

非決定性強単調逐次決定過程における超強表現定理について

長崎大学・経済学部 丸山 幸宏 (Yukihiro Maruyama)
Faculty of Economics, Nagasaki University

1 はじめに

オートマトン理論を用いて, Karp and Held [3] は, 一般の離散最適化問題を記述できる離散的決定過程 (ddp) と逐次決定過程 (sdp) の部分クラスである単調逐次決定過程 (msdp) の関係を明らかにした。ここで, 逐次決定過程 (sdp) は離散的決定過程 (ddp) に状態空間を導入したものであり, コスト関数をもつ有限オートマトンである。また単調逐次決定過程 (msdp) は, 逐次決定過程 (sdp) のうち単調性をみだすコスト関数をもつクラスで, Bellman の動的計画法における関数方程式が成り立つような一般モデルである。さらに Ibaraki [1] は msdp の部分クラスである強単調逐次決定過程 (smsdp) およびその部分クラスの加法型過程 (ap) が与えられた離散的決定過程 (ddp) を強表現するための必要十分条件 (強表現定理) を与えた。その上, Ibaraki [2] は sdp の拡張クラスである非決定性逐次決定過程 (nd-sdp) を導入し, sdp の識別機械としての性質を調べている。ただし, nd-sdp は非決定性有限オートマトン上で定義されたクラスであるが, それに対する強表現定理については述べられていない。maruyama[5] は, Ibaraki[2] の定義とは異なる非決定性逐次決定過程 (nd-sdp) を導入し, それが nd-ddp を強表現より強い意味で表現する (超強表現) ための必要十分条件を与えた。

本論文では, 非決定性逐次決定過程 (nd-sdp) の部分クラスである非決定性強単調逐次決定過程 (nd-smsdp) さらにその部分クラスの非決定性結合型逐次決定過程 (nd-assdp) が nd-ddp を超強表現するための必要十分条件 (超表現定理) を与える。第 2 節において, 非決定性強単調逐次決定過程 (nd-smsdp) をはじめ, 様々な型の非決定性逐次決定過程 (nd-pmsdp, nd-lmsdp) を定義し, さらに非決定性動的計画法 (Lew[4]) における再帰式が成立する非決定性結合型逐次決定過程 (nd-assdp) を定義する。第 3 節で, nd-smsdp, nd-assdp の超強表現定理を与える。

2 定義

非決定性離散的決定過程 (nd-ddp) は次の 4 文字で定義される: $\Upsilon = (\Sigma, S, f, \min)$, ただし,

Σ : 有限個のアルファベットの集合 (決定の有限集合);

Σ^* : 決定を有限個接続して得られる方策の集合;

$\Sigma^* \ni \epsilon$: 長さ 0 の方策; $\Sigma^* \supset S$: 許容方策の集合;

$f : S \rightarrow R^1$: コスト関数で最小化することが目的
 $f(x) = \text{Max}\{f_i(x) \mid i \in \bar{A}(x) = A(x)\}, = \infty \text{ if } \bar{A}(x) \neq A(x),$
 $x \in S = \{x \in \Sigma^* \mid \exists i \in A(x) \text{ s.t. } \pi(i) \in A_F\}$
 $A(x = a_1 \cdots a_n) \ni i = i_1 \cdots i_n$: 添え字の集合,
 $A(x) \supset \bar{A}(x) = \{i \in A(x) \mid \pi(i) \in A_F\}$
 A_F : 最終添え字の集合

