数理解析研究所講究録
第1933巻 2015年 13-21

ルックバックパワーオプションの価格付けとヘッジ

中央大学理工学部経営システム工学科　川西泰裕　藤田岳彦
Takahiko Fujita and Yasuhiro Kawanishi
Department of Industrial and Systems Engineering, Faculty of Science and Engineering
Chuo University

概要 本稿ではルックバックパワーオプションの価格付けに取り組む．モデルとしてはブラック・ショールズ（BS）モデルおよびCGMYモデルを採用する．正確には後者はrisk neutral modellingの考え方に従い，pricing measureの下での株価がCGMYモデルに従うと仮定するということである．ブラック・ショールズモデルの場合はヘッジも導く．

1 はじめに

本稿ではペイオフが以下で定義されるルックバックパワーオプションの価格付けを行う．

$$Z := S_T^{\alpha}\big(\sup_{0\leqq t\leqq T} S_t\big)^{\beta} \qquad \alpha,\beta>0$$

ただし，$\{S_t\}$は株価過程とする．第2節ではモデルとしてブラック・ショールズ（BS）モデルを採用し，その下で価格とヘッジを導く．第3節ではrisk neutral modelling ([2] 11章) の考え方に従い，pricing measureの下での株価の挙動としてCGMYモデル ([1]) を採用し，価格評価について考察する．ただしCGMY過程のパラメーターは過程が有界変動となるように制限する．このとき価格付けにはCGMY過程とその上限過程の同時分布，あるいはその特性関数が必要になるが，これはウィーナー・ホップ分解 ([4] 定理45.7) の逆ラプラス変換により得られることが分かる．上述の制限は，この逆ラプラス変換の可能性を保証するためのものである．

2 ブラック・ショールズモデル下

ブラック・ショールズモデルを採用し，リスク中立確率Qの下での株価の挙動を以下のように表す．

$$dS_t = rS_t\,dt + \sigma S_t\,dW_t\,,\ S_0 = S \ \Leftrightarrow\ S_t = Se^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma W_t}$$

ただしr,σ,Sは定数でrは無リスク金利である．また$\{W_t\}$はQの下での1次元標準ブラウン運動である．このモデルの下で価格およびヘッジを求めるために，まず$E_t := E^Q[e^{-rT}Z|\mathcal{F}_t]$を計算

したい．ただし $\mathcal{F}_t=\sigma(W_s; 0\leqq s\leqq t)$ である．以下を定義する．

$$\begin{aligned}
&\tilde{r}:=\tfrac{r-\frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}\,,\ X_t:=W_t+\tilde{r}t\,,\ M_t:=\sup_{0\leqq s\leqq t}X_s\,,\\
&H_t:=\frac{e^{rT}}{S^{\alpha+\beta}}E_t=E^Q[e^{\alpha\sigma X_T+\beta\sigma M_T}|\mathcal{F}_t]\,,\\
&U_t:=e^{-\tilde{r}W_t-\frac{1}{2}\tilde{r}^2t}=e^{-\tilde{r}X_t+\frac{1}{2}\tilde{r}^2t},\quad \widetilde{Q}[A]:=\int_A U_T\,dQ\quad \text{for } A\in\mathcal{F}_T\,,\\
&\tilde{\alpha}:=\alpha\sigma+\tilde{r}\,,\ \tilde{\beta}:=\beta\sigma\,.
\end{aligned}$$

このとき，$\widetilde{Q}$ の下で $\{X_t\,;\,0\leqq t\leqq T\}$ が標準ブラウン運動となることに注意すると以下を得る．

$$\begin{aligned}
H_t&=e^{\alpha\sigma X_t}E^Q[e^{\alpha\sigma(X_T-X_t)+\beta\sigma\{M_t\vee(X_t+\sup_{t\leqq s\leqq T}(X_s-X_t))\}}\,|\,\mathcal{F}_t]\\
&=e^{\alpha\sigma X_t}E^{\widetilde{Q}}[e^{\alpha\sigma(X_T-X_t)+\beta\sigma\{M_t\vee(X_t+\sup_{t\leqq s\leqq T}(X_s-X_t))\}}\tfrac{U_t}{U_T}\,|\,\mathcal{F}_t]\\
&=e^{\alpha\sigma X_t-\frac{1}{2}\tilde{r}^2(T-t)}E^{\widetilde{Q}}[e^{(\alpha\sigma+\tilde{r})(X_T-X_t)+\beta\sigma\{M_t\vee(X_t+\sup_{t\leqq s\leqq T}(X_s-X_t))\}}\,|\,\mathcal{F}_t]\\
&=e^{\alpha\sigma X_t-\frac{1}{2}\tilde{r}^2(T-t)}E^{\widetilde{Q}}[e^{\tilde{\alpha}(X_T-X_t)+\tilde{\beta}\{M_t\vee(X_t+\sup_{t\leqq s\leqq T}(X_s-X_t))\}}\,|\,X_t,\,M_t]
\end{aligned}$$

