

Visible actions on spherical nilpotent orbits *

東海大学・理学部・数学科 笹木 集夢
Atsumu SASAKI
Department of Mathematics,
Tokai University[†]

1 導入

リー群 H が連結な複素多様体 M に正則に作用しているとする。この作用が可視的であるとは¹, M の実部分多様体 S と M 上の反正則微分同相写像 σ で以下の条件を満たすときをいう:

$$S \text{ の各点を通る } H\text{-軌道全体は } M \text{ に一致する, すなわち, } M = H \cdot S, \quad (\text{V.1})$$

$$\sigma \text{ は } S \text{ 上恒等的である,} \quad (\text{S.1})$$

$$\sigma \text{ は各 } H\text{-軌道を保存する, すなわち, } \sigma(x) \in H \cdot x \quad (\forall x \in M). \quad (\text{S.2})$$

可視的作用における S をスライスとよぶ。スライス S は全実部分多様体になる。つまり, $T_x S \cap J_x(T_x S) = \{0\}$ が任意の $x \in S$ で成り立つ。ここで, J は M の複素構造を表す。

複素多様体における可視的作用の概念は, 有限次元に限らない無限次元も含む表現に対して「重複のない」という性質に統一的な説明を与える, という理論において本質的な役割を果たす。その際に, 各軌道と交叉するスライスを求めることの重要性は, 可視的作用の概念のみならず表現の既約分解に現れる最高ウェイトのなす集合との関係がいくつかの場合に明らかになってきている。ここで, 重複のない表現とは, 表現をそれ以上分解できない単位, いわゆる既約表現に分解したとき, 各既約成分が高々1個しか現れないときをいう。

例えば, 簡約リー群のカルタン分解, あるいは簡約リー群の対称対に対するカルタン分解により対称空間に対する群作用による軌道分解を理解することができる。このことにより, エルミート対称空間や複素対称空間に対する可視的作用が示される ([8, 9] 参照)。これらの空間上の正則関数全体のなす空間に自然に定義される表現は, 「重複のない」というよい性質を備えていることが知られている。

対称空間の枠組みから外れたとき, 群作用による各軌道を把握することは容易ではない。一方で, その上の関数空間に自然に定まる表現が「重複のない」という性質を備えているとき, 可視的作用におけるスライスの視点により各軌道の様子が捉えられる可能性があるだけでなく, これにより対称空間を含む美しい分解定理が抽出できるものと期待される。

* 京都大学数理解析研究所研究集会「群作用と部分多様体論の展開」(研究代表者: 酒井高司氏, 京都大学数理解析研究所, 2014年6月25日-27日)における講究録。

[†]E-mail: atsumu@tokai-u.jp

¹この定義は, [8, Definition 3.3.1] に従うと強可視的であるというのが, 本講究録では一貫して可視的であると呼ぶこととする。

本講究録では、複素多様体として複素単純リー環の冪零軌道を扱い、可視的に作用するための必要十分条件を与える。さらに、可視的に作用するとき各軌道と交叉するスライスの構成法に焦点を絞って解説する。よって、本講究録では証明の詳細は割愛させていただく(論文[17]を参照)。

まず、本講究録を通して用いる設定を述べる。 \mathfrak{g} を有限次元複素単純リー環とし、 G を \mathfrak{g} の随伴群とする。複素単純リー群 G はリー環 \mathfrak{g} に随伴表現 $\text{Ad}(g)X$ として作用するが、これを単に $g \cdot X$ と表すこととする($g \in G, X \in \mathfrak{g}$)。リー環の元 $X \in \mathfrak{g}$ を通る G -軌道を $\mathcal{O}_X = G \cdot X$ で表す。このとき、 \mathcal{O}_X は複素等質空間 G/G_X と表され、 G から誘導される複素構造をもつ。 X が冪零元であるとき(つまり、 \mathfrak{g} 上の線型変換 $\text{ad}(X)$ が冪零変換であるとき) \mathcal{O}_X を冪零軌道という。

以上の設定の下で、 G のコンパクト実型(極大コンパクト部分群) K の冪零軌道 \mathcal{O}_X への作用を考える。

定理 1.1. 冪零軌道 \mathcal{O}_X における K の作用が可視的であるための必要十分条件は、 \mathcal{O}_X が spherical であるときである。

ここで、冪零軌道 \mathcal{O}_X が spherical であるとは、 G のボレル部分群 B の作用による開軌道が存在することをいう。Vinberg [19]により、 \mathcal{O}_X 上の正則関数全体のなす空間は、 K の表現として重複のない表現であることが知られている²。

2 準備

定理 1.1 を考察する際に、冪零軌道に関する一般論を用いると証明の見通しがよくなる。本章では、冪零軌道に関する一般を証明なしで概説する。

2.1 冪零軌道の高さ

0でない冪零元 X に対し、Jacobson–Morozovにより \mathfrak{sl}_2 -triple $\{H, X, Y\}$ を満たす元 $H, Y \in \mathfrak{g}$ を選ぶことができる。ここで、 $\{H, X, Y\}$ が \mathfrak{sl}_2 -triple であるとはリー環 \mathfrak{g} の交換子 $[\cdot, \cdot]$ に関して

