx}\varphi_2^{DD}(\cdot - k), \frac{d}{dx}N_2(\cdot - \ell)\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})}$ とする．このとき，

$$c_{k,\ell} = \begin{cases} 131/180 & \text{if } k = \ell, \\ 37/240 & \text{if } k = \ell \pm 1, \\ -11/600 & \text{if } k = \ell \pm 2, \\ 1/3600 & \text{if } k = \ell \pm 3. \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

及び

$$a_{k,\ell} = \begin{cases} -2 & \text{if } k = \ell, \\ 1 & \text{if } k = \ell \pm 1, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成り立つ．

注意 1 定理 2 において，$c_{k,\ell}$ の値は，定理 1 のそれに一致している．実は，Deslauriers–Dubuc 関数と Daubechies スケーリング関数との間には，関係式

$$\varphi_2^{DD}(x) = \int_{\mathbb{R}} \Phi_2^D(t)\Phi_2^D(t-x)dt$$

が成り立つ [8]．この関係式から両者が一致することを証明できる．

定理 1, 2 から，基底関数とテスト関数として φ_2^D を用いた場合と，φ_2^{DD} を基底関数，N_2 をテスト関数とした場合で，係数行列は一致することが分かる．更に，後者の場合は，N_2 をテスト関数に採用していることより列ベクトル F の計算が簡単になり，より高速での処理が実現できる．

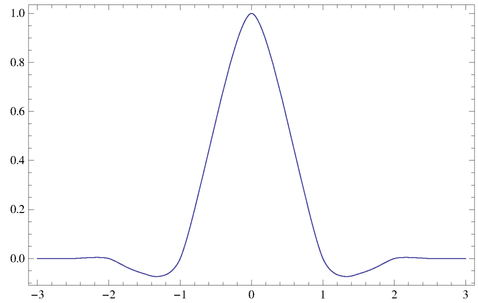


Fig. 2. Deslauriers–Dubuc スケーリング関数 φ_2^{DD}

4. おわりに

上述の定理を用いることにより，ウェーブレット理論を応用した近似解の構成が可能となる．得られる近似解の精度，解析に必要となる時間など，詳しくは講演時に紹介する．

謝辞 本研究集会にて講演の機会を与えて下さった大阪教育大学の芦野隆一先生に深く感謝致します．本講演の内容は，筑波大学の木下保先生及び久保隆徹先生との共同研究に基づきます．

参考文献

[1] I. Daubechies, Ten lectures on wavelets, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, 61, SIAM, Philadelphia, PA, 1992.

[2] G. Deslauriers and S. Dubuc. Symmetric iterative interpolation processes, Constructive approximation, **5** (1989), 49–68.

[3] D. L. Donoho, Smooth wavelet decomposition with blocky coefficient kernels, Recent Advances in Wavelet Analysis, (L. Schumaker and F. Ward, eds.), Academic Press, 1993.

[4] D. L. Donoho and Thomas P. Y. Yu, Deslauriers-Dubuc: ten years after, CRM Proc. Lecture Notes, Amer. Math. Soc., Providence, RI, **18** (1999), 355–370.

[5] S. Dubuc, Interpolation through an iterative scheme, J. Math. Anal. Appl. **114** (1986), 185-204.

[6] N. Fukuda, T. Kinoshita and T. Kubo, On the Galerkin-wavelet method for higher order differential equations, Bulletin of the Korean Mathematical Society, **50** (2013), No. 3, 963–982.

[7] N. Fukuda, On the wavelet-Galerkin method with Deslauriers–Dubuc interpolating scaling functions, to appear in Tsukuba Journal of Mathematics.

[8] N. Saito and G. Beylkin, Multiresolution representations using the auto-correlation functions of compactly supported wavelets, IEEE Trans. Signal Processing, **41** (1993), 3584–3590.

福田 尚広 (筑波大学大学院 数理物質科学研究科 博士後期課程)
〒305-8571 茨城県つくば市天王台 1-1-1 筑波大学大学院 数理物質科学研究科 数学専攻
E-mail: `naohiro-f@math.tsukuba.ac.jp`