である。

例 1 次のような卵落とし問題（すなわち「建物から卵を落とした際、その卵が割れる階と割れない階の境界を見つけるまでに必要な卵落としの最小回数を求める問題」）を考える。一般に k 階建ての建物の窓から使用可能な m 個の卵落としを行い、卵が割れる階と割れない階の境界（割れる最小階）を知りたい。ただし、落として割れなかった卵は再度卵落としに使用し、割れた卵は使用できないとする。また、落とす卵が無くなっても割れる最小階が判明しない場合は最小階は特定できないとし、最小階を求めるために必要な卵落としの回数も特定できないとする。このとき、卵が割れる最小階がどの階であっても、最小階が判明するような卵落としの最小回数およびそれを与える卵の落とし方を求めたい。この問題は非決定性離散的決定過程 nd-ddp = (Σ, S, f, \min) , $\Sigma = \{1, 2, \dots, k\} \ni j$: 次に j 階から落とすという決定, $\Sigma^* \ni x = 23$: 卵を落とした階の列, $S = \{x \in \Sigma^* \mid \exists i_x \in \bar{A}(x) \text{ after } x\}$, $A(x = j_1 j_2 \cdots j_n) = \{i_x \mid i_x = i_0 i_1 \cdots i_n, i_0 = ([m], \{1, 2, \dots, k\}), i_1 = ([m_1], \{i, \dots, l\}), \dots, i_n = ([m_n], \{i, \dots, l\})\}$, ただし, $[m_i]$ は割れずに残っている卵の数, $\{i, \dots, l\}$ は確認、確定していない階数の集合を表わし、さらに $\bar{A}(x = j_1 j_2 \cdots j_n) = \{i_x \mid i_x = i_1 i_2 \cdots i_n, i_n = ([m_n], \{\emptyset\})\}$, $f_{i_x}(x = j_1 j_2 \cdots j_n) = n$, $i_x \in \bar{A}(x), x \in S$, $f(x) = \text{Max}\{f_{i_x}(x) \mid i_x \in A(x) = \bar{A}(x)\} = \text{Max } f_{\bar{A}(x)}(x)$, $= \infty \text{ if } A(x) \neq \bar{A}(x)$, に定式化できることに注意する。とくに 2 個の卵所有, 3 階建ビルの場合, その最適解は図 1 の様である (詳細は例 6 の図 2 参照)。

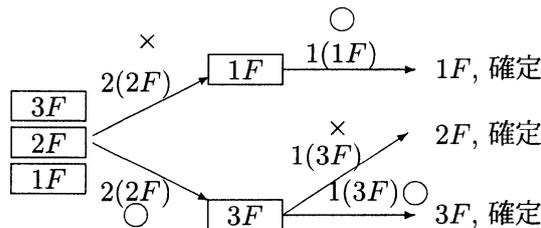


図 1 卵落とし問題：2 個の卵所有, 3 階建ビルの場合, の解

非決定性有限オートマトン $M = (Q, \Sigma, q_0, ST, Q_F)$ とは

Q : 状態の有限集合; $Q \ni q_0$: 初期状態;

$ST \subset Q \times Q \times \Sigma, (q, r, a) \in ST$; $Q \supset Q_F$: 最終状態の集合

のことである。 $(q, r, a) \in ST$ は状態 q で、決定 a がなされたとき、複数の状態 r への遷移が許されることを示すことに注意する。

さらに、非決定性逐次決定過程 (nd-sdp) は非決定性有限オートマトン (nd-fa) に目的関数を随伴させたシステムであり、次のように定義される: $\Pi = (M, h, \xi_0, \min)$,
ただし,

$M = (Q, \Sigma, q_0, ST, Q_F)$: 非決定性有限オートマトン;

$h: R^1 \times ST$: Π のコスト関数,

$h(\xi, q, r, a): (q, r, a) \in ST$ に対する状態遷移後のコスト値

$R^1 \ni \xi_0$: 初期状態 q_0 における初期コスト

$\text{Max}_{\bar{h}_{q_0; Y(q_0, x)}}(x) = \text{Max}\{\bar{h}_{q_0; \sigma}(x) \mid \sigma \in Y(q_0, x), \pi(\sigma) \in Q_F\} \implies \min,$

ただし, $x = a_1 a_2 \cdots a_k$, に対して

$Y(q_0, x) = \{r_1 r_2 \cdots r_k \mid (q_0, r_1, a_1) \in ST,$

$(r_1, r_2, a_2) \in ST, \dots, (r_{k-1}, r_k, a_k) \in ST\}$: 遷移経路の集合,

$\bar{h}_{q_0; \mu}(\epsilon) = \xi_{q_0}$, μ は長さ 0 の経路,

$\bar{h}_{q_0; \sigma r}(xa) = h(\bar{h}_{q_0; \sigma}(x), \pi(\sigma), r, a)$, $\sigma \in Y(q_0, x), (\pi(\sigma), r, a) \in ST$ ($\sigma r \in Y(q_0, xa)$),