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y, \quad [X, Y] = H$$

を満たすことをいう。特に、 H は半単純元である(つまり、 $\text{ad}(H)$ は対角化可能な \mathfrak{g} 上の線型変換である)。以下、0でない \mathfrak{g} の冪零元全体のなす錘を \mathcal{N} 、半単純元全体を \mathcal{S} とする。Kostant [11]とMal'cev [13]により、 \mathfrak{g} 内の0でない冪零軌道全体 \mathcal{N}/G から \mathfrak{g} 内の半単純軌道全体 \mathcal{S}/G への単射な写像が定義される：

$$\begin{array}{ccccc} \Phi : \mathcal{N}/G & \xrightarrow{\text{Kostant}} & \{\mathfrak{g} \text{ 内の } \mathfrak{sl}_2\text{-triples}\}/G & \xrightarrow{\text{Mal'cev}} & \mathcal{S}/G \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_X & \mapsto & \{H, X, Y\} & \mapsto & \mathcal{O}_H = G \cdot H \end{array} \quad (2.1)$$

なお、 $\{\mathfrak{g} \text{ 内の } \mathfrak{sl}_2\text{-triples}\}/G$ は次の同値関係による商集合を表す： $\{H, X, Y\} \sim \{g \cdot H, g \cdot X, g \cdot Y\}$ ($g \in G$)。

次に、半単純元 $H \in \Phi(\mathcal{O}_X)$ に対して \mathfrak{g} 上の線型変換 $\text{ad}(H)$ を考えよう。固有値 m に対する $\text{ad}(H)$ -固有空間を

$$\mathfrak{g}(m) := \{Z \in \mathfrak{g} : \text{ad}(H)Z = mZ\}$$

²冪零軌道は等質空間として G/G_X と表したとき、 G_X は簡約ではないためアフィン空間ではない(準アフィン空間ではある)。^[18]も参照。

と表す。 \mathfrak{sl}_2 の表現論から、 $\text{ad}(H)$ の固有値はすべて整数である。 また、定義より $[\mathfrak{g}(m), \mathfrak{g}(n)] \subset \mathfrak{g}(m+n)$ を満たす。 よって、 $\text{ad}(H)$ による \mathfrak{g} の固有空間分解

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}(m) \quad (2.2)$$

は \mathbb{Z} による次数付けを与える。 特に、 \mathfrak{g} は有限次元により、 (2.2) は有限和である。 この次数付けは半単純元 H の取り方によらず \mathcal{O}_H によってのみ定まることが示される。 よって、 (2.1) により次数付け (2.2) は冪零軌道 \mathcal{O}_X で決定される。

定義 2.1 ([14]). $\text{ht}(\mathcal{O}_X) := \max\{m \in \mathbb{Z} : \mathfrak{g}(m) \neq \{0\}\}$ を冪零軌道 \mathcal{O}_X の高さと呼ぶ。

冪零元 X が $\mathfrak{g}(2)$ に含まれることから、高さは $\text{ht}(\mathcal{O}_X) \geq 2$ である。 ゆえに、 ht は \mathcal{N}/G から $\{2, 3, 4, \dots\}$ への関数である。

Panyushev は冪零軌道の高さを用いて冪零軌道が spherical であることを次のように特徴付けた。

事実 2.2 ([14, Theorem 3.1]). 冪零軌道 \mathcal{O}_X が spherical であるための必要十分条件は $\text{ht}(\mathcal{O}_X) = 2$ または 3 である。

2.2 モーメント写像による冪零軌道の実現

式 (2.2) で与えた次数付けによって、次で定める $\mathfrak{p}, \mathfrak{l}$ はリー環となる：

$$\mathfrak{p} := \bigoplus_{m \geq 0} \mathfrak{g}(m), \quad (2.3)$$

$$\mathfrak{l} := \mathfrak{g}(0) = Z_{\mathfrak{g}}(H). \quad (2.4)$$

このとき、 \mathfrak{p} は放物型部分環とよばれる。 さらに、 $\mathfrak{u} = \bigoplus_{m \geq 1} \mathfrak{g}(m)$ として $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} + \mathfrak{u}$ と分解されるが、これを放物型部分環 \mathfrak{p} のレビ分解とよび、 \mathfrak{l} は \mathfrak{p} のレビ部分環と呼ばれる。 なお、 \mathfrak{l} は簡約リー環となる。

次の冪零部分環 \mathfrak{n} は定理 1.1 の証明において重要な役割を果たす：

$$\mathfrak{n} := \bigoplus_{m \geq 2} \mathfrak{g}(m). \quad (2.5)$$

次数付け (2.2) から $[\mathfrak{p}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n}$ である。 実は、再び \mathfrak{sl}_2 の表現論を用いると \mathfrak{n} は次で表される：

補題 2.3. $\mathfrak{n} = [\mathfrak{p}, X]$.