$x\leqq m$ について，

$$\begin{aligned}
&E^{\widetilde{Q}}[e^{\tilde{\alpha}(X_T-X_t)+\tilde{\beta}\{M_t\vee(X_t+\sup_{t\leqq s\leqq T}(X_s-X_t))\}}\,|\,X_t=x,\,M_t=m]\\
&\quad=E^{\widetilde{Q}}[e^{\tilde{\alpha}X_{T-t}+\tilde{\beta}\{m\vee(x+M_{T-t})\}}]\\
&\quad=\iint_{u\leqq v\,,\,v\geqq 0\,,\,x+v\leqq m}\frac{2(2v-u)}{\sqrt{2\pi(T-t)^3}}e^{\tilde{\alpha}u+\tilde{\beta}m-\frac{(2v-u)^2}{2(T-t)}}\,dudv\\
&\qquad+\iint_{u\leqq v\,,\,v\geqq 0\,,\,x+v>m}\frac{2(2v-u)}{\sqrt{2\pi(T-t)^3}}e^{\tilde{\alpha}u+\tilde{\beta}(x+v)-\frac{(2v-u)^2}{2(T-t)}}\,dudv\\
&\quad=:I+J
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Ie^{-\tilde{\beta}m}&=\int_{-\infty}^0du\int_0^{m-x}\frac{2(2v-u)}{\sqrt{2\pi(T-t)^3}}e^{\tilde{\alpha}u-\frac{(2v-u)^2}{2(T-t)}}\,dv\\
&\quad+\int_0^{m-x}du\int_u^{m-x}\frac{2(2v-u)}{\sqrt{2\pi(T-t)^3}}e^{\tilde{\alpha}u-\frac{(2v-u)^2}{2(T-t)}}\,dv\\
&=\mathsf{E}[e^{\tilde{\alpha}N(0,T-t)}]\mathsf{E}\Big[\frac{e^{\tilde{\alpha}N(0,T-t)}}{\mathsf{E}[e^{\tilde{\alpha}N(0,T-t)}]}1_{(N(0,T-t)\leqq m-x)}\Big]\\
&\quad-\mathsf{E}[e^{\tilde{\alpha}N(2(m-x),T-t)}]\mathsf{E}\Big[\frac{e^{\tilde{\alpha}N(2(m-x),T-t)}}{\mathsf{E}[e^{\tilde{\alpha}N(2(m-x),T-t)}]}1_{(N(2(m-x),T-t)\leqq m-x)}\Big]\\
&=e^{\frac{1}{2}\tilde{\alpha}^2(T-t)}\Phi\big(\tfrac{m-x-\tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}}\big)-e^{2(m-x)\tilde{\alpha}+\frac{1}{2}\tilde{\alpha}^2(T-t)}\Phi\big(\tfrac{-(m-x)-\tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}}\big)
\end{aligned}$$

ただし，$\Phi(\cdot)$ は標準正規分布の分布関数であり，最後の等式はエッシャー変換から直ちに導かれる．

$$
\begin{aligned}
Je^{-\tilde\beta x} &= \int_{-\infty}^{m-x} du \int_{m-x}^{\infty} \frac{2(2v-u)}{\sqrt{2\pi(T-t)^3}} e^{\tilde\alpha u+\tilde\beta v-\frac{(2v-u)^2}{2(T-t)}}\, dv \\
&\quad + \int_{m-x}^{\infty} du \int_{u}^{\infty} \frac{2(2v-u)}{\sqrt{2\pi(T-t)^3}} e^{\tilde\alpha u+\tilde\beta v-\frac{(2v-u)^2}{2(T-t)}}\, dv \\
&=: \int_{-\infty}^{m-x} K\, du + \int_{m-x}^{\infty} L\, du
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K &= \int_{m-x}^{\infty} \frac{-1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} (e^{-\frac{(2v-u)^2}{2(T-t)}})' e^{\tilde\alpha u+\tilde\beta v}\, dv \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{(u-2(m-x))^2}{2(T-t)}+\tilde\alpha u+\tilde\beta(m-x)} + \frac{\tilde\beta}{2} e^{(\tilde\alpha+\frac{\tilde\beta}{2})u+\frac{T-t}{8}\tilde\beta^2} \Phi(\frac{u-2(m-x)+\frac{\tilde\beta}{2}(T-t)}{\sqrt{T-t}}) \\
&=: K_1 + K_2
\end{aligned}
$$

特に $\tilde\alpha + \frac{\tilde\beta}{2} (= \frac{r}{\sigma} + \sigma(\alpha - \frac{1}{2} + \frac{\beta}{2})) = 0$ の時の K, K_1, K_2 をそれぞれ $\widetilde{K}, \widetilde{K}_1, \widetilde{K}_2$ と表す.

L は K において $m-x$ を u で置き換えればよい.

$$
L = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{u^2}{2(T-t)}+(\tilde\alpha+\tilde\beta)u} + \frac{\tilde\beta}{2} e^{(\tilde\alpha+\frac{\tilde\beta}{2})u+\frac{T-t}{8}\tilde\beta^2} \Phi(\frac{-u+\frac{\tilde\beta}{2}(T-t)}{\sqrt{T-t}}) =: L_1 + L_2
$$

同じく, $\tilde\alpha + \frac{\tilde\beta}{2} = 0$ の時の L, L_1, L_2 をそれぞれ $\widetilde{L}, \widetilde{L}_1, \widetilde{L}_2$ と表す.

