数理解析研究所講究録
第1929巻 2014年 30-53

Symmetric triads and their applications
対称三対とその応用

京都工芸繊維大学工芸科学研究科　　井川　治

重複度付き対称三対は重複度付き既約ルート系の拡張概念である．この論文では重複度付き対称三対の定義と基本性質について述べ，ある条件を満たすコンパクト対称三対から重複度付き対称三対を構成する．さらに対称三対の二つの応用について紹介する．(1) 一つは Hermann 作用の軌道の研究であり，(2) もう一つはコンパクト型既約エルミート対称空間内の二つの実形の交叉の研究 (田中真紀子，田崎博之との共同研究) である．

(1) Hermann 作用はコンパクト対称空間へのイソトロピー群の作用の拡張であり，変分完備性や超極性と呼ばれる良い性質を引き継ぐ．重複度付き対称三対を用いて Hermann 作用の軌道全体のなす空間（軌道空間）を記述する．また，正則，極小，austere，全測地的軌道といった個々の軌道についても調べる．結果としてイソトロピー群の軌道との違いも明らかになる．

(2) コンパクト型既約エルミート対称空間内の実形の交叉について考察する．実形とは対合的反正則等長変換の不動点集合のことである．実形は連結な全測地的 Lagrange 部分多様体になる．村上信吾は各コンパクト型既約エルミート対称空間には少なくとも一つの実形があることを示した．田中-田崎は実形が離散的に交わる場合には，交叉は対蹠集合になることを示した．我々は二つの実形が互いに合同な場合には交叉が離散的になるための必要十分条件を制限ルート系を用いて与える．この場合は交叉は実形の大対蹠集合になる．二つの実形が互いに合同でない場合には交叉が離散的になるための必要十分条件を対称三対を用いて与える．対蹠集合の概念は Chen-Nagano が導入した．

松木俊彦氏，田丸博士氏，間下克哉氏，馬場蔵人氏の有益な助言に感謝する．

1　対称三対

この節では重複度付き対称三対の定義と基本性質について述べる．

ルート系の定義の復習から始める．$\mathfrak{a}$ を $\mathbb{R}$ 上の有限次元線形空間で内積 $\langle\ ,\ \rangle$ をもつものとする．

定義 1.1. 有限集合 $\Sigma \subset \mathfrak{a} - \{0\}$ が**ルート系**であるとは，次の三つの条件を満たす場合をいう．

(1) $\mathfrak{a} = \mathrm{span}(\Sigma)$.

(2) $\alpha, \beta \in \Sigma$ ならば $s_\alpha \beta \in \Sigma$．ここで s_α は次で定義される $\mathfrak{a}$ 上の直交変換である．

$$s_\alpha \beta = \beta - 2\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\|^2}\alpha.$$

(3) $\alpha, \beta \in \Sigma$ ならば，$2\dfrac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\|^2} \in \mathbb{Z}$.

$\{s_\alpha \mid \alpha \in \Sigma\}$ で生成される直交群 $O(\mathfrak{a})$ の部分群を Σ の**ワイル群**といい，$W(\Sigma)$ で表す．

$\mathfrak{a}$ のルート系 Σ が**既約**であるとは，Σ が互いに直交する空でない二つの部分集合に分解できない場合をいう．

以上の準備の下に対称三対を定義しよう．

定義 1.2. 三組 $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ が $\mathfrak{a}$ の**対称三対**であるとは，次の条件を満たす場合をいう：

(1) $\tilde{\Sigma}$ は $\mathfrak{a}$ の既約ルート系である．

(2) $\Sigma(\subset \mathfrak{a})$ は $\mathrm{span}(\Sigma)$ のルート系である．

(3) W は -1 倍で不変な $\mathfrak{a}$ の空でない部分集合であり，$\tilde{\Sigma} = \Sigma \cup W$.

(4) $\Sigma \cap W$ は空集合ではない．$l = \max\{\|\alpha\| \mid \alpha \in \Sigma \cap W\}$ とおくと，$\Sigma \cap W = \{\alpha \in \tilde{\Sigma} \mid \|\alpha\| \leq l\}$.

(5) $\alpha \in W, \lambda \in \Sigma - W$ に対して

$$2\frac{\langle \alpha, \lambda \rangle}{\|\alpha\|^2} \text{が奇数} \Leftrightarrow s_\alpha \lambda \in W - \Sigma.$$

(6) $\alpha \in W, \lambda \in W - \Sigma$ に対して

$$2\frac{\langle \alpha, \lambda \rangle}{\|\alpha\|^2} \text{が奇数} \Leftrightarrow s_\alpha \lambda \in \Sigma - W.$$

$(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ が $\mathfrak{a}$ の対称三対ならば，Σ は $\mathfrak{a}$ のルート系である，すなわち，Σ は $\mathfrak{a}$ を張る．実際，定義 1.2 の (4) を用いて

$$\mathfrak{a} \supset \mathrm{span}(\Sigma) \supset \mathrm{span}(\Sigma \cap W) \supset \mathrm{span}\{\text{the shortest roots } \in \tilde{\Sigma}\} = \mathfrak{a}.$$

ゆえに $\mathrm{span}(\Sigma) = \mathfrak{a}$.

定義 1.3. $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W), (\tilde{\Sigma}', \Sigma', W')$ をそれぞれ $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$ の対称三対とする．

$(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ と $(\tilde{\Sigma}', \Sigma', W')$ が**同値**であるとは等長線形同型写像 $f : \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}'$ と $Y \in \Gamma$ が存在して $f(\tilde{\Sigma}) = \tilde{\Sigma}'$ かつ

$$\begin{aligned} \Sigma' - W' &= \{f(\alpha) \mid \alpha \in \Sigma - W, \langle \alpha, 2Y \rangle \in 2\pi\mathbb{Z}\} \\ &\quad \cup \{f(\alpha) \mid \alpha \in W - \Sigma, \langle \alpha, 2Y \rangle \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}\}, \\ W' - \Sigma' &= \{f(\alpha) \mid \alpha \in W - \Sigma, \langle \alpha, 2Y \rangle \in 2\pi\mathbb{Z}\} \\ &\quad \cup \{f(\alpha) \mid \alpha \in \Sigma - W, \langle \alpha, 2Y \rangle \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

$(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ と $(\tilde{\Sigma}', \Sigma', W')$ が同値のとき，$(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W) \sim (\tilde{\Sigma}', \Sigma', W')$ と書く．このとき，$f(\Sigma \cap W) = \Sigma' \cap W'$ となる．$\sim$ は同値関係になる．

$\mathfrak{a}$ の対称三対 $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ に対して

$$\Gamma = \left\{ X \in \mathfrak{a} \mid \langle \lambda, X \rangle \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z} \quad (\lambda \in \tilde{\Sigma}) \right\}$$

とおく．Γ の元を**全測地点**という．$\mathfrak{a}$ の稠密な開集合 $\mathfrak{a}_r$ を

$$\mathfrak{a}_r = \bigcap_{\lambda \in \Sigma, \alpha \in W} \{H \in \mathfrak{a} \mid \langle \lambda, H \rangle \notin \pi\mathbb{Z}, \langle \alpha, H \rangle \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\}$$

と定める．$\mathfrak{a}_r$ の点を**正則点**，$\mathfrak{a} - \mathfrak{a}_r$ の点を**特異点**という．$\mathfrak{a}_r$ の連結成分を**セル**という．

定義 1.4. 対称三対 $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ の**アフィン ワイル群** $\tilde{W}(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ とは，

$$\{(s_\lambda, \frac{2n\pi}{\|\lambda\|^2}\lambda) \mid \lambda \in \Sigma, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{(s_\alpha, \frac{(2n+1)\pi}{\|\alpha\|^2}\alpha) \mid \alpha \in W, n \in \mathbb{Z}\}$$

によって生成される運動群 $O(\mathfrak{a}) \ltimes \mathfrak{a}$ の部分群のことである．

$(s_\lambda, \frac{2n\pi}{\|\lambda\|^2}\lambda)$ の $\mathfrak{a}$ への作用は超平面 $\langle \lambda, H \rangle = n\pi$ に関する鏡映であり，$(s_\alpha, \frac{(2n+1)\pi}{\|\alpha\|^2}\alpha)$ の $\mathfrak{a}$ への作用は超平面 $\langle \alpha, H \rangle = \frac{2n+1}{2}\pi$ に関する鏡映である．

命題 1.5. アフィン ワイル群 $\tilde{W}(\tilde{\Sigma},\Sigma,W)$ はセルの全体に推移的に作用する．P_0 で一つのセルを表すと $\mathfrak{a} = \bigcup_{s\in\tilde{W}(\tilde{\Sigma},\Sigma,W)} s\overline{P_0}$.

