数理解析研究所講究録
第 1934 巻 2015 年 138-145

Results of double zeta values related to modular forms on full modular group and Ramanujan's formula for Bernoulli numbers

[1] 国立情報学研究所
[2] JST ERATO 河原林巨大グラフプロジェクト
特任研究員　町出　智也

Tomoya Machide
Project Researcher,
[1] National Institute of Informatics,
[2] JST, ERATO, Kawarabayashi Large Graph Project,
c/o Global Research Center for Big Data Mathematics

概 要

本原稿では、２重ゼータ値に関する次の結果を紹介します：(i) 個数が保型形式のベクトル空間の次元と関連する、２重ゼータ値のベクトル空間の具体的な生成元。(ii) Ramanujan の Bernoulli の公式と関連する、２重ゼータ値の公式。

1　背景と結果

２重ゼータ値はリーマンゼータ関数 $\zeta(s) := \sum_{m=1}^{\infty} 1/m^s$ の特殊値の一般化であり、正整数の組 $(l_1, l_2) \in \mathbb{N}^2$ （ただし $l_1 \geq 2$） に対して、次のように定義されます：

$$\zeta(l_1, l_2) := \sum_{m_1 > m_2 > 0} \frac{1}{m_1^{l_1} m_2^{l_2}}.$$

整数 $l = l_1 + l_2$ を "重さ" と呼びます。和の入れ子の数を 2 から n に一般化した n 重（多重）ゼータ値が最近になって盛んに研究されていますが [18]、歴史的には Euler [6] によって初めて 2 重ゼータ値が研究されました。Euler は多重ゼータ値の後の研究の指針となる次の結果を証明しました：

$$\zeta(k_1,k_2) \in \sum_{\substack{l_1,l_2\geq 2\\(l_1+l_2=l)}} \mathbb{Q}\zeta(l_1)\zeta(l_2) + \mathbb{Q}\zeta(l) \qquad (l = k_1 + k_2 : \text{奇数}), \tag{1.1}$$

$$\sum_{\substack{l_1\geq 2, l_2\geq 1\\(l=l_1+l_2)}} \zeta(l_1,l_2) = \zeta(l) \qquad (l : \text{任意}). \tag{1.2}$$

式 (1.1) は "Parity property" と呼ばれ、重さが奇数 l の 2 重ゼータ値は、重さの総和が l となるリーマンゼータ値の積和で書けることを述べています。公式 (1.2) は "和公式" と呼ばれ、重さが整数 l の 2 重ゼータ値の総和は、リーマンゼータ値 $\zeta(l)$ と等しいことを述べています。これらの結果は近年、一般の深さ n の場合に拡張されています。((1.1) は [3, 10, 16] を、(1.2) は [8, 9, 19] を参照して下さい。) また様々な一般化や拡張も研究されています。(例えば [1] を参考にして下さい。)

本原稿では、セクション 2 と 3 で、上記の結果に関連する二つの定理（定理 2.1 と 3.1）を紹介します。また、定理 2.1 は保型形式と、定理 3.1 は Bernoulli 数と関連しますので、それらについても軽く触れます。証明については根本的なアイディアのみを述べるに留めますので、興味のある方は論文 [13, 12] をご覧下さい。

2 Parity property (1.1) に関連する定理

最初に記号を準備します。$\mathcal{Z}_l$ と $\mathcal{P}_l$ を次のような $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間とします：

$$\mathcal{Z}_l := \sum_{\substack{l_1\geq 2, l_2\geq 1\\(l_1+l_2=l)}} \mathbb{Q}\zeta(l_1,l_2),$$

$$\mathcal{P}_l := \sum_{\substack{l_1,l_2\geq 2\\(l_1+l_2=l)}} \mathbb{Q}\zeta(l_1)\zeta(l_2) + \mathbb{Q}\zeta(l).$$