次に、 P を G の連結な閉部分群で \mathfrak{p} をリー環にもつものとする。 この P を G の放物型部分群という。 定義より、 P は \mathfrak{n} に作用する。 さらに、補題 2.3 より

$$\mathfrak{n}^{\circ} := P \cdot X \quad (2.6)$$

は \mathfrak{n} の開かつ稠密な部分集合である。 特に、 \mathfrak{n}° は冪零軌道 \mathcal{O}_X に含まれる。

さて、旗多様体 G/P 上の正則ベクトル束 $G \times_P \mathfrak{n}$ から複素リー環 \mathfrak{g} への写像 φ を

$$\varphi : G \times_P \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{g}, \quad (g, Z) \mapsto g \cdot Z \quad (2.7)$$

で定義する。 このとき、

などとなり, $\text{ht}(\mathcal{O}_{(2p, 1^{n-2p})}) = 2$ である. 次の式は, \mathfrak{g} の固有空間分解のイメージである.

$$\mathfrak{g} = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathfrak{g}(0) & \mathfrak{g}(1) & \mathfrak{g}(2) \\ \hline \mathfrak{g}(-1) & \mathfrak{g}(0) & \mathfrak{g}(1) \\ \hline \mathfrak{g}(-2) & \mathfrak{g}(-1) & \mathfrak{g}(0) \end{array} \right)$$

高さが 2 より n は $\mathfrak{g}(2)$ に一致する. また, 放物型部分群 P は以下のような形の群である:

$$P = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} g_1 & * & * \\ O & g_2 & * \\ O & O & g_3 \end{array} \right) \in SL(n, \mathbb{C}) \right\}$$

この表示の下で, P は \mathfrak{n} に次のように作用する:

$$\begin{pmatrix} g_1 & * & * \\ O & g_2 & * \\ O & O & g_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} O & O & A \\ O & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & O & g_1 A g_3^{-1} \\ O & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

ゆえに, レビ部分群 $L = S(GL(p, \mathbb{C}) \times GL(n-2p, \mathbb{C}) \times GL(p, \mathbb{C}))$ の \mathfrak{n} への作用は $GL(p, \mathbb{C}) \times GL(p, \mathbb{C})$ の $M(p, \mathbb{C})$ への作用と軌道同値である³. 特に, $\mathfrak{n}^\circ = P \cdot X$ は⁴

$$\mathfrak{n}^\circ = \left\{ \begin{pmatrix} O & O & A \\ O & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix} : A \in M(p, \mathbb{C}), \text{rank } A = p \right\}.$$

以上より, $\mathcal{O}_{(2p, 1^{n-2p})}$ は G のコンパクト実型 $K = SU(n)$ の作用によって $\mathcal{O}_{(2p, 1^{n-2p})} = SU(n) \cdot \mathfrak{n}^\circ$ と表される.

3 可視的作用の誘導定理

この章では, 定理 1.1 の証明に重要な役割を果たす可視的作用の誘導定理を解説する. 以下, 前章までの記号や設定を引き続き用いる.

3.1 可視的作用の誘導定理

まず, 可視的作用の誘導定理を紹介する.

定理 3.1 (可視的作用の誘導定理). 冪零部分環 \mathfrak{n} における $L \cap K$ の作用が可視的であるとする. このとき, 冪零軌道 \mathcal{O}_X における K の作用は可視的である.

冪零軌道がモーメント写像によって実現されることを思い出そう (補題 2.4 参照). 可視的作用の誘導定理は, 冪零軌道における作用の可視性が, モーメント写像を経由してベクトル束のファイバーにおける作用の可視性から誘導されることを主張している. さらに, 次の点が可視的作用の誘導定理は標語的に次のことを主張している:

³2 つのリー群のベクトル空間への作用 $(G, V), (G', V')$ が軌道同値であるとは, 線型同型 $\varphi: V \rightarrow V'$ で $\varphi(G \cdot v) = G' \cdot \varphi(v)$ が任意の $v \in V$ に対して成り立つことをいう.

⁴冪零軌道の高さが 2 のとき, 放物型部分群 P の \mathfrak{n} への作用はレビ部分群の作用と軌道同値である. 実際, 放物型部分環 \mathfrak{p} は $\mathfrak{g}(0) + \mathfrak{g}(1) + \mathfrak{g}(2)$ であり, $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}(2)$ に対して $\mathfrak{g}(1) + \mathfrak{g}(2)$ は自明に作用する.