$\mathfrak{a}$ の対称三対 $(\tilde{\Sigma},\Sigma,W)$ に対して $\tilde{\Pi}$ で $\tilde{\Sigma}$ の基本系を表す．$\tilde{\Sigma}$ の $\tilde{\Pi}$ に関する正のルートの全体を $\tilde{\Sigma}^+$ と表し，$\Sigma^+ = \Sigma \cap \tilde{\Sigma}^+, W^+ = W \cap \tilde{\Sigma}^+$ とおく．このとき，$\Sigma = \Sigma^+ \cup (-\Sigma^+), W = W^+ \cup (-W^+)$ が成り立つ．$\Pi(\subset \Sigma^+)$ で Σ の単純ルートの全体を表す．

$$P_0 = \left\{ H \in \mathfrak{a} \;\middle|\; \begin{array}{ll} 0 < \langle \lambda, H\rangle & (\lambda \in \Pi), \\ \langle \lambda, H\rangle < \frac{\pi}{2} & (\lambda \in \Sigma^+ \cap W^+), \\ \langle \lambda, H\rangle < \pi & (\lambda \in \Sigma^+ - W^+), \\ -\frac{\pi}{2} < \langle \alpha, H\rangle < \frac{\pi}{2} & (\alpha \in W^+ - \Sigma^+) \end{array} \right\},$$

とおくと P_0 はセルになる．

定理 1.6. $\tilde{\alpha} \in W^+$ が一意に定まり，

$$P_0 = \left\{ H \in \mathfrak{a} \mid \langle \tilde{\alpha}, H\rangle < \frac{\pi}{2}, 0 < \langle \lambda, H\rangle \quad (\lambda \in \Pi) \right\}$$

となる．

部分集合 $\Delta \subset \Pi \cup \{\tilde{\alpha}\}$ に対して

$$P_0^{\Delta} = \left\{ H \in \overline{P_0} \;\middle|\; \begin{array}{l} \langle \lambda, H\rangle > 0 \quad (\lambda \in \Delta \cap \Pi), \\ \langle \lambda, H\rangle = 0 \quad (\lambda \in \Pi - \Delta), \\ \langle \tilde{\alpha}, H\rangle \begin{cases} < \frac{\pi}{2} & (\tilde{\alpha} \in \Delta \text{のとき}), \\ = \frac{\pi}{2} & (\tilde{\alpha} \notin \Delta \text{のとき}) \end{cases} \end{array} \right\}$$

とおく．このとき，P_0 の閉包 $\overline{P_0}$ を次のように階層化することができる：

$$\overline{P_0} = \bigcup_{\Delta \subset \Pi \cup \{\tilde{\alpha}\}} P_0^{\Delta} \quad (\text{互いに素}).$$

次の定理を述べるために既約ルート系の正ルートを次のように表す：

$$B_r^+ = \{e_i, e_i \pm e_j\}, \quad C_r^+ = \{2e_i, e_i \pm e_j\},$$
$$BC_r^+ = \{e_i, 2e_i, e_i \pm e_j\}, \quad D_r^+ = \{e_i \pm e_j\},$$

その他のルート系の記号は [2] に合わせる．

定理 1.7. $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ を $\mathfrak{a}$ の対称三対とする．このとき，$(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ は次のいずれかの形になる．また，定理 1.6 中の $\tilde{\alpha}$ も下の表に記述する．

(I) $\Sigma \supset W, \Sigma \neq W$ の場合

型	Σ^+	W^+	$\tilde{\alpha}$
(I-B_r)	B_r^+	$\{e_i\}$	e_1
(I-C_r)	C_r^+	D_r^+	e_1+e_2
(I-BC_r-A_1^r)	BC_r^+	$\{e_i\}$	e_1
(I-BC_r-B_r)	BC_r^+	B_r^+	e_1+e_2
(I-F_4)	F_4^+	F_4^+ の短いルート $\cong D_4^+$	e_1

(II) $\Sigma \subset W, \Sigma \neq W$ の場合

型	Σ^+	W^+	$\tilde{\alpha}$
(II-BC_r)　$(r \geq 2)$	B_r^+	BC_r^+	$2e_1$
(II-BC_1)	$\{e_1\}$	$\{e_1, 2e_1\}$	$2e_1$
(I'-C_r)	D_r^+	C_r^+	$2e_1$

(I') $\Sigma \neq W$ で (I),(II) 以外の場合

(I'-F_4) 型

$$\begin{aligned}\Sigma^+ &= \{F_4^+ \text{の短いルート}\} \cup \{e_1 \pm e_2, e_3 \pm e_4\} \cong C_4,\\ W^+ &= \{F_4^+ \text{の短いルート}\} \cup \{e_1 \pm e_3, e_1 \pm e_4, e_2 \pm e_3, e_2 \pm e_4\},\\ \tilde{\alpha} &= e_1 + e_3.\end{aligned}$$

(I'-B_r) 型 $(r \geq 3)$

$$\Sigma^+ = B_s^+ \cup B_{r-s}^+, \quad W^+ = (B_r^+ - \Sigma) \cup \{e_i\}, \quad \tilde{\alpha} = e_1 + e_{s+1}.$$

(I'-BC_r-A_1^r) 型

$$\Sigma^+ = BC_s^+ \cup BC_{r-s}^+, \quad W^+ = (BC_r^+ - \Sigma) \cup \{e_i\}, \quad \tilde{\alpha} = e_1 + e_{s+1}.$$

(III) $\tilde{\Sigma} = \Sigma = W$ となる場合，$\tilde{\alpha}$ は $\tilde{\Sigma}$ の最高ルート．

同値関係

$$\text{(I-}F_4\text{)} \sim \text{(I'-}F_4\text{)}, \quad \text{(I-}BC_r\text{-}A_1^r\text{)} \sim \text{(I'-}BC_r\text{-}A_1^r\text{)},$$
$$\text{(I-}C_r\text{)} \sim \text{(I'-}C_r\text{)}, \quad \text{(I-}B_r\text{)} \sim \text{(I'-}B_r\text{)}$$

が成り立つ．

定義 1.8. $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ を $\mathfrak{a}$ の対称三対とする．$\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ とおく．次の条件を満たす二つの写像 $m, n : \tilde{\Sigma} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を考える：

(1) $m(\lambda) = m(-\lambda), \quad n(\alpha) = n(-\alpha)$ かつ

$$m(\lambda) > 0 \Leftrightarrow \lambda \in \Sigma, \quad n(\alpha) > 0 \Leftrightarrow \alpha \in W.$$

(2) $\lambda \in \Sigma, \alpha \in W, s \in W(\Sigma)$ ならば $m(\lambda) = m(s\lambda), n(\alpha) = n(s\alpha)$.