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{m-x} K_1\, du &= e^{(2\tilde\alpha+\tilde\beta)(m-x)+\frac{T-t}{2}\tilde\alpha^2} \Phi(\frac{-(m-x)-\tilde\alpha(T-t)}{\sqrt{T-t}}) \\
\int_{-\infty}^{m-x} \widetilde{K}_1\, du &= e^{\frac{T-t}{2}\tilde\alpha^2} \Phi(\frac{-(m-x)-\tilde\alpha(T-t)}{\sqrt{T-t}}) \\
\frac{2}{\tilde\beta} e^{-\frac{T-t}{8}\tilde\beta^2} \int_{-\infty}^{m-x} K_2\, du &= \int_{-\infty}^{m-x} \frac{\left(e^{(\tilde\alpha+\frac{\tilde\beta}{2})u}\right)'}{\tilde\alpha+\frac{\tilde\beta}{2}} \Phi(\frac{u-2(m-x)+\frac{\tilde\beta}{2}(T-t)}{\sqrt{T-t}})\, du \\
&= \frac{e^{(\tilde\alpha+\frac{\tilde\beta}{2})(m-x)}}{\tilde\alpha+\frac{\tilde\beta}{2}} \Phi(\frac{-(m-x)+\frac{\tilde\beta}{2}(T-t)}{\sqrt{T-t}}) \\
&\quad - \frac{1}{\tilde\alpha+\frac{\tilde\beta}{2}} e^{(2(m-x)-\frac{\tilde\beta}{2}(T-t))(\tilde\alpha+\frac{\tilde\beta}{2})+\frac{1}{2}(T-t)(\tilde\alpha+\frac{\tilde\beta}{2})^2} \Phi(\frac{-(m-x)-\tilde\alpha(T-t)}{\sqrt{T-t}}) \\
\Rightarrow \int_{-\infty}^{m-x} K_2\, du &= \frac{\tilde\beta}{2\tilde\alpha+\tilde\beta} e^{\frac{T-t}{8}\tilde\beta^2} \{ e^{(\tilde\alpha+\frac{\tilde\beta}{2})(m-x)} \Phi(\frac{-(m-x)+\frac{\tilde\beta}{2}(T-t)}{\sqrt{T-t}}) \\
&\quad - e^{(\tilde\alpha+\frac{\tilde\beta}{2})(2(m-x)+\frac{1}{2}(T-t)(\tilde\alpha-\frac{\tilde\beta}{2}))} \Phi(\frac{-(m-x)-\tilde\alpha(T-t)}{\sqrt{T-t}}) \} \\
\frac{2}{\tilde\beta} e^{-\frac{T-t}{8}\tilde\beta^2} \int_{-\infty}^{m-x} \widetilde{K}_2\, du &= \int_{-\infty}^{m-x} (u)' \Phi(\frac{u-2(m-x)+\frac{\tilde\beta}{2}(T-t)}{\sqrt{T-t}})\, du \\
&= (-(m-x)-\tilde\alpha(T-t)) \Phi(\frac{-(m-x)-\tilde\alpha(T-t)}{\sqrt{T-t}}) \\
&\quad + \sqrt{\frac{T-t}{2\pi}} e^{-\frac{(-(m-x)-\tilde\alpha(T-t))^2}{2(T-t)}}
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{m-x} \widetilde{K}_2\,du = -\tilde{\alpha}e^{\frac{T-t}{2}\tilde{\alpha}^2}\big\{(-(m-x)-\tilde{\alpha}(T-t))\Phi(\tfrac{-(m-x)-\tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}})$$
$$+\sqrt{\tfrac{T-t}{2\pi}}e^{-\frac{(-(m-x)-\tilde{\alpha}(T-t))^2}{2(T-t)}}\big\}$$
$$\int_{m-x}^{\infty} L_1\,du = e^{\frac{1}{2}(T-t)(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})^2}\Phi(\tfrac{-(m-x)+(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})(T-t)}{\sqrt{T-t}})$$
$$\int_{m-x}^{\infty} \widetilde{L}_1\,du = e^{\frac{T-t}{2}\tilde{\alpha}^2}\Phi(\tfrac{-(m-x)-\tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}}) = \int_{-\infty}^{m-x}\widetilde{K}_1\,du$$
$$\frac{2}{\tilde{\beta}}e^{-\frac{T-t}{8}\tilde{\beta}^2}\int_{m-x}^{\infty} L_2\,du = \int_{m-x}^{\infty}\frac{\big(e^{(\tilde{\alpha}+\frac{\tilde{\beta}}{2})u}\big)'}{\tilde{\alpha}+\frac{\tilde{\beta}}{2}}\Phi(\tfrac{-u+\frac{\tilde{\beta}}{2}(T-t)}{\sqrt{T-t}})\,du$$
$$= -\frac{e^{(\tilde{\alpha}+\frac{\tilde{\beta}}{2})(m-x)}}{\tilde{\alpha}+\frac{\tilde{\beta}}{2}}\Phi(\tfrac{-(m-x)+\frac{\tilde{\beta}}{2}(T-t)}{\sqrt{T-t}})$$
$$+\frac{1}{\tilde{\alpha}+\frac{\tilde{\beta}}{2}}e^{\frac{\tilde{\beta}}{2}(T-t)(\tilde{\alpha}+\frac{\tilde{\beta}}{2})+\frac{1}{2}(T-t)(\tilde{\alpha}+\frac{\tilde{\beta}}{2})^2}\Phi(\tfrac{-(m-x)+(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})(T-t)}{\sqrt{T-t}})$$
$$\Rightarrow \int_{m-x}^{\infty} L_2\,du = \frac{\tilde{\beta}}{2\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}}e^{\frac{T-t}{8}\tilde{\beta}^2}\big\{-e^{(\tilde{\alpha}+\frac{\tilde{\beta}}{2})(m-x)}\Phi(\tfrac{-(m-x)+\frac{\tilde{\beta}}{2}(T-t)}{\sqrt{T-t}})$$
$$+e^{\frac{1}{2}(T-t)(\tilde{\alpha}+\frac{\tilde{\beta}}{2})(\tilde{\alpha}+\frac{3}{2}\tilde{\beta})}\Phi(\tfrac{-(m-x)+(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})(T-t)}{\sqrt{T-t}})\big\}$$
$$\frac{2}{\tilde{\beta}}e^{-\frac{(T-t)}{8}\tilde{\beta}^2}\int_{m-x}^{\infty}\widetilde{L}_2\,du = \int_{m-x}^{\infty}\Phi(\tfrac{-u+\frac{\tilde{\beta}}{2}(T-t)}{\sqrt{T-t}})\,du = \frac{2}{\tilde{\beta}}e^{-\frac{(T-t)}{8}\tilde{\beta}^2}\int_{-\infty}^{m-x}\widetilde{K}_2\,du$$
$$\Rightarrow \int_{m-x}^{\infty}\widetilde{L}_2\,du = \int_{-\infty}^{m-x}\widetilde{K}_2\,du$$