$L \cap K$ の \mathfrak{n} への作用	\Rightarrow	K の \mathcal{O}_X への作用
平坦な空間 (線型空間)	\Rightarrow	曲がった空間
小さい空間	\Rightarrow	大きな空間

我々の対象は冪零軌道という「曲がった」空間である。その可視的作用が「平坦な」空間の可視的作用によって統制されることは可視的作用の誘導定理の利点の1つである。また、 $\mathfrak{n} \subset \mathcal{O}_X$ という関係から、「大きい」空間の可視性が「小さい」空間で保証されるということも注目すべき点である。

この誘導定理は冪零軌道への可視的作用におけるスライスも冪零部分環へのそれから誘導される。本件についてはこの後の命題 3.4 で述べる。

以上より、我々の問題は可視的作用の誘導定理により $L \cap K$ の \mathfrak{n} への作用の解析に帰着された。

3.2 冪零部分環への線型作用

冪零軌道 \mathcal{O}_X が spherical であるとき $L \cap K$ の \mathfrak{n} への作用を研究することが本研究の核となる。実際に、次を得る：

定理 3.2. 冪零軌道 \mathcal{O}_X の高さが 3 以下ならば、 \mathfrak{n} における $L \cap K$ の作用は可視的である。特に、スライス S_0 として \mathfrak{n} の部分空間を選ぶことができる⁵。

定理 3.2 の証明は、冪零軌道の分類から高さが 3 以下のものすべてに対して case-by-case で議論する。冪零軌道の分類は、Dynkin による \mathfrak{sl}_2 -triples の分類 [5]、および Kostant の理論を通して重み付き Dynkin 図形により与えられる (cf. [1, 2, 4])。重み付き Dynkin 図形から対応する冪零軌道の高さが計算できる。ゆえに、事実 2.2 より spherical な冪零軌道の分類が与えられる。

本講究録では、冪零軌道への可視的作用におけるスライスが冪零部分環への可視的作用におけるスライスから誘導される様子を考察する。一方、反正則微分同相の構成についてはここでは割愛し [17, Section 3] を参照していただく。

3.3 スライスの誘導

本節では、冪零部分環 \mathfrak{n} における $(L \cap K)$ の作用が可視的であるとき、冪零軌道 \mathcal{O}_X への K の作用におけるスライスを構成する方法を解説する。

冪零軌道 \mathcal{O} は $\mathcal{O}_X = \varphi(K \times_{L \cap K} \mathfrak{n}^\circ)$ と表されるのであった (補題 2.4)。そこで、 \mathfrak{n} の開集合 $\mathfrak{n}^\circ = P \cdot X$ ((2.6) 参照) を考察する。 $L \cap K$ は P の部分群より \mathfrak{n}° に作用する。

以下、実線型空間 S_0 を \mathfrak{n} における $L \cap K$ の作用に対して (V.1) を満たすものとする⁶。そこで、 S を次で定める：

$$S := S_0 \cap \mathfrak{n}^\circ. \tag{3.1}$$

このとき、 S は \mathfrak{n}° の実部分多様体である。

⁵複素線型空間 \mathfrak{n} にエルミート内積を入れてコンパクト群 $L \cap K$ が \mathfrak{n} にユニタリに作用する。定理 3.2 の設定において、この作用が既約ならば hyperpolar 作用であることも分かる。なお、一般にコンパクト群が複素線型空間にユニタリ変換として作用している設定の下で、polar 作用 (特に、hyperpolar 作用) ならば可視的作用であるが、(作用が既約であったとしても) 逆は成り立たない。例えば、 $U(3) \times Sp(n)$ の $M(2, 2n; \mathbb{C})$ への既約な作用は可視的であるが (hyper)polar ではない。以上は、論文 [15, Remark 2.2] を参照。

⁶本節の議論は、(V.1) を満たす \mathfrak{n} の実部分空間の存在のみを必要としており、反正則微分同相写像 σ の存在は必要としない。もちろん、可視的であることを示すためには両方が必要である。

補題 3.3. $\mathfrak{n}^\circ = (L \cap K) \cdot S$.

Proof. 線型空間 S は (V.1) を満たすので, $\mathfrak{n} = (L \cap K) \cdot S_0$ と表される. よって, $\mathfrak{n}^\circ \subset \mathfrak{n}$ は $L \cap K$ で不変より

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}^\circ &= ((L \cap K) \cdot S_0) \cap \mathfrak{n}^\circ \\ &= ((L \cap K) \cdot S_0) \cap ((L \cap K) \cdot \mathfrak{n}^\circ) \\ &= (L \cap K) \cdot (S_0 \cap \mathfrak{n}^\circ) \\ &= (L \cap K) \cdot S. \end{aligned}$$

ゆえに, 補題 3.3 は示された. \square

開かつ稠密な \mathfrak{n} の部分多様体 \mathfrak{n}° は冪零軌道 \mathcal{O}_X の部分多様体である. よって, (3.1) で定めた S は \mathcal{O}_X の部分多様体である.

命題 3.4. $\mathcal{O}_X = K \cdot S$.