($\mathcal{P}_l$ は (1.1) の右辺です。) また $\mathcal{Q}_l$ を、$\mathcal{Z}_l$ を $\mathcal{P}_l$ で割った商ベクトル空間とします：

$$\mathcal{Q}_l := \mathcal{Z}_l/\mathcal{P}_l.$$

商空間を考えるためには包含関係 $\mathcal{P}_l \subset \mathcal{Z}_l$ が必要ですが、これは (1.2) と "調和関係式"

$$\zeta(l_1)\zeta(l_2) = \zeta(l_1,l_2) + \zeta(l_2,l_1) + \zeta(l_1+l_2)$$

から保証されます。

式 (1.1) より、l が奇数の時は $\dim \mathcal{Q}_l = 0$ がすぐにわかりますが、l が偶数の時はどうなるでしょうか。Zagier [17] は次の不等式を指摘しました：

$$\dim \mathcal{Q}_l \leq \left[\frac{l-2}{6}\right]. \tag{2.1}$$

ただし $[x]$ はガウス整数、つまり、x を超えない整数です。尚、等号を示すことは、２重ゼータ値の線形独立性と関連しますので、非常に難しい問題になります。(奇数でのリーマンゼータ値 $\zeta(2k+1)$ が無理数であることさえ、部分的にしかわかっていません。)

B_m を Bernoulli 数とします。l が偶数の時、Euler の公式 $\zeta(l) = -\frac{(2\pi i)^l}{2l!}B_l \in \mathbb{Q}\pi^l$ から、

$$\mathcal{P}_l = \sum_{\substack{j=2 \\ (j\ odd)}}^{l/2} \mathbb{Q}\zeta(j)\zeta(l-j) + \mathbb{Q}\zeta(l)$$

がわかります。従って、$\dim \mathcal{P}_l \leq \left[\frac{l+2}{4}\right]$ なので、

$$\dim \mathcal{Z}_l \leq \left[\frac{l+2}{4}\right] + \left[\frac{l-2}{6}\right] \tag{2.2}$$

となります。M_l をフルモジュラー群の重さ l の保型形式の空間とします。よく知られている通り、M_l の次元は次のようになります：

$$M_l = \begin{cases} \left[\dfrac{l}{12}\right] & (l \equiv 2 \mod 12), \\ \left[\dfrac{l}{12}\right] + 1 & (otherwise). \end{cases}$$

故に (2.2) から、$\mathcal{Z}_l$ と M_l の次元の間に次の関係があることがわかります：

$$\dim \mathcal{Z}_l \leq \frac{l}{2} - \dim M_l. \tag{2.3}$$

尚上記は、$\mathcal{Z}_l$ の次元との関係しか述べていませんが、周期多項式や２重アイゼンシュタイン級数（アイゼンシュタイン級数の一般化）を用いて、２重ゼータ値 $\zeta(l_1, l_2) \in \mathcal{Z}_l$ との関係も研究されています。興味のある方は [7] とそれに関連する文献を参照して下さい。

参考として、(2.1) と (2.3) の右辺の例を載せます。

l	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
$(\dim \mathcal{Q}_l \leq)\ [\frac{l-2}{6}]$	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4
$(\dim \mathcal{Z}_l \leq)\ \frac{l}{2} - \dim M_l$	1	1	2	3	4	4	6	6	7	8	9	9	11
$\dim M_l$	0	1	1	1	1	2	1	2	2	2	2	3	2

筆者 [12] は、不等式 (2.1) の (2.3) の発展として、その右辺と同数となる $\mathcal{Q}_l$ と $\mathcal{Z}_l$ の生成元を具体的に与えました。

定理 2.1. l を偶数とする。
(i) 任意の $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{[l-2/6]} \in \{0,1\}$ に対して、次は $\mathcal{Q}_l$ の生成元となる：

$$\{\zeta(j+\varepsilon_1, l-j-\varepsilon_j)\,|\,2 \leq j \leq [\tfrac{l-2}{3}], j\ even\}.$$

(ii) 次は $\mathcal{Z}_l$ の生成元となる：

$$\{\zeta(j,l-j), \zeta(l-j,j)\,|\,3 \leq j \leq [\tfrac{l+2}{3}], j\ odd\} \cup \{\zeta(l-1,1)\}$$
$$\cup\{\zeta(j,l-j)+\zeta(l-j,j)\,|\,[\tfrac{l+5}{3}] \leq j \leq \tfrac{l}{2}, j\ odd\}.$$

