数理解析研究所講究録
第 1932 巻 2015 年 25-29

関数空間上の全射等距離写像

新潟大学・理学部数学科 * 三浦　毅
Takeshi Miura
Department of Mathematics, Faculty of Science
Niigata University

§1. 導入

等距離写像の研究は古くからなされており，現在でも精力的に行われている関数解析学の重要な問題である．Banach [2] はコンパクト距離空間 Q_1, Q_2 に対して，$C_{\mathbb{R}}(Q_1)$ から $C_{\mathbb{R}}(Q_2)$ への maximum norm $\|\cdot\|$ に関する全射等距離写像の構造を決定した．ここに $C_{\mathbb{R}}(Q)$ は Q 上の実数値連続関数全体のなす Banach 空間とし，写像 $S: C_{\mathbb{R}}(Q_1) \to C_{\mathbb{R}}(Q_2)$ が等距離写像とは

$$\|S(f) - S(g)\| = \|f - g\| \qquad (f, g \in C_{\mathbb{R}}(Q_1))$$

をみたすことである．同様にして，一般の線形ノルム空間の間の等距離写像も定義される．Stone [12] は Banach による全射等距離写像の特徴付けを，Q_1, Q_2 が距離付け可能とは限らないコンパクト Hausdorff 空間に対して証明した．Banach と Stone は実数値関数のなす Banach 空間上の等距離写像を考察しているが，複素数値関数のなす Banach 空間の場合を含め Banach-Stone の定理として知られている．Banach [2], Stone [12] ともに全射等距離写像 S の線形性を仮定せずに S の構造を決定しているが，近年の等距離写像の研究では線形性を仮定することが多いようである．実際，Banach-Stone の定理でさえ複素線形性を仮定して述べられることが一般的であるように思われる．

以下では $C(X)$ により，コンパクト Hausdorff 空間 X 上の複素数値連続関数全体のなす Banach 空間を表す．

*〒950-2181 新潟市西区五十嵐 2 の町 8050

Theorem 1 (Banach-Stone theorem) 全射複素線形等距離写像 $S: C(X) \to C(Y)$ に対して，連続写像 $\alpha: Y \to \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ および同相写像 $\phi: Y \to X$ が存在して

$$S(f)(y) = \alpha(y) f(\phi(y)) \qquad (f \in C(X),\, y \in Y)$$

が成り立つ.

Banach-Stone の定理は，その後様々な方向に拡張されている．例えば Nagasawa [11] と de Leeuw, Rudin and Wermer [4] は独立に，関数環の間の全射複素線形等距離写像を調べている．ここで A がコンパクト Hausdorff 空間 X 上の関数環であるとは，A は $C(X)$ の閉部分多元環であり，定数関数 1 を含み，次の意味で X の点を分離することである：異なる点 $x, y \in X$ に対して $f(x) \neq f(y)$ をみたす $f \in A$ が存在することである.

Araujo and Font [1] は X 上の関数空間の間の全射複素線形等距離写像の構造を解明した．ここに A がコンパクト Hausdorff 空間 X 上の関数空間とは，A は $C(X)$ の線形ノルム空間としての部分空間であり，定数関数 1 を含み，X の点を分離することである. Araujo and Font [1] の結果の詳細な記述は省略し，本稿で必要な形で述べることとする．そのために必要な定義をする．X 上の関数空間 A に対して，A_1^* を A の双対空間の単位球とし，$E(A_1^*)$ を A_1^* の端点全体の集合とする．このとき $\mathrm{Ch}(A) = \{x \in X : \delta_x \in E(A_1^*)\}$ と定める．ここに δ_x は $\delta_x(f) = f(x)\,(f \in A)$ により定まる有界線形汎関数である.

Theorem 2 (Araujo and Font) A, B を関数空間とする．全射複素線形等距離写像 $S: A \to B$ に対して，連続写像 $\alpha: \mathrm{Ch}(B) \to \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ および同相写像 $\phi: \mathrm{Ch}(B) \to \mathrm{Ch}(A)$ が存在して

$$S(f)(y) = \alpha(y) f(\phi(y)) \qquad (f \in A,\, y \in \mathrm{Ch}(B))$$

が成り立つ.

$C(X)$ は X 上の（自明な）関数空間で，$\mathrm{Ch}(C(X)) = X$ であるから，Araujo and Font の結果は Banach-Stone の定理の一般化となっている.

Banach-Stone の定理や Araujo and Font の定理では複素線形性が仮定されているが，線形性はある意味で必然であることが Mazur-Ulam の定理 [8, 13] として知られている.

Theorem 3 (Mazur-Ulam theorem) M, N を完備とは限らない線形ノルム空間とする．全射等距離写像 $S: M \to N$ に対して，$S - S(0)$ は実線形である.