Proof. 命題 2.5 と補題 3.3 より,

$$\mathcal{O}_X = K \cdot \mathfrak{n}^\circ = K \cdot ((L \cap K) \cdot S) = (K(L \cap K)) \cdot S = K \cdot S.$$

よって, 命題 3.4 が示された. \square

例 3.5. 例 2.1 の設定の下で, S_0 を求めよう. 放物型部分群 P の $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}(2)$ への作用は (2.8) で与えられ, レビ部分群 $L = S(GL(p, \mathbb{C}) \times GL(n-2p, \mathbb{C}) \times GL(p, \mathbb{C}))$ の \mathfrak{n} への作用は, $GL(p, \mathbb{C}) \times GL(p, \mathbb{C})$ の $M(p, \mathbb{C})$ への作用と軌道同値であった.

レビ部分群 L と G のコンパクト実型 $K = SU(n)$ との共通部分は $S(U(p) \times U(n-2p) \times U(p))$ である. ここで, 線型代数学における「任意の複素行列はユニタリ行列によって対角化される」という基本的な事実は, 実線型空間

$$T_0 = \{d = \text{diag}(r_1, \dots, r_p) : r_1, \dots, r_p \in \mathbb{R}\}$$

が $M(p, \mathbb{C})$ 内の各 $(U(p) \times U(p))$ -軌道と交叉することを示す. つまり,

$$M(p, \mathbb{C}) = (U(p) \times U(p)) \cdot T_0. \quad (3.2)$$

ゆえに, 自然な線型同型 $M(p, \mathbb{C}) \simeq \mathfrak{n}$ を通して

$$S_0 := \left(\begin{array}{c} \boxed{T_0} \\ \end{array} \right)$$

とおくと, (3.2) から $\mathfrak{n} = (L \cap K) \cdot S_0$ を得る⁷. したがって, $S = \mathfrak{n}^\circ \cap S_0$ は

$$S = \left\{ \left(\begin{array}{c} \boxed{d} \\ \end{array} \right) : d \in T_0, \text{rank } d = p \right\}.$$

なお, \mathfrak{n} 上の反正則微分同相写像 σ として複素共役をとる写像, つまり $\sigma(X) = \bar{X}$ で定義する. これにより, \mathfrak{n} における $L \cap K$ への作用は可視的である.

⁷線型空間 $M(p, \mathbb{C})$ における $U(p) \times U(p)$ の作用は, (エルミート) 対称空間 $U(p, p)/(U(p) \times U(p))$ の s -表現 (等方表現) である. よって, この作用は hyperpolar 作用である. S_0 は hyperpolar 作用の切断である.

4 定理 3.2 の証明の概略

本章では、定理 3.2 の証明の一部を概説する。

定理 3.2 の証明において、次の研究結果を用いる：

- 冪零軌道の分類理論と重み付き Dynkin 図形 (cf. [4, 5, 11, 13]).
- 線型空間における可視的作用の分類理論 [15, 16].

本講究録では、冪零軌道の分類理論と重み付き Dynkin 図形について説明した後、具体例を通して証明の方針を説明することとする。

複素単純リー環 \mathfrak{g} のカルタン部分環 \mathfrak{t} を 1 つ固定する。 $\Delta \equiv \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ を \mathfrak{t} に関する \mathfrak{g} のルート系とし、 \mathfrak{g}_α でルート $\alpha \in \Delta$ に対するルート空間を表す。

$\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ を \mathfrak{g} の実型で $\text{rank}_\mathbb{R} \mathfrak{g}_\mathbb{R} = \text{rank } \mathfrak{g}$ を満たすものとする⁸。この $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ は \mathfrak{g} の正規実型とよばれ、共役を除いて一意的である。 $\mathfrak{t}_\mathbb{R}$ を $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ のカルタン部分環とすると、 $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_\mathbb{R} + \sqrt{-1}\mathfrak{t}_\mathbb{R}$ となる。また、 $\mathfrak{t}_\mathbb{R}$ の任意の元 A は $\alpha(A) \in \mathbb{R} (\forall \alpha \in \Delta)$ を満たす。

\mathfrak{g} のボレル部分環 \mathfrak{b} は放物型部分環 \mathfrak{p} ((2.3) 参照) に含まれると、正のルート系 Δ^+ として $\mathfrak{b} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha$ を満たすようなものを選び固定する。この正のルート系から $(\overline{\mathfrak{t}_\mathbb{R}})_+ := \{A \in \mathfrak{t}_\mathbb{R} : \alpha(A) \geq 0 (\forall \alpha \in \Delta^+)\}$ を定める⁹。