系として次のことが導けます：

系 2.2. l を偶数とする。$U = \{k : 奇数\,|\,[\frac{l+5}{3}] \leq k < \frac{l}{2}\}$ とおく。
(i) 各奇数 $k \in U$ に対して、$c_3, \ldots, c_{l-1} \in \mathbb{Q}$ が存在して、条件「$c_k \neq c_{l-k}$」と「$c_i = c_{l-i}$ $(i \in U \setminus \{k\})$」を満たす線形関係式が存在する：

$$\sum_{i=3}^{l-1} c_i \zeta(i, l-i) = 0.$$

(ii) 上記の線形関係式は互いに独立であり、その個数は $\dim M_l - 1 = \sharp U$ である。

証明のアイディアですが、Tornheim 2 重級数

$$T(i,j,k) := \sum_{m,n\geq 1} \frac{1}{(m+n)^i m^j n^k} \qquad (i,j,k \geq 1)$$

と 2 重ゼータ値を関連付けた等式 [2] と、$T(i,j,k)$ の巡回和

$$(-1)^i T(i,j,k) + (-1)^j T(j,k,i) + (-1)^k T(k,i,j)$$

を含む等式 [5, 14] を組み合わせて、定理 2.1 の (i) を証明します。定理 2.1 の (ii) は (i) と $\mathcal{Q}_l, \mathcal{P}_l$ の定義からわかります。系 2.2 は定理 2.1 の (ii) と $\zeta(k, l-k) \in \mathcal{Z}_l$ $(k \in U)$ から導けます。(詳細は [12] をご覧下さい。)

3 和公式 (1.2) に関連する定理

和公式 (1.2) の精密化として "制限和公式" があります。それは文字通り、(1.2) の左辺の和を制限した場合の公式です。例えば [7] により次が知られています：

$$\sum_{\substack{l_1\geq 2, l_2\geq 1 \\ \left(\substack{l_1+l_2=l \\ l_1,l_2:even}\right)}} \zeta(l_1,l_2)=\frac{3}{4}\zeta(l). \tag{3.1}$$

この公式は、$\zeta(l)=-\frac{(2\pi i)^l}{2l!}B_l$ と $\zeta(l_1)\zeta(l_2)=\zeta(l_1,l_2)+\zeta(l_2,l_1)+\zeta(l_1+l_2)$ を用いて、Euler が示した Bernoulli 数の公式で書き換えられます：

$$\sum_{\substack{j=0 \\ (j\equiv 0(2))}}^{l} \binom{l}{j} B_j B_{l-j} = -(l-1)B_l. \tag{3.2}$$

筆者 [13] は、(1.2) のもう一つの類似物として次の公式を証明しました。

定理 3.1. l を整数とする。
(i) $l\equiv 2 \mod 3$ の時、次が成り立つ：

$$\sum_{l_1\equiv 4(6)}{}' \zeta(l_1,l_2)=\frac{1}{6}\zeta(l)-\frac{1}{3}\sum_{l_1\equiv 1(2)}{}' \zeta(l_1,l_2). \tag{3.3}$$

(ii) $l\equiv 2 \mod 3$ かつ l が偶数の時（つまり $l\equiv 2 \mod 6$ の時)、*(3.3)* は次と同値になる：

$$\sum_{l_1,l_2\equiv 4(6)}{}' \zeta(l_1,l_2)=\frac{1}{12}\zeta(l). \tag{3.4}$$

(3.2) の場合と同じように、系として次のことが導けます：

系 3.2. l を偶数とする。*(3.4)* は *Ramanujan* の *Bernoulli* の公式 *[15]*

$$\sum_{\substack{j=0 \\ (j\equiv 0(6))}}^{l} \binom{l}{j} B_j B_{l-j} = -\frac{l-1}{3}B_l \tag{3.5}$$

と同値になる。特に、*(3.4)* は *Ramanujan* の *Bernoulli* の公式の別証を与える。

注意 3.3.
(a) $l\equiv 1,2 \mod 3$ の場合の制限和公式も [13] において与えられています。
(b) Ramanujan [15] は、(3.5) を次の3三角関数の等式を用いて証明しています：

$$4\sin x\sin\omega x\sin\omega^2 x=-(\sin 2x+\sin 2\omega x+\sin 2\omega^2 x).$$

ただし ω は1の3乗根です。

証明のアイディアですが、Gangl-Kaneko-Zagier [7] が (3.1) を証明した方法を踏襲します。つまり、2重ゼータ値の生成関数

$$\mathfrak{D}_l(x_1, x_2) := \sum_{\substack{l_1 \geq 2, l_2 \geq 1 \\ (l_1 + l_2 = l)}} x_1^{l_1 - 1} x_2^{l_2 - 1} \zeta(l_1, l_2)$$