(3) $W(\tilde{\Sigma})$ で $\tilde{\Sigma}$ のワイル群を表すとき，$\sigma \in W(\tilde{\Sigma}), \lambda \in \tilde{\Sigma}$ ならば
$n(\lambda) + m(\lambda) = n(\sigma\lambda) + m(\sigma\lambda)$.

(4) $\lambda \in \Sigma \cap W, \alpha \in W$ とする．
$\frac{2\langle \alpha, \lambda \rangle}{\|\alpha\|^2}$ が偶数ならば，$m(\lambda) = m(s_\alpha \lambda)$.
$\frac{2\langle \alpha, \lambda \rangle}{\|\alpha\|^2}$ が奇数ならば，$m(\lambda) = n(s_\alpha \lambda)$.

$m(\lambda)$ と $n(\alpha)$ をそれぞれ λ と α の**重複度**という．重複度が与えられた対称三対 $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ を**重複度付き対称三対**という．$H \in \mathfrak{a}$ に対して

$$m_H = -\sum_{\substack{\lambda \in \Sigma^+ \\ \langle \lambda, H \rangle \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}}} m(\lambda) \cot(\langle \lambda, H \rangle)\lambda + \sum_{\substack{\alpha \in W^+ \\ \langle \alpha, H \rangle \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}}} n(\alpha) \tan(\langle \alpha, H \rangle)\alpha$$

とおき，m_H を H の**平均曲率ベクトル**という．

$$F(H) = -\sum_{\substack{\lambda \in \Sigma^+ \\ \langle \lambda, H \rangle \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}}} m(\lambda) \log|\sin(\langle \lambda, H \rangle)| - \sum_{\substack{\alpha \in W^+ \\ \langle \alpha, H \rangle \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}}} n(\alpha) \log|\cos(\langle \alpha, H \rangle)|,$$

$\mathrm{Vol}(H) = \exp(-F(H))(> 0)$ とおき $\mathrm{Vol}(H)$ を H の**体積**という．

次の命題は体積と平均曲率ベクトルのアフィンワイル群の作用での不変性を示している．

命題 1.9. $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ を $\mathfrak{a}$ の重複度付き対称三対とする．$H \in \mathfrak{a}$ と $\sigma = (s, X) \in \tilde{W}(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ に対して $H' = \sigma H \in \mathfrak{a}$ とおくと次が成り立つ．

$$\mathrm{Vol}(H') = \mathrm{Vol}(H), \quad m_{H'} = s m_H.$$

定義 1.10. $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ を $\mathfrak{a}$ の重複度付き対称三対とする．このとき，$H \in \mathfrak{a}$ が**極小点**であるとは，$m_H = 0$ となるときをいう．

命題 1.11. (1) 任意の $H \in P_0^{\Delta}$ に対して，$(\mathrm{grad}\ F)(H) = m_H$.

(2) $H \neq H_1$ を満たす任意の $H, H_1 \in P_0^{\Delta}$ に対して

$$\frac{d^2}{dt^2} F(H + t\overrightarrow{HH_1})_{|t=0} > 0.$$

定理 1.12. 任意の $\Delta \subset \Pi \cup \{\tilde{\alpha}\}$ に対して，ただ一つ極小点 $H \in P_0^{\Delta}$ が存在する．特にセルの頂点は極小点である．H がセルの頂点ではない極小点ならば，H は不安定である．

定義 1.13. $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ を $\mathfrak{a}$ の重複度付き対称三対とする．このとき，$H \in \mathfrak{a}$ が **austere 点**であるとは，次で定義される $\mathfrak{a}$ の重複度付きの有限部分集合が重複度も含めて -1 倍に関して不変になるときをいう：

$$\begin{aligned} &\{-\lambda \cot(\langle \lambda, H \rangle)\ (\text{重複度} = m(\lambda)) \mid \lambda \in \Sigma^+, \langle \lambda, H \rangle \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\} \cup \\ &\{\alpha \tan(\langle \alpha, H \rangle)\ (\text{重複度} = n(\alpha)) \mid \alpha \in W^+, \langle \alpha, H \rangle \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\} \end{aligned} \tag{1.1}$$

定義から直ちに次が従う．

命題 1.14.

(1) 全測地点は任意に与えた重複度に関して austere 点である．

(2) austere 点は極小点である．

定理 1.15. $H \in \mathfrak{a}$ が austere 点になるための必要十分条件は次が成り立つことである．

(1) 任意の $\lambda \in (\Sigma - W) \cup (W - \Sigma)$ に対して $\langle \lambda, H \rangle \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$.

(2) $2H \in \Gamma$.

(3) $\langle \lambda, H \rangle \in \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ を満たす任意の $\lambda \in \Sigma \cap W$ に対して $m(\lambda) = n(\lambda)$.

2　コンパクト対称三対

この節ではある条件を満たすコンパクト対称三対から重複度付き対称三対を構成する．

(G, F_1, F_2) をコンパクト対称三対とする，すなわち，(G, F_1) と (G, F_2) を二つのコンパクト対称対とする．G 上の $\mathrm{Aut}(G)$-不変リーマン計量 $\langle\ ,\ \rangle$

をとる．このとき，商多様体 $M_i = G/F_i$ は誘導される G-不変リーマン計量に関してコンパクト対称空間になる．F_2 の M_1 への自然な等長作用を **Hermann 作用**という．$F_1 = F_2$ のときは，Hermann 作用はイソトロピー作用に他ならない．Hermann 作用は超極作用になることを大雑把に説明しよう．

ここで，一般のリーマン多様体 M_1 へのリー群 F_2 の等長作用が**超極**であるとは，M_1 の閉平坦全測地的部分多様体 $\hat{A}$ が存在して，任意の F_2-軌道が $\hat{A}$ と直交して交わる場合をいう．このとき，$\hat{A}$ を**切断**という．

Hermann 作用が超極であることを説明するためには，切断を構成すればよい．F_i を定める G の対合を θ_i と表し，θ_i の誘導する $\mathfrak{g}$ の対合も θ_i と表す．このとき，$\mathfrak{g}$ は次のように二通りに標準分解される：

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{f}_1 \oplus \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{f}_2 \oplus \mathfrak{p}_2.$$

$\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ をとる．G から M_1 の上への自然な射影を π_1 と表す．このとき，$A = \exp \mathfrak{a}$ は G のトーラスになり，$\hat{A} = \pi_1(A)$ が Hermann 作用の切断を与える ([6])．特に

$$G = F_2 A F_1$$

が成り立つ．[1] 両側剰余類 $F_2 \backslash G / F_1$ は M_1 内の F_2-軌道の全体を表す．このとき，$F_2 \backslash G / F_1$ は $\mathfrak{a}$ をある同値関係 $\sim$ で割った集合 $\mathfrak{a}/\sim$ と同一視される:

$$F_2 \backslash G / F_1 \cong \mathfrak{a}/\sim$$

ここで，

$$H_1 \sim H_2 \Leftrightarrow F_2 \pi_1(\exp H_1) = F_2 \pi_1(\exp H_2).$$

以後，$\theta_1 \theta_2 = \theta_2 \theta_1$ と仮定する．更に次の (A), (B) または (C) のいずれか一つを仮定する:

---

[1] この結果の非コンパクト版といえるものが知られている [13, Theorem 4.1]．G を非コンパクト連結単純リー群で中心が有限となるものとする．G のリー環を $\mathfrak{g}$ と表す．G の任意の対合 τ に対して Cartan 対合 σ で $\sigma\tau = \tau\sigma$ となるものが存在する [14, Theorem 6.16]．$\mathfrak{g}$ を σ と τ で次のように分解する：