(2.1) で見たように、冪零軌道 \mathcal{O}_X から写像 Φ によって半単純軌道 $\mathcal{O}_H = \Phi(\mathcal{O}_X)$ が対応する。ここで、2 つのカルタン部分環は随伴群 G で共役であるため、 $\mathcal{O}_H \cap \mathfrak{t} \neq \emptyset$ である。特に、 $H_0 \in \mathcal{O}_H$ で $H_0 \in (\overline{\mathfrak{t}_\mathbb{R}})_+$ を満たすものがただ 1 つ存在する。つまり、次の単射な写像が得られた：

$$\begin{array}{ccccc} \Psi : \mathcal{N}/G & \rightarrow & S/G & \rightarrow & (\overline{\mathfrak{t}_\mathbb{R}})_+ \\ \cup & & \cup & & \cup \\ \mathcal{O}_X & \mapsto & \Phi(\mathcal{O}_X) & \mapsto & \Psi(\mathcal{O}_X) \end{array}$$

この $\Psi(\mathcal{O}_X)$ を \mathcal{O}_X の特性元とよぶ。

冪零軌道の特性元を用いると、重み付き Dynkin 図形が得られる。 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ を \mathfrak{g} の単純ルートとする ($r = \text{rank } \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{t}$)。 \mathfrak{sl}_2 の表現論から $\alpha_i(\Psi(\mathcal{O}_X)) \in \{0, 1, 2\}$ である ($i = 1, 2, \dots, r$)。よって、次の単射な写像が定義される：

$$\Omega : \mathcal{N}/G \rightarrow \{0, 1, 2\}^r, \quad \mathcal{O}_X \mapsto \Omega(\mathcal{O}_X) = (\alpha_1(\Psi(\mathcal{O}_X)), \dots, \alpha_r(\Psi(\mathcal{O}_X))).$$

この写像により、複素単純リー環の冪零軌道は有限個であることが分かる。

\mathfrak{g} の Dynkin 図形において単純ルート α_i に対応する頂点に非負整数 $\alpha_i(\Psi(\mathcal{O}_X))$ を付加したものを冪零軌道 \mathcal{O}_X に対する重み付き Dynkin 図形という。

例 4.1. 例 2.1 で考察した $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ の冪零元 X に対して、冪零軌道 $\mathcal{O}_{(2p, 1^{n-2p})}$ の重み付き Dynkin 図形を求めよう。

\mathfrak{g} のカルタン部分環 \mathfrak{t} として \mathfrak{g} 内の対角行列全体とする。 $e_i \in \mathfrak{t}^*$ を $d = \text{diag}(t_1, \dots, t_n) \in \mathfrak{t}$ に対して $e_i(d) = t_i$ で定義する。このとき、 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) = \{\pm(e_i - e_j) : 1 \leq i < j \leq n\}$ となる。ボレル部分環 \mathfrak{b} として \mathfrak{g} の上三角行列全体の集合とする。このとき、正のルート系は $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) = \{e_i - e_j : 1 \leq i < j \leq n\}$ で与えられる。

⁸ $\text{rank}_\mathbb{R} \mathfrak{g}_\mathbb{R}$ は、リー環 $\mathfrak{g}_\mathbb{R} = \mathfrak{k}_\mathbb{R} + \mathfrak{s}_\mathbb{R}$ とカルタン分解したとき $\mathfrak{s}_\mathbb{R}$ の極大可換部分空間の次元で定義する。これを、 $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ の実階数という。

⁹ $(\overline{\mathfrak{t}_\mathbb{R}})_+ = \{A \in \mathfrak{t}_\mathbb{R} : \alpha(A) > 0 (\forall \alpha \in \Delta^+)\}$ を Weyl の部屋という。 $(\overline{\mathfrak{t}_\mathbb{R}})_+$ は Weyl の部屋の閉包である。

\mathfrak{g} の正規実型 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ として $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ を選び, $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ とする. このとき, $\overline{(\mathfrak{t}_{\mathbb{R}})}_+ = \{\text{diag}(t_1, \dots, t_n) \in \mathfrak{t} : t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n\}$ となる.

$\mathcal{O}_{(2^p, 1^{n-2p})}$ の特性元は

$$H = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_p, 0, \dots, 0, \underbrace{-1, \dots, -1}_p) \in \overline{(\mathfrak{t}_{\mathbb{R}})}_+$$

である. 単純ルート $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ は $\alpha_i = e_i - e_{i+1}$ ($1 \leq i \leq n-1$) で与えられる. よって, $\alpha_p(H) = \alpha_{n-p}(H) = 1$ で $\alpha_j(H) = 0$ ($j \neq p, n-p$) となる. ゆえに, 冪零軌道 $\mathcal{O}_{(2^p, 1^{n-2p})}$ の重み付き Dynkin 図形は $\Omega(\mathcal{O}_{(2^p, 1^{n-2p})}) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{p-1}, 1, 0, \dots, 0, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{p-1})$ となる (図 4.1 参照).