以上より，まず$\tilde{\alpha}+\frac{\tilde{\beta}}{2}\neq 0$のとき，$E_t$は以下のようになる．ただし，$g_1(t) := S^{\alpha+\beta}e^{-rT+\frac{1}{2}(T-t)(\tilde{\alpha}^2-\tilde{r}^2)}$，$g_2(t) := S^{\alpha+\beta}e^{-rT+\frac{1}{2}(T-t)((\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})^2-\tilde{r}^2)}$
とする．

$$E_t = e^{-rT}S^{\alpha+\beta}H_t = S^{\alpha+\beta}e^{-rT-\frac{1}{2}\tilde{r}^2(T-t)+(\tilde{\alpha}-\tilde{r})X_t}(I+J)|_{x=X_t,\,m=M_t}$$
$$= S^{\alpha+\beta}e^{-rT-\frac{1}{2}\tilde{r}^2(T-t)+(\tilde{\alpha}-\tilde{r})X_t}$$
$$\times\Big\{e^{\tilde{\beta}m}\big(e^{\frac{1}{2}\tilde{\alpha}^2(T-t)}\Phi(\tfrac{m-x-\tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}}) - e^{2(m-x)\tilde{\alpha}+\frac{1}{2}\tilde{\alpha}^2(T-t)}\Phi(\tfrac{-(m-x)-\tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}})\big)$$
$$+e^{\tilde{\beta}x}\Big(\int_{-\infty}^{m-x}K\,du+\int_{m-x}^{\infty}L\,du\Big)\Big\}\Big|_{x=X_t,\,m=M_t}$$
$$= g_1(t)e^{(\tilde{\alpha}-\tilde{r})X_t+\tilde{\beta}M_t}\Phi(\tfrac{M_t-X_t-\tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}})$$
$$+g_1(t)e^{-(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}+\tilde{r})X_t+2(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})M_t}\Phi(\tfrac{X_t-M_t-\tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}})$$
$$-\frac{2(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})}{2\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}}g_1(t)e^{-(\tilde{\alpha}+\tilde{r})X_t+(2\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})M_t}\Phi(\tfrac{X_t-M_t-\tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}})$$
$$+\frac{2(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})}{2\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}}g_2(t)e^{(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}-\tilde{r})X_t}\Phi(\tfrac{X_t-M_t+(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})(T-t)}{\sqrt{T-t}}) \tag{2.1}$$
$$=: f(t,W_t,M_t)\quad (\text{注}: X_t = W_t+\tilde{r}t)$$

ここで $t=0$ とすると，現在価格が得られる．

$$E_0 = E^Q\Big[e^{-rT}S_T^{\alpha}\big(\sup_{0\leqq t\leqq T} S_t\big)^{\beta}\Big]$$
$$= \tfrac{2\tilde{\alpha}}{2\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}}g_1(0)\Phi(-\tilde{\alpha}\sqrt{T}) + \tfrac{2(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})}{2\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}}g_2(0)\Phi((\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})\sqrt{T}) \tag{2.2}$$