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k} + \mathfrak{q} \cap \mathfrak{k} + \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} + \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}.$$

$\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ をとる．K と H でそれぞれ $\mathfrak{k}$ と $\mathfrak{h}$ に対応する G の解析的部分群を表す．$A = \exp \mathfrak{a}$ とおくと

$$G = KAH.$$

(A) G は単純で，θ_1 と θ_2 は G の内部自己同型写像で移り合わない．

(B) (小池 [15]) U はコンパクト連結単純リー群，σ は U の対合であり，$G = U \times U$ かつ

$$\theta_1(g,h) = (h,g), \quad \theta_2(g,h) = (\sigma(g), \sigma(h)).$$

(C) U はコンパクト連結単純リー群，σ は U の外部型の対合であり，$G = U \times U$ かつ

$$\theta_1(g,h) = (h,g), \quad \theta_2(g,h) = (\sigma^{-1}(h), \sigma(g)).$$

(B) の場合，$F(\theta_2, G) = F(\sigma, U) \times F(\sigma, U)$．$M_1$ と U を自然に同一視すると，

$$(a,b) \cdot x = axb^{-1} \qquad (x \in U, a, b \in F(\sigma, U)).$$

(C) の場合の Hermann 作用は **σ-作用**と呼ばれる．θ_2 の G 内での固定点集合は $F(\theta_2, G) = \{(g, \sigma(g)) \mid g \in U\} \cong U$．$M_1$ と U を自然に同一視すると，σ-作用は U の U-自身への次で定義される作用になる：

$$g \cdot x = gx\sigma(x)^{-1}.$$

(A), (B) または (C) を満たすコンパクト対称三対 (G, F_1, F_2) から $\mathfrak{a}$ の重複度付き対称三対 $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ を構成しよう．$\theta_1\theta_2 = \theta_2\theta_1$ だから，

$$\mathfrak{g} = (\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_2) \oplus (\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2) \oplus (\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{p}_2) \oplus (\mathfrak{k}_2 \cap \mathfrak{p}_1).$$

$\alpha \in \mathfrak{a}$ に対して，$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の部分空間 $\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha)$ を

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha) = \{X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \mid [H, X] = \sqrt{-1}\langle \alpha, H \rangle X \ (H \in \mathfrak{a})\}$$

と定め，$\tilde{\Sigma} = \{\alpha \in \mathfrak{a} - \{0\} \mid \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha) \neq \{0\}\}$ とおく．$\epsilon = \pm 1$ に対して，$\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha)$ の部分空間 $\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, \epsilon)$ を

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, \epsilon) = \{X \in \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha) \mid \theta_1\theta_2 X = \epsilon X\}.$$

と定める．$\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha)$ は $\theta_1\theta_2$-不変だから，

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha) = \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, 1) \oplus \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, -1)$$

が成り立つ.

$$\Sigma = \{\alpha \in \tilde{\Sigma} \mid \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, 1) \neq \{0\}\}, \quad W = \{\alpha \in \tilde{\Sigma} \mid \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, -1) \neq \{0\}\}$$

とおく. $\lambda \in \Sigma$ と $\alpha \in W$ に対して

$$m(\lambda) = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \lambda, 1), \quad n(\alpha) = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \alpha, -1)$$

とおく. このとき, 次の定理が得られる:

定理 2.1. $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ は $\mathfrak{a}$ の重複度付き対称三対である. [2] 逆に全ての対称三対は (A) または (B) を満たすコンパクト対称三対から得られる.

G の二つの閉部分群 G_{12} と F_{12} を

$$G_{12} = F(\theta_1\theta_2, G), \quad F_{12} = \{g \in G_{12} \mid \theta_1(g) = g\}$$

と定める. G_{12} と F_{12} のリー環は

$$\mathfrak{g}_{12} = (\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_2) \oplus (\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2), \quad \mathfrak{k}_{12} = \mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_2$$

で与えられる. コンパクト対称対 (G_{12}, F_{12}) の $\mathfrak{a}$ に関する制限ルート系は Σ に一致する.

条件 (A) を満たす (G, F_1, F_2) から構成される対称三対 $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ は次の表で与えられる ([10][3]).

---

[2] 具体的に与えたコンパクト対称三対 (G, F_1, F_2) に対して, 重複度付き対称三対 $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ の型も決定できている. (G, F_1, F_2) が条件 (C) を満たし, G が例外型のとき, 重複度付き対称三対 $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ を決定するために Vogan 図形を用いた (Vogan 図形の定義については [14] を参照).

[3] 文献 [10] では $(G, F_1, F_2) = (SO(4r+2), S(O(2r+1) \times O(2r+1)), U(2r+1))$ が抜けている.

$(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$	条件 (A) を満たす (G, F_1, F_2)
(I-B_r)	$(SO(r+s+t), SO(r+s) \times SO(t), SO(r) \times SO(s+t))$ $(r < t, 1 \leq s)$
(I-C_r)	$(SO(4r), S(O(2r) \times O(2r)), U(2r))$
(I'-C_r)	$(SU(2r), SO(2r), S(U(r) \times U(r))$
(I-C_3)	$(E_7, SU(8), E_6 \cdot U(1))$
(I-BC_r-A_1^r)	$(SU(r+s+t), S(U(r+s) \times U(t)), S(U(r) \times U(s+t)))$ $(r < t, 1 \leq s)$ $(Sp(r+s+t), Sp(r+s) \times Sp(t), Sp(r) \times Sp(s+t))$ $(r < t, 1 \leq s)$ $(SO(4r+4), U(2r+2), U(2r+2)')$
(I-BC_r-B_r)	$(SO(2r+2s), S(O(2r) \times O(2s)), U(r+s))$ $(r < s)$
(I-BC_2-B_2)	$(E_6, SU(6) \cdot SU(2), SO(10) \cdot U(1))$ $(E_7, SO(12) \cdot SU(2), E_6 \cdot U(1))$
(I-F_4)	$(E_6, Sp(4), SU(6) \cdot SU(2))$ $(E_7, SU(8), SO(12) \cdot SU(2))$ $(E_8, SO(16), E_7 \cdot SU(2))$
(II-BC_r)	$(SU(r+s), SO(r+s), S(U(r) \times U(s))$ $(r < s)$ $(SO(4r+2), S(O(2r+1) \times O(2r+1)), U(2r+1))$
(II-BC_2)	$(E_6, Sp(4), SO(10) \cdot U(1))$
(III-A_r)	$(SU(2r+2), Sp(r+1), SO(2r+2))$
(III-A_2)	$(E_6, Sp(4), F_4)$
(III-C_r)	$(SU(4r), S(U(2r) \times U(2r)), Sp(2r))$ $(Sp(2r), U(2r), Sp(r) \times Sp(r))$
(III-BC_r)	$(SU(2r+2s), S(U(2r) \times U(2s)), Sp(r+s))$ $(r < s)$ $(Sp(r+s), U(r+s), Sp(r) \times Sp(s))$ $(r < s)$
(III-BC_1)	$(E_6, SU(6) \cdot SU(2), F_4)$ $(E_6, SO(10) \cdot U(1), F_4)$ $(F_4, Sp(3) \cdot Sp(1), SO(9))$