の等式

$$\mathfrak{D}_l(x+y, y) + \mathfrak{D}_l(y+x, x) = \mathfrak{D}_l(x, y) + \mathfrak{D}_l(y, x) + \frac{x^{l-1} - y^{l-1}}{x - y}\zeta(l)$$

において、$(x, y) = (1, 1), (\omega, 1), (\omega^2, 1)$ を代入して足し合わせることにより (3.4) を導きます。((3.1) は $(x, y) = (1, 1), (-1, 1)$ を代入して足し合わせることにより導かれています。)

本原稿の研究結果に関する今後の課題と致しましては、定理 2.1 と 3.1 を、3重ゼータ値、4重ゼータ値、...、n 重ゼータ値の場合に拡張することです。n 重ゼータ値の場合に拡張することは、どのくらい難しいのかよくわかりませんので、3重ゼータ値の場合から地道に研究していくのがよいと考えられます。

参考文献

[1] 荒川恒男、金子昌信, **多重ゼータ値入門**, 九州大学グローバル COE プログラム「マス・フォア・インダストリ」のレクチャーノート, vol. 23, 2010, (http://gcoe-mi.jp/temp/publish/b3ab8d917d96ba8e8fb37328483cbd01.pdf).

[2] K. Boyadzhiev, *Evaluation of Euler-Zagier sums*, Int. J. Math. Math. Sci. **27**, 2001, 407–412.

[3] J. M. Borwein, R. Girgensohn, *Evaluation of triple Euler sums*, Electron. J. Combin. **3**, 1996, Research Paper 23, approx. 27 pp.

[4] V. G. Drinfel'd, *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, Algebra i Analiz **2**, 1990, 149–181; translation in Leningrad Math. J. **2**, (1991), 829–860.

[5] O. Espinosa and V.H. Moll, *The evaluation of Tornheim double sums. I*, J. Number Theory **116**, 2006, 200–229.

[6] L. Euler, *Meditationes circa singulare serierum genus*, Novi Comm. Acad. Sci. Petropol. **20**, 1775, 140–186 ; reprinted in Opera Omnia Ser. I, vol. 15, Teubner, Berlin 1927, pp. 217–267.

[7] H. Gangl, M. Kaneko and D. Zagier, *Double zeta values and modular forms*, Automorphic forms and zeta functions, 71–106, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2006.

[8] A. Granville, *A decomposition of Riemann's zeta-function*, Analytic Number Theory(Kyoto, 1996), 95–101, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 247, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

[9] M. E. Hoffman and C. Moen, *Sums of triple harmonic series*, J. Number Theory **60**, 1996, 329–331.

[10] K. Ihara, M. Kaneko and D. Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, Compositio Math. **142**, 2006, 307–338.

[11] G. Kawashima, *A class of relations among multiple zeta values*, J. Number Theory **129**, 2009, 755–788.

[12] T. Machide, *Generators for vector spaces spanned by double zeta values with even weight*, J. Number Theory **133**, 2013, 2240–2246.

[13] T. Machide, *Some restricted sum formulas for double zeta values*, Proc. Japan Acad., Ser. A **89**, 2013, 51–54.

[14] T. Nakamura, *A functional relation for the Tornheim double zeta function*, Acta Arith. **125**, 2006, 257–263.

[15] S. Ramanujan, *Some properties of Bernoulli's numbers*, J. Indian Math. Soc. III, 1911, 219–234. Reprinted in Collected Papers of Srinivasa Ramanujan, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1927.

[16] H. Tsumura, *Combinatorial relations for Euler-Zagier sums*, Acta Arith. **111**, 2004, 27–42.

[17] D. Zagier, *Periods of modular forms, traces of Hecke operators, and multiple zeta values*, 数理解析研究所講究録第 843 巻, 162–170, 1993.

[18] D. Zagier, *Values of zeta functions and their applications*, First European Congress of Mathematics, Vol. II(Paris, 1992), 497–512, Progr. Math., 120, Birkhäuser, Basel. 1994.

[19] D. Zagier, *Multiple zeta values*, unpublished manuscript, Bonn 1995.