一方，$\tilde{\alpha}+\frac{\tilde{\beta}}{2}=0$ のとき，E_t を特に $\widetilde{E}_t$ で表すことにすると，$\widetilde{E}_t$ は以下のようになる．ただし，$g_3(t) := S^{\alpha+\beta}e^{-rT-\frac{1}{2}\tilde{r}^2(T-t)}$ とする．

$$\begin{aligned}\widetilde{E}_t &= g_1(t)e^{(\tilde{\alpha}-\tilde{r})X_t-2\tilde{\alpha}M_t}\Phi(\tfrac{M_t-X_t-\tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}})\\ &\quad + 2g_1(t)(\tfrac{1}{2}-\tilde{\alpha}(X_t-M_t)+\tilde{\alpha}^2(T-t))e^{-(\tilde{\alpha}+\tilde{r})X_t}\Phi(\tfrac{X_t-M_t-\tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}})\\ &\quad - 2g_3(t)\tilde{\alpha}\sqrt{\tfrac{T-t}{2\pi}}e^{-\tilde{r}X_t-\tilde{\alpha}M_t-\frac{(X_t-M_t)^2}{2(T-t)}}\\ &=: h(t,W_t,M_t)\end{aligned} \tag{2.3}$$

ここで $t=0$ とすると，現在価格が得られる．

$$\widetilde{E}_0 = 2g_1(0)(1+\tilde{\alpha}^2T)\Phi(-\tilde{\alpha}\sqrt{T}) - 2g_3(0)\tilde{\alpha}\sqrt{\tfrac{T}{2\pi}} \tag{2.4}$$

ちなみに，定義より E_t, $\widetilde{E}_t$ は Q-マルチンゲールなので，(2.1) 式および (2.3) 式は Azéma-Yor マルチンゲール，あるいはより正確には，Kennedy マルチンゲールの具体例となっている．

次にヘッジ戦略を求めるために dE_t, $d\widetilde{E}_t$ を計算すると以下のようになる．ただし $\varphi(\cdot)$ は標準正規分布の密度関数を表す．

$$\begin{aligned}dE_t &= \Big[(\tilde{\alpha}-\tilde{r})g_1(t)e^{(\tilde{\alpha}-\tilde{r})X_t+\tilde{\beta}M_t}\Phi(\tfrac{M_t-X_t-\tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}})\\ &\quad - g_1(t)e^{(\tilde{\alpha}-\tilde{r})X_t+\tilde{\beta}M_t}\varphi(\tfrac{M_t-X_t-\tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}})\tfrac{1}{\sqrt{T-t}}\\ &\quad - (\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}+\tilde{r})g_1(t)e^{-(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}+\tilde{r})X_t+2(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})M_t}\Phi(\tfrac{X_t-M_t-\tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}})\\ &\quad + g_1(t)e^{-(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}+\tilde{r})X_t+2(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})M_t}\varphi(\tfrac{X_t-M_t-\tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}})\tfrac{1}{\sqrt{T-t}}\\ &\quad + (\tilde{\alpha}+\tilde{r})\tfrac{2(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})}{2\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}}g_1(t)e^{-(\tilde{\alpha}+\tilde{r})X_t+(2\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})M_t}\Phi(\tfrac{X_t-M_t-\tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}})\\ &\quad - \tfrac{2(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})}{2\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}}g_1(t)e^{-(\tilde{\alpha}+\tilde{r})X_t+(2\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})M_t}\varphi(\tfrac{X_t-M_t-\tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}})\tfrac{1}{\sqrt{T-t}}\\ &\quad + (\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}-\tilde{r})\tfrac{2(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})}{2\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}}g_2(t)e^{(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}-\tilde{r})X_t}\Phi(\tfrac{X_t-M_t+(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})(T-t)}{\sqrt{T-t}})\\ &\quad + \tfrac{2(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})}{2\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}}g_2(t)e^{(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}-\tilde{r})X_t}\varphi(\tfrac{X_t-M_t+(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})(T-t)}{\sqrt{T-t}})\tfrac{1}{\sqrt{T-t}}\Big]\,dW_t\\ &=: f_w(t,W_t,M_t)\,dW_t\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
d\widetilde{E}_t = &\big[(\tilde{\alpha}-\tilde{r})g_1(t)e^{(\tilde{\alpha}-\tilde{r})X_t-2\tilde{\alpha}M_t}\Phi(\tfrac{M_t-X_t-\tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}}) \\
&- g_1(t)e^{(\tilde{\alpha}-\tilde{r})X_t-2\tilde{\alpha}M_t}\varphi(\tfrac{M_t-X_t-\tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}})\tfrac{1}{\sqrt{T-t}} \\
&- 2\tilde{\alpha}g_1(t)e^{-(\tilde{\alpha}+\tilde{r})X_t}\Phi(\tfrac{X_t-M_t-\tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}}) \\
&- 2(\tilde{\alpha}+\tilde{r})g_1(t)(\tfrac{1}{2}-\tilde{\alpha}(X_t-M_t)+\tilde{\alpha}^2(T-t))e^{-(\tilde{\alpha}+\tilde{r})X_t}\Phi(\tfrac{X_t-M_t-\tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}}) \\
&+ 2g_1(t)(\tfrac{1}{2}-\tilde{\alpha}(X_t-M_t)+\tilde{\alpha}^2(T-t))e^{-(\tilde{\alpha}+\tilde{r})X_t}\varphi(\tfrac{X_t-M_t-\tilde{\alpha}(T-t)}{\sqrt{T-t}})\tfrac{1}{\sqrt{T-t}} \\
&+ 2g_3(t)\tilde{\alpha}\{\tilde{r}(T-t)+X_t-M_t\}e^{-\tilde{r}X_t-\tilde{\alpha}M_t}\varphi(\tfrac{X_t-M_t}{\sqrt{T-t}})\tfrac{1}{\sqrt{T-t}} \\
=:&\, h_w(t,W_t,M_t)\,dW_t
\end{aligned}
$$