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & 1 & & 1 & & 0 \\ \circ & \cdots & \circ & \cdots & \circ & \cdots & \circ \\ \alpha_1 & & \alpha_p & & \alpha_{n-p} & & \alpha_{n-1} \end{array}$$

図 4.1: $\mathcal{O}_{(2^p, 1^{n-2p})}$ の重み付き Dynkin 図形

複素単純リー環が A 型の場合, spherical な冪零軌道は $\mathcal{O}_{(2^p, 1^{n-2p})}$ ($1 \leq p \leq \lfloor n/2 \rfloor$) に限ることが知られている. 以下, spherical ではない冪零軌道 $\mathcal{O}_{(3, 1^{n-3})}$ を考察しよう.

例 4.2. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ とし, $X = E_{1,2} + E_{2,3}$ とする. このとき, 冪零軌道 \mathcal{O}_X はジョルダン型が $(3, 1^{n-3})$ 型の行列全体 $\mathcal{O}_{(3, 1^{n-3})}$ に一致する.

$$H' = 2E_{1,1} - 2E_{3,3} = \text{diag}(2, 0, -2, 0, \dots, 0), \quad Y' = E_{2,1} + E_{3,2}$$

とおくと, $\{H', X, Y'\}$ は \mathfrak{sl}_2 -triple をなす. 正のルート系 Δ^+ および $\overline{(\mathfrak{t}_{\mathbb{R}})}_+$ を例 4.1 で定めたものとする. H' を通る半単純軌道 $\mathcal{O}_{H'}$ は

$$H := 2E_{1,1} - 2E_{n,n} = \text{diag}(2, 0, \dots, 0, -2) \in \overline{(\mathfrak{t}_{\mathbb{R}})}_+$$

を含む. ゆえに, H は $\mathcal{O}_{(3, 1^{n-3})}$ の特性元である. したがって, $\mathcal{O}_{(3, 1^{n-3})}$ の重み付き Dynkin 図形は $\Omega(\mathcal{O}_X) = (2, 0, \dots, 0, 2)$ である (図 4.2 参照).

次に, 特性元 H から $\text{ad}(H)$ -固有空間をルート空間の言葉で述べると,

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}(0) &= \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{2 \leq i < j \leq n-1} \mathfrak{g}_{\pm(e_i - e_j)} \simeq \mathfrak{sl}(n-2, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}^2, \\ \mathfrak{g}(1) &= \{0\} \\ \mathfrak{g}(2) &= \bigoplus_{2 \leq j \leq n-1} \mathfrak{g}_{e_1 - e_j} \oplus \bigoplus_{2 \leq i \leq n-1} \mathfrak{g}_{e_i - e_n} \simeq \mathbb{C}^{n-2} \oplus \mathbb{C}^{n-2}, \\ \mathfrak{g}(3) &= \{0\}, \\ \mathfrak{g}(4) &= \mathfrak{g}_{e_1 - e_n} \simeq \mathbb{C}. \\ \mathfrak{g}(m) &= \{0\} \quad (m \geq 5). \end{aligned}$$

となり, よって冪零軌道の高さは 4 である. 事実 2.2 により $\mathcal{O}_{(3, 1^{n-3})}$ は spherical ではない.

冪零部分環 $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}(2) + \mathfrak{g}(4)$ における $L \cap K$ の作用は次で定義される $\mathbb{C}^{n-2} \oplus \mathbb{C}^{n-2} \oplus \mathbb{C}$ における $SL(n-2, \mathbb{C}) \times (\mathbb{C}^\times)^2$ の作用と軌道同値である :

$$(g, s, t) \cdot (v, w, z) := (s^t g^{-1} v, t^{-1} g w, s t^{-1} z)$$

このとき, $SU(n-2) \times \mathbb{T}^2$ の作用は可視的ではないことが知られている¹⁰.

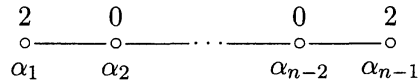


図 4.2: $O_{(3, 1^{n-3})}$ の重み付き Dynkin 図形

最後に, 例外型単純リー環における冪零軌道に対して可視的作用をもつ例を紹介して本講究録を終えることとする.

例 4.3. 複素単純リー環 \mathfrak{g} を E_8 型の例外型単純リー環とする. カルタン部分環 \mathfrak{t} の基底を $\{E_1, \dots, E_8\}$ とする. 正のルート系 $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) = \{\pm e_i \pm e_j : 1 \leq j < i \leq 8\} \sqcup \{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 (-1)^{n(i)} e_i : n(i) \in \{0, 1\}, \sum_{i=1}^8 n(i) = 0, 2, 4, 8\}$ を固定する. また, 単純ルート $\alpha_1, \dots, \alpha_8$ は $\alpha_1 = \frac{1}{2}(e_8 - e_7 - e_6 - e_5 - e_4 - e_3 - e_2 + e_1)$, $\alpha_2 = e_2 + e_1$, $\alpha_i = e_{i-1} - e_{i-2}$ ($i = 3, \dots, 8$) とする.