上の表の $(SO(4r+4), U(2r+2), U(2r+2)')$ において，次の記号を用

いた．

$$U(2r+2)=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x\end{pmatrix}\in SO(4r+4)\right\},$$
$$U(2r+2)'=\{g\in SO(4r+4)\mid J'_{2r}gJ'^{-1}_{2r}=g\},$$
$$\text{ここで}\quad J'_{2r}=\left(\begin{array}{cc|cc} & & E_{2r-1} & \\ & & & -1 \\ \hline -E_{2r-1} & & & \\ & 1 & & \end{array}\right).$$

$U(2r+2)$ と $U(2r+2)'$ は $SO(4r+4)$ の内部自己同型写像で互いに移り合わないことに注意する ([9, Pro. 4.39])．

条件 (C) を満たす (G,F_1,F_2) から構成される対称三対 $(\tilde{\Sigma},\Sigma,W)$ は次の表で与えられる．

$(U,F(\sigma,U))$	$(\tilde{\Sigma},\Sigma,W)$
$(SU(2m),SO(2m))\ (m\geq 2)$	(I'-C_m)
$(SU(2m+1),SO(2m+1))\ (m\geq 1)$	(II-BC_m)
$(SU(2m),Sp(m))$	(I-C_m)
$(SO(2m+2n+2),SO(2m+1)\times SO(2n+1))$	(I'-B_{m+n})
$(E_6,Sp(4))$	(I'-F_4)
(E_6,F_4)	(I-F_4)

3 Hermann 作用

(G,F_1,F_2) を前節の条件 (A),(B) または (C) のどれか一つを満たすコンパクト対称三対とする．$(\tilde{\Sigma},\Sigma,W)$ で (G,F_1,F_2) から構成される $\mathfrak{a}$ の重複度付き対称三対を表す．軌道 $F_2\pi_1(a)$ を考察するためには $a=\exp H\ (H\in\mathfrak{a})$ と仮定してよい．$\mathfrak{a}$ の二点がアフィンワイル群 $\tilde{W}(\tilde{\Sigma},\Sigma,W)$ の元で移り合うときには，それらは同一の軌道を定める．よって，軌道空間 $F_2\backslash G/F_1$ はセル P_0 の閉包と同一視される，すなわち，[4]

$$F_2\backslash G/F_1\cong\overline{P_0}.$$

$F_2\pi_1(\exp H)$ が正則軌道，極小軌道，全測地的軌道になるための必要十分条件は，H がそれぞれ正則点，極小点，全測地点になることである．さらに次が成り立つ．

[4] この結果は田崎により導入された多重ケーラー角度に関する結果の一般化である．

定理 3.1. 軌道 $F_2\pi_1(\exp H)$ が全測地的になるための必要十分条件は，それが鏡映部分多様体になることである．

鏡映部分多様体の概念は Leung[16] により導入された：$\tilde{M}$ をリーマン多様体とする．$\tilde{M}$ の対合的等長変換の固定点集合を**鏡映部分多様体**という．鏡映部分多様体は全測地的になる．

定理 3.2. 任意の $\Delta \subset \Pi \cup \{\tilde{\alpha}\}$ に対してただ一つ $H \in P_0^{\Delta}$ が存在して $F_2\pi_1(\exp H)$ は $M_1 = G/F_1$ の極小軌道になる．H がセルの頂点でない極小点ならば，$F_2\pi_1(\exp H)$ は極小部分多様体として不安定である．

注意　H がセルの頂点のとき，$F_2\pi_1(\exp H)$ の極小部分多様体としての安定性は非自明である．

Harvey-Lawson[5] は austere 部分多様体の概念を導入した: L をリーマン多様体 M の部分多様体とする．A で L の形作用素を表す．このとき，L が **austere 部分多様体**であるとは，各点 $x \in L$ の各法ベクトル $\xi \in T_x^{\perp}L$ に対して，A_ξ の固有値全体のなす集合が重複度も含めて -1 倍に関して不変になるときをいう．明らかに austere 部分多様体は極小部分多様体である．Harvey-Lawson[5] は球面内のいくつかの austere 部分多様体を構成した．Bryant[3] は austere 代数という概念を用いてユークリッド空間内のいくつかの austere 部分多様体を構成した．以下の命題から Hermann 作用は多くの austere 軌道を持つことがわかる．一方，コンパクト対称空間へのイソトロピー群の作用については，austere 軌道は全測地的軌道に限られる．

命題 3.3. 軌道 $F_2\pi_1(\exp H)$ が austere になるための必要十分条件は H が austere 点となることである．

[11] において我々は弱鏡映部分多様体の概念を導入した．それは鏡映部分多様体の概念の拡張である．M をリーマン多様体 $\tilde{M}$ の部分多様体とする．各点 $x \in M$ における各法ベクトル $\xi \in T_x^{\perp}M$ に対して，$\tilde{M}$ の等長変換 σ_ξ が存在して

$$\sigma_\xi(x) = x, \quad (d\sigma_\xi)_x\xi = -\xi, \quad \sigma_\xi(M) = M,$$

を満たすとき，M を $\tilde{M}$ の**弱鏡映部分多様体**という．弱鏡映部分多様体の形作用素を A で表すと

$$(d\sigma_\xi)_x^{-1}A_\xi(d\sigma_\xi)_x = -A_\xi$$

が成り立つので，弱鏡映部分多様体は austere である．一般に，

$$\text{鏡映} \Rightarrow \text{弱鏡映} \Rightarrow \text{austere} \Rightarrow \text{極小}.$$

が成り立つ．[11] において我々はコンパクト対称の線形イソトロピー群の軌道を接空間内の超球面の部分多様体とみなしたとき，austere 軌道と弱鏡映軌道を分類した．Hermann 作用の軌道については austere 軌道が分類されているにもかかわらず，弱鏡映軌道は未だ分類されていない．

4 ルート系に付随する特性元

次の節で述べるようにコンパクト型 Hermite 対称空間の複素構造 J は任意のルート λ に対して $\langle \lambda, J\rangle = 0, \pm 1$ を満たす．これを踏まえてルート系に付随する特性元を以下のように定義する．この節の内容は次の節で使われる．

$\mathfrak{a}$ を内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を持つ有限次元線形空間，R を $\mathfrak{a}$ のルート系とする．$J \in \mathfrak{a} - \{0\}$ が R に付随する**第一種の特性元**または簡単に**特性元**であるとは，任意の $\lambda \in R$ に対して $\langle \lambda, J\rangle = 0, \pm 1$ となるときをいう．J が特性元ならば $-J$ も特性元である．$W(R)$ で R のワイル群を表す．J が特性元ならば，任意の $s \in W(R)$ に対して sJ も特性元である．以下，R を既約と仮定する．特性元 J に対して R の基本系 $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\}$ を任意の i に対して $\langle \alpha_i, J\rangle = 0, 1$ を満たすように選べる．R の最高ルート δ を $\delta = \sum m_i\alpha_i$ と表示する．$R = E_8, F_4, G_2$ ならば，ある i に対して $m_i \geq 2$ となるので特性元は存在しない．

命題 4.1. 既約ルート系 R に付随する特性元 J のワイル群 $W(R)$ による軌道 $W(R)J$ は $W(R)$ の作用に関して二点等質空間になる．

ここで，$W(R)J$ が $W(R)$ の作用に関して**二点等質**であるとは，$\|x-y\| = \|x'-y'\|$ を満たす二つの組 $x, y \in W(R)J$ と $x', y' \in W(R)J$ に対して，$\sigma \in W(R)$ が存在して $\sigma x = x'$ と $\sigma y = y'$ が成り立つときをいう．集合 $\{d_1, \ldots, d_t\}$ $(0 < d_1 < \cdots < d_t)$ を

$$\{d_1, \ldots, d_t\} = \{\|sJ - J\| \mid s \in W(R)\} - \{0\}.$$

と定めると，$W(R)J$ が二点等質になるための必要十分条件はイソトロピー部分群 $\{s \in W(R) \mid sJ = J\}$ が各 $\{sJ \mid \|sJ - J\| = d_i,\ s \in W(R)\}$