よって，複製戦略における株式と安全債券の保有単位 ϕ_t , ψ_t ($\widetilde{\phi}_t$, $\widetilde{\psi}_t$) は以下で与えられる．ただし $\widetilde{\phi}_t$, $\widetilde{\psi}_t$ は $\tilde{\alpha}+\frac{\tilde{\beta}}{2}=0$ の場合に対応する．

$$
\begin{aligned}
\phi_t &= \tfrac{f_w(t,W_t,M_t)}{\sigma e^{-rt}S_t} = \tfrac{1}{\sigma S}e^{rt-\sigma X_t}f_w(t,W_t,M_t) \\
\psi_t &= E_t - \phi_t e^{-rt}S_t = E_t - \tfrac{f_w(t,W_t,M_t)}{\sigma} \\
\widetilde{\phi}_t &= \tfrac{h_w(t,W_t,M_t)}{\sigma e^{-rt}S_t} = \tfrac{1}{\sigma S}e^{rt-\sigma X_t}h_w(t,W_t,M_t) \\
\widetilde{\psi}_t &= \widetilde{E}_t - \phi_t e^{-rt}S_t = \widetilde{E}_t - \tfrac{h_w(t,W_t,M_t)}{\sigma}
\end{aligned}
$$

3 CGMYモデル下

本節では risk neutral modelling の考え方に従い，pricing measure Q の下で対数株価は CGMY 過程に従うと仮定し，ルックバックパワーオプションの価格評価について考察する．まず株価を $S_t := Se^{X_t}$ と定義し，$\{X_t\}$ は Q の下でパラメーター $C,G,M>0$, $0\leqq Y<1$ を持つ CGMY 過程に従うとする．つまり $\{X_t\}$ はガウス分散 $\Sigma=0$，ドリフト $\mu_0=0$，および以下で定義されるレヴィ測度 ν を持つレヴィ過程である．

$$
\nu(dx) = \tfrac{C}{|x|^{1+Y}}(e^{-G|x|}1_{(-\infty,0)}(x)+e^{-Mx}1_{(0,\infty)}(x))\,dx
$$

特に $Y=0$ の時，$\{X_t\}$ は Variance Gamma 過程と呼ばれる ([3])．またパラメーター Y は本来 $(-\infty,2)\setminus\{1\}$ の範囲の値を取ることが許されているが，ここでは $\{X_t\}$ が有界変動となり，かつジャンプの時点の集合が稠密となるように Y の範囲を制限していることに注意してほしい．また，割引き株価過程は Q の下でマルチンゲールでなければならないから，パラメーター C,G,M,Y には以下の制約が課せられる．

$$
\begin{cases}
r = C\log\frac{1}{(1-\frac{1}{M})(1+\frac{1}{G})} & ,\ Y=0\text{のとき} \\
r = C\frac{\Gamma(1-Y)}{Y}\{M^Y-(M-1)^Y+G^Y-(G+1)^Y\} & ,\ Y\neq 0\text{のとき}
\end{cases}
$$

ちなみに一本目と二本目はそれぞれ $M>1$, $M \geqq 1$ を要求しているが，これは S_t の可積分条件に対応している．つまり以下が成り立つ．

$$\begin{aligned} {}^{\forall}t>0\,,\, E^Q[S_t]<\infty \;&\Leftrightarrow\; {}^{\forall}t>0\,,\, E^Q[e^{X_t}]<\infty \\ &\Leftrightarrow\; (Y,M)\in A_1 := [0,1)\times[1,\infty)\setminus\{(0,1)\} \end{aligned}$$