ただし, $\pi(\sigma)$: 状態経路 σ の最後の状態,

である。ここでオートマトン M が最終状態の一つに遷移するとき、 M は x を受理する
といい、 M の受理集合 $\{x \in \Sigma^* \mid \exists \sigma \in Y(q_0, x) \text{ s.t. } \pi(\sigma) \in Q_F\}$ を $F(M)$ と表す。また、
nd-sdp Π の受理集合 $F(\Pi)$ は、基礎となるオートマトン M の受理集合と同一のものとする
($F(\Pi) = F(M)$)。

さらにコスト関数 h が単調性:

$$\xi_1 \leq \xi_2 \implies h(\xi_1, q, r, a) \leq h(\xi_2, q, r, a) \text{ for } \forall (q, r, a) \in ST$$

を満たすとき、非決定性単調逐次決定過程 (**nd-msdp**) と呼び、 h が強単調性:

$$\xi_1 < \xi_2 \implies h(\xi_1, q, r, a) < h(\xi_2, q, r, a) \text{ for } \forall (q, r, a) \in ST$$

を満たすとき、非決定性強単調逐次決定過程 (**nd-smsdp**) と呼ぶ。また、

$$h(\xi_1, q, r, a) \geq \xi \text{ for } \forall \xi \in R^1, \forall (q, r, a) \in ST$$

を満たす Π を非決定性正単調逐次決定過程 (**nd-pmsdp**) と呼び、 $|F(\Pi)| < \infty$ ($F(\Pi)$: 有限集合) を満たす Π を非決定性ループフリー単調逐次決定過程 (**nd-lmsdp**) と呼ぶ。非決定性逐次過程および上述したその部分クラスは、定義において若干の相違はあるものの、Ibaraki [2] により導入された逐次決定過程である。

また、非決定性強単調逐次決定過程 (**nd-smsdp**) の部分クラスとして次の非決定性結合型逐次決定過程 (**nd-assdp**) を導入する。

定義 1 コスト関数が $h(\xi, q, a) = \xi \circ \psi(q, r, a)$ により定義された非決定性逐次決定過程 (**nd-sdp**) を非決定性結合型逐次決定過程 (**nd-assdp**) と呼ぶ。ただし、 \circ は 2 項演算で次の性質を満たすものとする：

- (i) (A, \circ) は半群： $\circ : A \times A \rightarrow A$, (結合法則) $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$;
- (ii) 単位元 $\exists e(\circ) \in A$ の存在： $a \circ e(\circ) = e(\circ) \circ a = a \quad \forall a \in A$;
- (iii) 各 $a \in A$ に対して逆元 $\exists a^{-1}$ の存在： $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e(\circ)$;
- (iv) 交換法則： $a \circ b = b \circ a \quad \forall a, b \in A$;
- (v) 強単調： $a_1, a_2 \in A, a_1 < a_2 \implies a \circ a_1 < a \circ a_2$

例 2 加法過程 (ap): $\circ = +, A = R^1, e(\circ) = 0, a^{-1} = -a \quad (a \in R^1)$.

例 3 乗法型過程 (mp): $\circ = \times, A = \{a \mid a > 0\}, e(\circ) = 1, a^{-1} = 1/a \quad (a \neq 0)$.

例 4 乗加法型過程 (map): $a \circ b = a + b - ab, A = \{a \mid a < 1\}, e(\circ) = 0, a^{-1} = \frac{a}{(a-1)} \quad (a \neq 1)$.

例 5 分数型過程 (fp): $a \circ b = \frac{a+b}{1+ab}, A = (-1, 1), e(\circ) = 0, a^{-1} = -a \quad (a \in (-1, 1))$.