に推移的に働くことである．$Ch(R)$ で R に随伴する特性元全部の集合を表す．後述の定理 5.1 と定理 5.2 によると $\#(W(R)J)$ の情報も有用なので，以下の例では各既約ルート系 R に対して，$Ch(R)$ と $\#(W(R)J)$ を与えておく．正のルート全部を [2] と同じ記号で表す．$\{e_1, \ldots, e_r\}$ で $\mathbb{R}^r$ の標準正規直交基底を表す．

例 4.2. $R = B_r = \{\pm e_i \pm e_j, \pm e_i\}$ のとき，$J = e_1$ とおくと，

$$Ch(R) = W(R)J = \{\pm e_1, \ldots, \pm e_r\}.$$

このとき，$\#(W(R)J) = 2r$, $t = 2$, $d_1 = \sqrt{2}$, $d_2 = 2$ となる．

例 4.3. $R = C_r = \{\pm e_i \pm e_j, \pm 2e_i\}$ のとき，

$$J = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + \cdots + e_r)$$

とおくと，

$$Ch(R) = W(R)J = \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r} \epsilon_i e_i \;\middle|\; \epsilon_i = \pm 1 \right\}.$$

このとき，$\#(W(R)J) = 2^r$, $t = r$, $d_i = \sqrt{i}$ $(1 \leq i \leq r)$ となる．

例 4.4. $R = BC_r = \{\pm e_i \pm e_j, \pm e_i, \pm 2e_i\}$ のとき，例 4.2 と例 4.3 から特性元は存在しない．

例 4.5. $R = D_r = \{\pm e_i \pm e_j\}$ のとき，特性元 J_1, J_2, J_3 を

$$J_1 = e_1, \quad J_2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{r-1} e_j - e_r\right), \quad J_3 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r} e_j$$

と定めると，

$$\begin{aligned}
W(R)J_1 &= \{\pm e_1, \ldots, \pm e_r\}, \\
W(R)J_2 &= \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{r} \epsilon_j e_j \;\middle|\; \epsilon_j = \pm 1,\ \epsilon_1 \cdots \epsilon_r = -1 \right\}, \\
W(R)J_3 &= \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{r} \epsilon_j e_j \;\middle|\; \epsilon_j = \pm 1,\ \epsilon_1 \cdots \epsilon_r = 1 \right\}
\end{aligned}$$

であり，$Ch(R) = W(R)J_1 \cup W(R)J_2 \cup W(R)J_3$. よって，$\#(W(R)J_1) = 2r$, $\#(W(R)J_2) = \#(W(R)J_3) = 2^{r-1}$.

例 4.6. $R = A_r = \{\pm(e_i - e_j)\}$ のとき，特性元 $J_1, \ldots, J_r$ を

$$J_i = (e_1 + \cdots + e_i) - \frac{i}{r+1}\sum_{j=1}^{r+1} e_j$$

と定めると

$$W(R)J_i = \left\{ \sum_{j\in A} e_j - \frac{i}{r+1}\sum_{j=1}^{r+1} e_j \;\middle|\; A \in P_i(r+1) \right\},$$

ここで，$P_i(r+1) = \{A \subset \{1, 2, \ldots, r+1\} \mid \#A = i\}$ とおいた．このとき，$Ch(R) = W(R)J_1 \cup \cdots \cup W(R)J_r$ と $\#(W(R)J_i) = \binom{r+1}{i}$ が成り立つ．

例 4.7. $R = E_6$ のとき，特性元 J_1，J_2 を

$$J_1 = \frac{2}{3}(e_8 - e_7 - e_6) = \frac{1}{3}(4\alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3 + 6\alpha_4 + 4\alpha_5 + 2\alpha_6),$$
$$J_2 = \frac{1}{3}(e_8 - e_7 - e_6) + e_5 = \frac{1}{3}(2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6).$$

と定めると，

$$Ch(R) = W(R)J_1 \cup W(R)J_2, \quad W(R)(-J_2) = W(R)J_1.$$

このとき，

$$\#(W(R)J_i) = \frac{\#(W(\mathfrak{e}_6))}{\#(W(\mathfrak{so}(10) + \mathbb{R}))} = \frac{2^7 \cdot 3^4 \cdot 5}{2^4 \cdot 5!} = 3^3$$

と $t = 2$, $d_1 = 2$, $d_2 = 4$ が成り立つ．

例 4.8. $R = E_7$ のとき，特性元 J を

$$\langle \alpha_7, J \rangle = 1, \quad \langle \alpha_i, J \rangle = 0 \ (i \neq 7).$$

と定まると，$Ch(R) = W(R)J$. このとき，

$$\#(W(R)J) = \frac{\#(W(\mathfrak{e}_7))}{\#(W(\mathfrak{e}_6 + \mathbb{R}))} = \frac{2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7}{2^7 \cdot 3^4 \cdot 5} = 2^3 \cdot 7,$$

$t = 3$, $d_1 = \sqrt{2}$, $d_2 = 2$, $d_3 = \sqrt{6}$ が成り立つ．

5 二つの実形の交叉

この節の内容は田中真紀子と田崎博之との共同研究である．この節ではコンパクト型既約 Hermite 対称空間内の二つの実形の交叉について考察する．

はじめにコンパクト型既約 Hermite 対称空間をあるユークリッド空間の部分多様体と自然に見る方法について説明しよう．G をコンパクト連結単純 Lie 群とし，そのリー環を $\mathfrak{g}$ と表す．$\mathfrak{g}$ 上の $\mathrm{Ad}(G)$-不変内積 $\langle , \rangle$ をとる．$J \in \mathfrak{g} - \{0\}$ を $(\mathrm{ad}J)^3 = -\mathrm{ad}J$ を満たすようにとる．随伴作用による J の軌道 $M = \mathrm{Ad}(G)J \subset \mathfrak{g}$ は $\langle , \rangle$ から誘導される計量に関してコンパクト型既約 Hermite 対称空間の構造を持つ．G の閉部分群 K を

$$K = \{k \in G \mid \mathrm{Ad}(k)J = J\}$$

と定める．K のリー環 $\mathfrak{k}$ は

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid [J, X] = 0\}$$

によって与えられる．部分空間

$$\mathfrak{m} = \{[J, X] \mid X \in \mathfrak{g}\}$$

は $\mathfrak{k}$ の直交補空間なので，$\mathfrak{g}$ の直交直和分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ が得られる．内部自己同型写像 $e^{\pi \mathrm{ad}J}$ は対合的である．$\mathfrak{k}$ と $\mathfrak{m}$ はそれぞれ $e^{\pi \mathrm{ad}J}$ の $(+1)$-固有空間と (-1)-固有空間に一致する．作用素 $\mathrm{ad}J$ は $\mathfrak{m}$ 上の $\mathrm{Ad}(K)$-不変複素構造を定め，$\mathfrak{m}$ は M の原点 J における接空間と同一視されるので，$\mathrm{ad}J$ は M 上の $\mathrm{Ad}(G)$-不変複素構造を定める．逆に任意のコンパクト型既約 Hermite 対称空間はこのようにして得られることが知られている．