よって以降 $(Y,M)\in A_1$ が分析の対象となることに注意してほしい．

次に $\{X_t^{(1)}\}$ をドリフト $\gamma_0^{(1)}=0$ および以下で定義されるレヴィ測度 $\nu^{(1)}$ を持つ increasing Lévy process，すなわち subordinator とする．

$$\nu^{(1)}(dx) = \tfrac{C^{1-Y}M^Y}{x^{1+Y}}e^{-Cx}1_{(0,\infty)}(x)\,dx$$

一方，$\{X_t^{(2)}\}$ をドリフト $\gamma_0^{(2)}=0$ および以下で定義されるレヴィ測度 $\nu^{(2)}$ を持つ subordinator とする．

$$\nu^{(2)}(dx) = \tfrac{C^{1-Y}G^Y}{x^{1+Y}}e^{-Cx}1_{(0,\infty)}(x)\,dx$$

また，$\{X_t^{(1)}\}$ と $\{X_t^{(2)}\}$ は独立であるとする．このとき $\{\frac{C}{M}X_t^{(1)}-\frac{C}{G}X_t^{(2)}\}$ も，ガウス分散 Σ，ドリフト μ_0，レヴィ測度 ν を持つレヴィ過程，すなわちパラメータ C,G,M,Y の CGMY 過程となる．実際，$\mathsf{E}[e^{iz(\frac{C}{M}X_1^{(1)}-\frac{C}{G}X_1^{(2)})}]=E^Q[e^{izX_1}]$ が成り立つことが容易に示せる．ちなみに $Y=0$ のとき，$\{X_t^{(1)}\}(=\{X_t^{(2)}\})$ はパラメーター $\frac{1}{C}$ のガンマ過程と呼ばれ，その周辺分布は以下で与えられる．

$$\mathsf{P}[X_t^{(1)}\in dx] = \tfrac{C}{\Gamma(Ct)}(Cx)^{Ct-1}e^{-cx}\,dx \qquad \text{for } x>0$$

以上をふまえルックバックパワーオプションの価格を調べる．$M_t := \sup_{0\leqq s\leqq t}X_s$ と定義すると以下を得る．

$$E^Q[e^{-rT}Z] = E^Q\big[e^{-rT}S_T^{\alpha}(\sup_{0\leqq t\leqq T}S_t)^{\beta}\big] = e^{-rT}S^{\alpha+\beta}E^Q[e^{\alpha X_T+\beta M_T}]$$

まず，

$$\begin{aligned} E^Q[e^{\alpha X_T}]<\infty \;&\Leftrightarrow\; \int_{|x|>1} e^{\alpha x}\,\nu(dx)<\infty \\ &\Leftrightarrow\; (Y,M)\in A_2 := [0,1)\times[\alpha,\infty)\setminus\{(0,\alpha)\} \end{aligned}$$

に注意すると，$(Y,M)\in A_1\cap A_2^c$ のとき以下なようなばかげた結果を得る．

$$E^Q[e^{\alpha X_T+\beta M_T}] \geqq E^Q[e^{\alpha X_T}]=\infty \;\Rightarrow\; E^Q[e^{-rT}Z]=\infty$$

次に

$$\begin{aligned} E^Q[e^{(\alpha+\beta)\frac{C}{M}X_T^{(1)}}]<\infty \;&\Leftrightarrow\; \int_{|x|>1} e^{(\alpha+\beta)\frac{C}{M}x}\,\nu^{(1)}(dx)<\infty \\ &\Leftrightarrow\; (Y,M)\in A_3 := [0,1)\times[\alpha+\beta,\infty)\setminus\{(0,\alpha+\beta)\} \end{aligned}$$

に注意すると，$(Y,M)\in A_1\cap A_3$ のとき以下を得る．

$$\begin{aligned} E^Q[e^{\alpha X_T+\beta M_T}] &= \mathsf{E}[e^{\alpha(\frac{C}{M}X_T^{(1)}-\frac{C}{G}X_T^{(2)})+\beta\sup_{0\leqq t\leqq T}(\frac{C}{M}X_t^{(1)}-\frac{C}{G}X_t^{(2)})}] \\ &\leqq \mathsf{E}[e^{(\alpha+\beta)\frac{C}{M}X_T^{(1)}}]<\infty \\ \Rightarrow\ \ & E^Q[e^{-rT}Z]<\infty \end{aligned}$$

そこで以降 $(Y,M)\in A_1\cap A_3$ についてのみ考察する．

価格計算には (X_T,M_T) の同時分布が必要になるが，その特性関数は以下で与えられる．

$$E^Q[e^{izX_T+iwM_T}] = \lim_{u\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iu}^{c+iu}\frac{1}{q}\varphi_q^+(w+z)\varphi_q^-(z)e^{qT}\,dq \tag{3.1}$$

ただし，$c>0$ は任意であり，φ_q^+，φ_q^- は以下で定義される．

$$\begin{aligned} \varphi_q^+(u) &:= \exp\Big\{\int_0^\infty t^{-1}e^{-qt}E^Q[e^{iuX_t}-1\,;X_t>0]\,dt\Big\} \\ \varphi_q^-(u) &:= \exp\Big\{\int_0^\infty t^{-1}e^{-qt}E^Q[e^{iuX_t}-1\,;X_t<0]\,dt\Big\} \end{aligned}$$