Mazur-Ulam の定理により $S - S(0)$ は実線形であるが，さらに全射等距離写像であることも明らかである．つまり全射実線形等距離写像が全射等距離写像の本質的な部分であ

る．したがって実線形等距離写像の解明は，単に複素線形の場合を実線形に弱めたという意味ではなく，逆に複素線形性を仮定せずに全射等距離写像の構造を調べるために必要なのである．実際，Ellis [3] は関数環から一様閉な関数空間への全射実線形等距離写像の構造を明らかにしている．また単位元の存在を仮定せずに，関数環上の全射等距離写像の構造を解明する結果が M. [9], Hatori and M. [6] によって得られている．

§2 主定理

以下では X, Y 上の関数空間 A, B に対して，全射実線形等距離写像写像 $S\colon A \to B$ について考察する．

Definition　$S_*\colon B^* \to A^*$ を次で定める．

$$S_*(\eta)(f) = \operatorname{Re}\eta(S(f)) - i\operatorname{Re}\eta(S(if)) \qquad (\eta \in B^*,\ f \in A)$$

このとき次が示される．

Lemma 4　写像 $S_*\colon B^* \to A^*$ は全射実線形等距離写像である．

S_* が全射実線形等距離写像であることから，$S_*(E(B_1^*)) = E(A_1^*)$ が成り立つ．このことから次が分かる．

Lemma 5　各 $y \in \mathrm{Ch}(B)$ に対して $\S_*(\delta_y) = \lambda_1\delta_{x_1}$, $S_*(i\delta_y) = \lambda_i\delta_{x_i}$ をみたす $\lambda_1, \lambda_i \in \mathbb{T}$ および $x_1, x_i \in \mathrm{Ch}(A)$ がただ一つ存在する．ただし $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ である．

λ_1, λ_i および $x_1, x_i \in \mathrm{Ch}(A)$ の一意性から，

$$S_*(\delta_y) = \alpha_1(y)\delta_{\phi_1(y)}, \quad S_*(i\delta_y) = \alpha_i(y)\delta_{\phi_i(y)} \qquad (y \in \mathrm{Ch}(B))$$

をみたす写像 $\alpha_1, \alpha_i\colon \mathrm{Ch}(B) \to \mathbb{T}$ および $\phi_1, \phi_i\colon \mathrm{Ch}(B) \to \mathrm{Ch}(A)$ が定義できる．このとき次が得られる．

Theorem 6　A, B を関数空間とし，$S\colon A \to B$ を全射実線形等距離写像とする．このとき $\mathrm{Ch}(B)$ 上 $\phi_1 = \phi_i$ であるための必要十分条件は，連続写像 $\alpha\colon \mathrm{Ch}(B) \to \mathbb{T}$ と同相写像 $\phi\colon \mathrm{Ch}(B) \to \mathrm{Ch}(A)$ および開かつ閉集合 $K \subset \mathrm{Ch}(B)$ が存在して

$$S(f)(y) = \begin{cases} \alpha(y)f(\phi(y)) & y \in K \\ \overline{\alpha(y)f(\phi(y))} & y \in \mathrm{Ch}(B) \setminus K \end{cases} \qquad (f \in A)$$

となることである．

この結果の証明は [10] をご覧頂きたい．Theorem 6 より $\phi_1(y) \neq \phi_i(y)$ をみたす $y \in \mathrm{Ch}(B)$ が存在するときの S の構造が問題となるが，完全な解明はされていないようである．$\phi_1(y) \neq \phi_i(y)$ をみたす $y \in \mathrm{Ch}(B)$ が存在するような例として次が知られている．

Example　$A = \{az + b : a, b \in \mathbb{C},\ z \in \mathbb{T}\}$ とすると，A は $\mathbb{T}$ 上の関数空間であり $\mathrm{Ch}(A) = \mathbb{T}$ となる．$S\colon A \to A$ を

$$S(az + b) = az + \bar{b} \qquad (az + b \in A)$$

により定めると，S は全射実線形等距離写像であることが分かる．このとき各 $z \in \mathbb{T}$ に対して $S_*(\delta_z) = \delta_z$, $S_*(i\delta_z) = i\delta_{-z}$ が分かるので，すべての $z \in \mathbb{T}$ に対して $\phi_1(z) \neq \phi_i(z)$ である．この関数空間上の等距離写像は Koshimizu, M. Takagi and Takahasi [7] によって考察されている．

参考文献

[1] J. Araujo and J.J. Font, *Linear isometries between subspaces of continuous functions*, Trans. Amer. Math. Soc., **349** (1997), 413–428.

[2] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monograf. Mat., Warsaw, 1932.

[3] A.J. Ellis, *Real characterizations of function algebras amongst function spaces*, Bull. London Math. Soc., **22** (1990), 381–385.

[4] K. deLeeuw, W. Rudin and J. Wermer, *The isometries of some function spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **11** (1960), 694–698.

[5] R.J. Fleming and J.E. Jamison *Isometries on Banach Spaces: Function Spaces*, Chapman & Hall/CRC, 2003.

[6] O. Hatori and T. Miura, *Real linear isometries between function algebras. II*, Cent. Eur. J. Math., **11** (2013), 1838–1842.

[7] H. Koshimizu, T. Miura, H. Takagi and S.-E. Takahasi, *Real-linear isometries between subspaces of continuous functions*, J. Math. Anal. Appl., **413** (2014), 229–241.

[8] S. Mazur and S. Ulam, *Sur les transformationes isométriques d'espaces vectoriels normés*, C. R. Acad. Sci. Paris **194** (1932), 946–948.

[9] T. Miura, *Real-linear isometries between function algebras*, Cent. Eur. J. Math., **9** (2011), 778–788.

[10] T. Miura, *Surjective isometries between function spaces*, to appear.

[11] M. Nagasawa, *Isomorphisms between commutative Banach algebras with an application to rings of analytic functions*, Kōdai Math. Sem. Rep., **11** (1959), 182–188.

[12] M.H. Stone, *Applications of the theory of Boolean rings to general topology*, Trans. Amer. Math. Soc., **41** (1937), 375–481.

[13] J. Väisälä, *A proof of the Mazur-Ulam theorem*, Amer. Math. Monthly, **110-7** (2003), 633–635.