冪零軌道 \mathcal{O}_X をその重み付き Dynkin 図形が $\Omega(\mathcal{O}_X) = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ とする (図 4.3 参照). このとき, \mathcal{O}_X の特性元は

$$H = \frac{1}{2}(5E_8 + E_7 + E_6 + \dots + E_1)$$

で与えられることが分かる. よって,

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}(0) &\simeq \mathfrak{sl}(8, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}, \\ \mathfrak{g}(2) &\simeq \text{Alt}(8, \mathbb{C}), \\ \mathfrak{g}(3) &\simeq \mathbb{C}^8, \\ \mathfrak{g}(m) &= \{0\} \quad (m \geq 4) \end{aligned}$$

となり, \mathcal{O}_X の高さは 3 である. さらに, レビ部分群 L の $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}(2) \oplus \mathfrak{g}(3)$ への作用は以下で定める $SL(8, \mathbb{C}) \times (\mathbb{C}^\times)$ の $\text{Alt}(8, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}^8$ への作用と軌道同値である :

$$(g, s) \cdot (A, v) = (s^2 g A^t g, s^3 g v).$$

後者は [16, Section 3.2] より可視的作用である. 特に, スライス S_0 として $\mathbb{R}^4 \oplus \mathbb{R}^4$ と線型同型なものを選ぶことができる. よって, \mathcal{O}_X における K -作用のスライス S は $\dim S = 8$ を満たすものを選ぶことができる.

参考文献

[1] P. Bala, R. W. Carter, Classes of unipotent elements in simple algebraic groups. I. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **79** (1976), 401–425.

¹⁰ $\mathbb{C}^{n-2} \oplus \mathbb{C}^{n-2}$ における $SL(n-2, \mathbb{C}) \times (\mathbb{C}^\times)^2$ の作用は可視的である ([16, Section 3.1]).

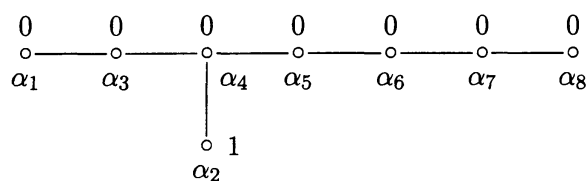


図 4.3: E_8 型の例外型単純リー環におけるある冪零軌道の重み付き Dynkin 図形

- [2] P. Bala, R. W. Carter, Classes of unipotent elements in simple algebraic groups. II. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **80** (1976), 1–17.
- [3] C. Benson, G. Ratcliff, A classification of multiplicity free actions, *J. Algebra* **181** (1996), 152–186.
- [4] D. Collingwood, W. McGovern, *Nilpotent orbits in semisimple Lie algebras*, Van Nostrand Reinhold Mathematics Series, Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1993.
- [5] E. B. Dynkin, Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras, *Mat. Sbornik N.S.* **30** (1952), 349–462 (3 plates).
- [6] V. Kac, Some remarks on nilpotent orbits, *J. Algebra* **64** (1980), 190–213.
- [7] A. W. Knap, *Lie groups beyond an introduction, Second edition*, Progress in Mathematics, **140**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2002.
- [8] T. Kobayashi, Multiplicity-free representations and visible actions on complex manifolds, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **41** (2005), 497–549, special issue commemorating the fortieth anniversary of the founding of RIMS.
- [9] T. Kobayashi, Visible actions on symmetric spaces, *Transform. Groups* **12** (2007), 671–694.
- [10] T. Kobayashi, Propagation of multiplicity-freeness property for holomorphic vector bundles, *Lie Groups: structure, actions, and representations*, 113–140, Progress in Mathematics, **306**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2013.
- [11] B. Kostant, The principal three-dimensional subgroup and Betti numbers of a complex simple Lie group, *Amer. J. Math.* **81** (1959), 973–1032.
- [12] A. Leahy, A classification of multiplicity free representations, *J. Lie Theory* **8** (1998), 367–391.
- [13] A. I. Mal'cev On semi-simple subgroups of Lie groups, *Amer. Math. Soc. Translation* **1950** (1950), 43 pp.
- [14] D. Panyushev, Complexity and nilpotent orbits, *Manuscripta Math.* **83** (1994), 223–237.
- [15] A. Sasaki, Visible actions on irreducible multiplicity-free spaces, *Int. Math. Res. Not.* (2009) 3445–3466.

- [16] A. Sasaki, Visible actions on reducible multiplicity-free spaces, *Int. Math. Res. Not.* (2011), 885–929.
- [17] A. Sasaki, Visible actions on spherical nilpotent orbits, *preprint*, 51 pages.
- [18] É. Vinberg, B. Kimelfeld, Homogeneous domains on flag manifolds and spherical subgroups of semisimple Lie groups, *Funct. Anal. Appl.* **12** (1978), 168–174.
- [19] E. Vinberg, Complexity of actions of reductive groups, *Functional Anal. Appl.* **20** (1986), 1–11.