(3.1) の証明：　まずウィーナー・ホップ分解 ([4] 定理 45.7) と呼ばれる以下の式が成り立つ．

$$\int_0^\infty e^{-qt}E^Q[e^{izX_t+iwM_t}]\,dt = \frac{1}{q}\varphi_q^+(w+z)\varphi_q^-(z)\quad \text{for } {}^\forall q>0 \tag{3.2}$$

よって上式の逆ラプラス変換が可能なことを示しさえすればよい．そこで $h(t):=E^Q[e^{izX_t+iwM_t}]$ と定義する．この時まず，${}^\forall t\geqq 0$，$Q[X_{t-}=X_t=X_{t+}]=1$（ただし $X_{0-}:=0$）より，$h(t)$ は $[0,\infty)$ 上連続，ゆえに局所可積となる．次に任意の $R>0$ について，$0\leqq s<t\leqq R$ とすると以下を得る．

$$\begin{aligned} |h(t)-h(s)| &\leqq E^Q[|e^{iz(X_t-X_s)+iw(M_t-M_s)}-1|] \\ &\leqq |z|E^Q[|X_t-X_s|]+|w|E^Q[M_t-M_s] \end{aligned} \tag{3.3}$$

ここで以下を定義する．

$$J(B,\omega):=\#\{u\,;\,(u,X_u(\omega)-X_{u-}(\omega))\in B\}\quad \text{for } B\in\mathcal{B}((0,\infty)\times\boldsymbol{R}\backslash\{0\})$$

このとき以下を得る．

$$\begin{aligned} E^Q[|X_t-X_s|] &= E^Q\Big[\Big|\int_{(s,t]\times\boldsymbol{R}\backslash\{0\}}x\,J(d(u,x),\omega)\Big|\Big] \\ &\leqq \int_{(s,t]\times\boldsymbol{R}\backslash\{0\}}|x|\,du\,\nu(dx) \\ &= (t-s)C\Gamma(1-Y)(G^{Y-1}+M^{Y-1}) \end{aligned} \tag{3.4}$$

よって (3.3) と (3.4) より，$0=t_0<t_1<\cdots<t_n=R$ について以下が成り立つ．

$$\sum_{i=1}^n|h(t_i)-h(t_{i-1})|\leqq|z|C\Gamma(1-Y)(G^{Y-1}+M^{Y-1})R+|w|E^Q[M_R] \tag{3.5}$$

さらに先程と同様に以下を定義する.

$$J^{(1)}(B,\omega) := \#\{u\,;\,(u, X_u^{(1)}(\omega) - X_{u-}^{(1)}(\omega)) \in B\} \quad \text{for } B \in \mathcal{B}((0,\infty) \times \boldsymbol{R}\backslash\{0\})$$

このとき以下を得る.

$$\begin{aligned} E^Q[M_R] &= \mathsf{E}[\sup_{0 \leqq t \leqq R} (\tfrac{C}{M} X_t^{(1)} - \tfrac{C}{G} X_t^{(2)})] \\ &\leqq \mathsf{E}[\sup_{0 \leqq t \leqq R} \tfrac{C}{M} X_t^{(1)}] = \tfrac{C}{M}\mathsf{E}[X_R^{(1)}] \\ &= \tfrac{C}{M}\mathsf{E}\Big[\int_{(0,R]\times \boldsymbol{R}\backslash\{0\}} x\, J^{(1)}(d(u,x),\omega)\Big] \\ &= \tfrac{C}{M}\int_{(0,R]\times \boldsymbol{R}\backslash\{0\}} x\, du\, \nu^{(1)}(dx) \\ &= RCM^{Y-1}\Gamma(1-Y) < \infty \end{aligned}$$

よってこの事と (3.5) より，$h(t)$ は $[0,R]$ 上有界変動である.

以上より，(3.2) の逆ラプラス変換は確かに可能である.　□

よってさらに (3.1) に逆フーリエ変換を施せば (X_T, M_T) の同時分布が得られ，これを用いれば価格の数値計算が可能となる．しかし言うまでもなく，そのような方法では計算効率が非常に悪い．そこで (3.1) において $iz \to \alpha$，$iw \to \beta$ と置き換えたもの，ないしその類似物を得ることが望まれるのだが，今のところそれが可能かどうか定かではなく，この点が今後の課題となる.

参考文献

[1] Carr, P., Geman, H., Madan, D. and Yor, M. "The fine structure of asset returns: an empirical investigation", *The Journal of Business*, Vol. 75, (2002), 305-332.

[2] Cont, R. and Tankov, P. *Financial Modelling With Jump Processes*, Chapman & Hall/CRC, 2004.

[3] Madan, D. and Seneta, E. "The Variance Gamma (V.G.) Model for Share Market Returns", *The Journal of Business*, Vol. 63, (1990), 511-524.

[4] Sato, K. *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Cambrigde, 1999.

Department of Industrial and Systems Engineering
Faculty of Science and Engineering, Chuo University
1-13-27, Kasuga, Bunkyo, Tokyo, Japan
E-mail address:mendel.op.61@gmail.com

中央大学理工学部経営システム工学科　川西泰裕　藤田岳彦