M の対合的反正則等長変換の不動点集合を**実形**という．実形は連結な全測地的 Lagrange 部分多様体になる．Leung [17] と竹内 [19] はコンパクト型既約 Hermite 対称空間の実形を分類した．この節では M 内の二つの実形が離散的に交わるための必要十分条件を調べ，交叉が離散的な場合に，その交叉を記述する．任意の二つの実形は必ず交わる．$L_1 = F(\tau_1, M)$ と $L_2 = F(\tau_2, M)$ を M 内の二つの実形とする．ここで，τ_i は F_i を定める対合的反正則等長変換である．G 上の対合 θ_i を $\theta_i(g) = \tau_i g \tau_i^{-1}$ と定める．$F_i = F(\theta_i, G)$ とおくと，(G, F_1, F_2) はコンパクト対称三対になる．交叉 $L_1 \cap \mathrm{Ad}(a)L_2$ $(a \in G)$ を調べるためには，$\tau_1\tau_2 = \tau_2\tau_1$ と仮定してよいことが，コンパクト型既約 Hermite 対称空間の分類からわかる．$\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ の

J を含む極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ をとる．$a \in G$ は $\exp\mathfrak{a}$ の元と仮定してよい．Theorem 4.3，[23] より

$$L_1 = M \cap \mathfrak{p}_1, \quad \mathrm{Ad}(a)L_2 = M \cap \mathrm{Ad}(a)\mathfrak{p}_2,$$
$$L_1 \cap \mathrm{Ad}(a)L_2 = M \cap (\mathfrak{p}_1 \cap \mathrm{Ad}(a)\mathfrak{p}_2)$$

が成り立つ．L_1 と L_2 が合同のとき，すなわち，$g \in G$ が存在して $L_2 = \mathrm{Ad}(g)L_1$ となるときには $L_1 = L_2$ と仮定してよい．次の二通りに場合分けをする：

(1) $L_1 = L_2$.

(2) L_1 と L_2 は互いに合同でない．

5.1 合同な二つの実形の交叉 ($L_1 = L_2$ の場合)

$L = L_1 = L_2, F = F_1 = F_2$ などとおく．交叉 $L \cap aL$ $(a \in G)$ について考察する．$a = \exp H$ $(H \in \mathfrak{a})$ と仮定してよい．R でコンパクト対称対 (G, F) の $\mathfrak{a}$ に関する制限ルート系を表す．

定理 5.1. [12] 交叉 $L \cap \mathrm{Ad}(a)L$ が離散的になるための必要十分条件は任意の $\lambda \in R$ に対して $\langle\lambda, H\rangle \notin \pi\mathbb{Z}$ となることである．このとき，

$$L \cap \mathrm{Ad}(a)L = M \cap \mathfrak{a} = W(R)J, \tag{5.2}$$

ここで，$M \cap \mathfrak{a}$ は L の大対蹠集合である．集合 $W(R)J$ は $W(R)$ の作用に関して二点等質である．

対蹠集合や大対蹠集合の定義を説明するために，s_x で $x \in L$ の点対称を表す．部分集合 $S \subset L$ が**対蹠集合**であるとは，任意の $x, y \in S$ に対して $s_x(y) = y$ となるときをいう．L の 2-number $\#_2L$ とは，最も元の個数の多い対蹠集合の元の個数である．L の対蹠集合が**大対蹠集合**であるとは，その元の個数が $\#_2L$ となるときをいう．これらの概念は Chen-Nagano [4] により導入された．Bott([1]) により $M \cap \mathfrak{a} = W(R)J$ となることが知られている．竹内は $W(R)$ が L の大対蹠集合に推移的に働くことを示した．

M	L	$\#(L \cap \mathrm{Ad}(a)L)$
$G_k(\mathbb{C}^n)$	$G_k(\mathbb{R}^n)$	$\binom{n}{k}$
$G_{2k}(\mathbb{C}^{2n})$	$G_k(\mathbb{H}^n)$	$\binom{n}{k}$
$G_n(\mathbb{C}^{2n})$	$U(n)$	2^n
$Q_n(\mathbb{C})$	$S^{k,n-k}$	$2k+2$
$SO(4n)/U(2n)$	$U(2n)/Sp(n)$	2^n
$SO(2n)/U(n)$	$SO(n)$	2^{n-1}
$Sp(2n)/U(2n)$	$Sp(n)$	2^n
$Sp(n)/U(n)$	$U(n)/O(n)$	2^n
$E_6/S^1 \cdot Spin(10)$	$G_2(\mathbb{H}^4)/\mathbb{Z}_2$	3^3
$E_6/S^1 \cdot Spin(10)$	$F_4/Spin(9)$	3
$E_7/S^1 \cdot E_6$	$(SU(8)/Sp(4))/\mathbb{Z}_2$	$2^3 \cdot 7$
$E_7/S^1 \cdot E_6$	$S^1 \cdot E_6/F_4$	2^3

5.2 合同でない二つの実形の交叉

L_1 と L_2 が合同でないと仮定する．$\tau_1\tau_2 = \tau_2\tau_1$ としてよい．$(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ で (G, F_1, F_2) から構成される $\mathfrak{a}$ の対称三対を表す．$\mathfrak{p}_i$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}_i$ を $\mathfrak{a}$ を含むようにとる．$\mathfrak{a}$ の極大性から $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2$ となる．R_i で (G, F_i) の $\mathfrak{a}_i$ に関する制限ルート系を表す．交叉 $L_1 \cap aL_2$ $(a \in G)$ について考察する．$a = \exp H$ $(H \in \mathfrak{a})$ と仮定してよい．

定理 5.2. 交叉 $L_1 \cap \mathrm{Ad}(a)L_2$ $(a = \exp H)$ が離散的になるための必要十分条件は H が $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ の正則点になることである．このとき，

$$L_1 \cap \mathrm{Ad}(a)L_2 = W(\tilde{\Sigma})J = W(R_1)J \cap \mathfrak{a} = W(R_2)J \cap \mathfrak{a}.$$

$L_1 \cap \mathrm{Ad}(a)L_2$ は L_i $(i = 1, 2)$ の対蹠集合である．

例 5.3.

$$(M, L_1, L_2) = (G_{2m}(\mathbb{C}^{4m}), G_m(\mathbb{H}^{2m}), U(2m)),$$

のとき，$\tilde{\Sigma} = C_m$，$R_1 = A_{2m-1}$，$R_2 = C_{2m}$ であり，

$$\#(L_1 \cap \mathrm{Ad}(a)L_2) = 2^m, \quad \#(W(R_1)J) = \binom{2m}{m}, \quad \#(W(R_2)J) = 2^{2m}.$$

定理 5.2 から直ちに次の系が従う．

系 5.4. 交叉 $L_1 \cap \mathrm{Ad}(a)L_2$ が離散的であると仮定する．もし，$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1$ ならば，$\tilde{\Sigma} = R_1$ であり $L_1 \cap \mathrm{Ad}(a)L_2 = W(R_1)J$ が成り立つ．

以下の例は系 5.4 の仮定を満たす．

例 5.5.

$$(M, L_1, L_2) = (E_6/S^1 \cdot Spin(10), F_4/Spin(9), G_2(\mathbb{H}^4)/\mathbb{Z}_2)$$

のとき，

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}, \quad \tilde{\Sigma} = R_1 = A_2, \quad R_2 = E_6$$

であり，

$$\begin{aligned} &W(\tilde{\Sigma})J = W(R_1)J = W(R_2)J \cap \mathfrak{a}, \\ &\#(W(\tilde{\Sigma})J) = 3, \quad \#(W(R_2)J) = 3^3. \end{aligned}$$

例 5.6.

$$(M, L_1, L_2) = (G_{2q}(\mathbb{C}^{2(m+q)}), G_q(\mathbb{H}^{m+q}), G_{2q}(\mathbb{R}^{2(m+q)}))$$

のとき，

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}, \quad \tilde{\Sigma} = R_1 = A_{m+q-1}, \quad R_2 = A_{2(m+q)-1}$$

であり，

$$\begin{aligned} &W(\tilde{\Sigma})J = W(R_1)J = W(R_2)J \cap \mathfrak{a}, \\ &\#(W(\tilde{\Sigma})J) = \binom{m+q}{q}, \quad \#(W(R_2)J) = \binom{2m+2q}{2m}. \end{aligned}$$

例 5.7.

$$(M, L_1, L_2) = (Sp(2m)/U(2m), Sp(m), U(2m)/O(2m))$$

のとき，$\tilde{\Sigma} = R_1 = C_m$，$R_2 = C_{2m}$ であり，

$$\begin{aligned} &L_1 \cap \mathrm{Ad}(a)L_2 = W(R_1)J = W(R_2)J \cap \mathfrak{a}, \\ &\#(L_1 \cap \mathrm{Ad}(a)L_2) = 2^m, \quad \#(W(R_2)J) = 2^{2m}. \end{aligned}$$

例 5.8.

$$(M, L_1, L_2) = (E_7/S^1 \cdot E_6, S^1 \cdot E_6/F_4, (SU(8)/Sp(4))/\mathbb{Z}_2)$$

のとき，$\tilde{\Sigma} = R_1 = C_3$, $R_2 = E_7$ であり，

$$L_1 \cap \mathrm{Ad}(a)L_2 = W(R_1)J = W(R_2)J \cap \mathfrak{a},$$
$$\#(L_1 \cap \mathrm{Ad}(a)L_2) = 2^3, \quad \#(W(R_2)J) = 2^3 \cdot 7.$$

例 5.9.

$$(M, L_1, L_2) = (G_n(\mathbb{C}^{2n}), U(n), G_n(\mathbb{R}^{2n})),$$

のとき，$\tilde{\Sigma} = R_1 = C_n$, $R_2 = A_{2n-1}$ であり，

$$L_1 \cap \mathrm{Ad}(a)L_2 = W(R_1)J = W(R_2)J \cap \mathfrak{a},$$
$$\#(L_1 \cap \mathrm{Ad}(a)L_2) = 2^n, \quad \#(W(R_2)J) = \binom{2n}{n}.$$

例 5.10.

$$(M, L_1, L_2) = (Q_{r+s+t-2}(\mathbb{C}), S^{r-1,s+t-1}, S^{r+s-1,t-1}) \quad (s > 0,\ r < t)$$

のとき，

$$\tilde{\Sigma} = R_1 = B_1, \quad R_2 = \begin{cases} B_{\min\{r+s,t\}} & (r+s \neq t) \\ D_t & (r+s = t) \end{cases}$$

であり，

$$L_1 \cap \mathrm{Ad}(a)L_2 = W(R_1)J = W(R_2)J \cap \mathfrak{a},$$
$$\#(L_1 \cap \mathrm{Ad}(a)L_2) = 2r, \quad \#(W(R_2)J) = 2\min\{r+s, t\}.$$

例 5.11.

$$(M, L_1, L_2) = (SO(4m)/U(2m), U(2m)/Sp(m), SO(2m))$$

のとき，$\tilde{\Sigma} = R_1 = C_m$, $R_2 = D_m$ であり，

$$L_1 \cap \mathrm{Ad}(a)L_2 = W(R_1)J = W(R_2)J \cap \mathfrak{a},$$
$$\#(L_1 \cap \mathrm{Ad}(a)L_2) = 2^m, \quad \#(W(R_2)J) = 2^{2m+1}.$$

例 5.3, 例 5.5～ 例 5.11 でコンパクト型既約エルミート対称空間 M 内の合同でない二つの実形 L_1, L_2 は尽くされる．

参考文献

[1] R. Bott, *The geometry and representation theory of compact Lie groups*, Representation theory of Lie groups, (1970), 65–90, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **34**.

[2] N. Bourbaki, Groupes et algebres de Lie, Hermann, Paris, 1975.

[3] R. L. Bryant, *Some remarks on the geometry of austere manifolds*, Bol. Soc. Bras. Mat., **21** (2) (1991), 133–157.

[4] B.-Y.-Chen and T. Nagano, *A Riemannian geometric invariant and its applications to Borel and Serre*, Trans. Amer. ¡ath. Soc. **308** (1988), 273–297.

[5] R. Harvey and H. B. Lawson, Jr., *Calibrated geometries*, Acta Math., **148** (1982), 47–157.

[6] E. Heintze, R. S. Palais, C. Therng and G. Thorbergsson, *Hyperpolar actions on symmetric spaces*, Geometry, topology, & physics, Conf. Proc. Lecture Notes Geom. Topology, IV, Int. Press, Cambridge, MA, 1995, pp. 214–245.

[7] D.Hirohashi, O. Ikawa and H. Tasaki, *Orbits of isotropy groups of compact symmetric spaces*, Tokyo J. Math. **24** (2001) 407–428.

[8] D. Hirohashi, H. Tasaki, H. Song and R. Takagi, *Minimal orbits of the isotropy groups of symmetric spaces of compact type*, Differential geometry and its applications **13** (2000) 167–177.

[9] O. Ikawa, *The geometry of symmetric triad and orbit spaces of Hermann actions* J. Math. Soc. Japan **63** (2011), 79–136.

[10] O. Ikawa, *A note on symmetric triad and Hermann action*, Proceedings of the workshop on differential geometry and submanifolds and its related topics, Saga, August 4–6, 2012, 220–229.

[11] O. Ikawa, T. Sakai and H. Tasaki, *Weakly reflective submanifolds and austere submanifolds*, J. Math. Soc. Japan **61** No. 2 (2009) pp. 437–481.

[12] O. Ikawa, M. Tanaka and H. Tasaki, The fixed point set of a holomorphic isometry, the intersection of two real forms in a Hermitian symmetric space of compact type and symmetric triads, in preparation.

[13] M. F.-Jensen, *Spherical functions on a real semisimple Lie group*, Journal of functional analysis **30**, 106–146 (1978).

[14] Anthony W. Knapp, Lie groups beyond an introduction, Birkhäuser.

[15] N. Koike, Examples of certain kind of minimal orbits of Hermann actions, Hokkaido Math. J. **43** (2014), 21–42.

[16] D. S. P. Leung, *The reflection principle for minimal submanifolds of Riemannian symmetric spaces*, J. Differential Geometry, **8** (1973) 153–160.

[17] D. S. P. Leung, *Reflective submanifolds. IV, Classification of real forms of Hermitian symmetric spaces*, J. Differential Geom., **14** (1979), 179–185.

[18] T. Matsuki, *Classification of two involutions on compact semisimple Lie groups and root systems*, J, Lie Theory, **12** (2002), 41–68.

[19] M. Takeuchi, *Stability of certain minimal submanifolds of compact Hermitian symmetric spaces*, Tohoku Math. Journ. **36** (1984), 293–314.

[20] M. Takeuchi, *Two-number of symmetric R-spaces*, Nagoya Math. J. **115** (1989), 43–46.

[21] H. Tamaru, *The local orbit types of symmetric spaces under the actions of the isotropy subgroups*, Differential Geom. Appl. 11 (1999), no. 1, 29–38.

[22] M. S. Tanaka and H. Tasaki, The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, J. Math. Soc. Japan **64** (2012), 1297–1332.

[23] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Antipodal sets of symmetric R-spaces, Osaka J. Math. **50** (2013), 161–169.

[24] M. S. Tanaka and H. Tasaki, The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type II, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[25] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Correction to: "The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type", to appear in J. Math. Soc. Japan.