非決定性結合型逐次決定過程 (**nd-assdp**) に対しては、

$$F(p) = \min_x \left\{ \text{Max}[\bar{h}_{p,\sigma}(x) \mid \sigma \in Y(p; x), \pi(\sigma) \in Q_F] \right\}$$

と定義すると、次のような、非決定性動的計画法 ([4] 参照) における再帰式が成立する：

$$\begin{aligned} F(p) &= \min_a \{ \text{Max}[\psi(p, q, a) \circ F(q) \mid (p, q, a) \in ST] \\ F(q_f) &= 0 \quad \text{if } q_f \in Q_F \end{aligned}$$

定義 2 非決定性逐次決定過程 (**nd-sdp**) $\Pi = (M, h, \xi_0, \min)$ が非決定性離散的決定過程 **nd-ddp** $\Upsilon = (\Sigma, S, f, \min)$, $f(x) = \text{Max}f_{A(x)}(x)$ を超強表現するとは、

$$F(\Pi) = S, \quad Y(q_0; x) = A(x) \quad \forall x \in S, \quad Q_F = A_F,$$

$$\bar{h}_{q_0;Y(q_0;x)}(x) = f_{A(x)}(x) \quad \forall x \in S,$$

が成立することである。ただし

$$\bar{h}_{q_0;Y(q_0;x)}(x) = \{\bar{h}_{q_0;\sigma}(x) \mid \sigma \in Y(q_0;x)\}, \quad f_{A(x)}(x) = \{f_i(x) \mid i \in A(x)\},$$

である。

注意 1 非決定性逐次決定過程 (nd-sdp) Π が非決定性離散的決定過程 nd-ddp $\Upsilon = (\Sigma, S, f, \min)$, $f(x) = \text{Max} f_{A(x)}(x)$ を強表現するとは,

$$F(\Pi) = S, \quad \bar{h}(x) = \text{Max} \bar{h}_{q_0;\bar{Y}(q_0;x)}(x) = \text{Max} f_{\bar{A}(x)}(x) = f(x)$$

が成り立つことであり, 弱表現するとは

$$O(\pi) = \{x \in F(\pi) \mid \bar{h}(x) \leq \bar{h}(y) \quad \forall y \in F(\pi)\} = O(\Upsilon) = \{x \in S \mid f(x) \leq f(y) \quad \forall y \in S\}$$

が成り立つことである。3つの表現の間関係は次の通りである：

$$\text{超強表現} \implies \text{強表現} \implies \text{弱表現}$$

3 nd-ddp の nd-smsdp による強表現

本節において主要結果を述べる。まず, 強表現定理において主要な役割を担う同値関係を定義する：

定義 3 (同値関係) nd-ddp $\Upsilon = (\Sigma, S, f, A_F, \min)$, $f(x) = \min\{f_i(x) \mid i \in \bar{A}(x)\}$ において, $S \times I = \cup_{x \in S} \{x\} \times \bar{A}(x)$ 上の2項関係を次で定義する：

$$(x, i_x) \hat{R}_{S \times I}(y, i_y) \iff \{(z, i_z) \mid (xz, i_x i_z) \in S \times I\} = \{(z, i_z) \mid (y z, i_y i_z) \in S \times I\}$$

$$(x, i_x) \hat{R}_{f_i}(y, i_y) \iff f_{i_x}(x) = f_{i_y}(y) \wedge i_x \in \bar{A}(x), i_y \in \bar{A}(y)$$

$$(x, i_x) \hat{R}_{\Upsilon f_i}(y, i_y) \iff (x, i_x) \hat{R}_{S \times I}(y, i_y) \wedge (\forall (xz, i_x i_z) \in S \times I)(f_{i_x i_z}(xz) = f_{i_y i_z}(yz))$$

また, 右不変: $(x, i_x) \hat{R}(y, i_y) \implies (xz, i_x i_z) \hat{R}(yz, i_y i_z) \quad \forall (z, i_z) \in \Sigma^* \times I^*$, かつ集合 $S \times I$ を細分: $(x, i_x) R(y, i_y) \implies (x, i_x) \in S \times I \iff (y, i_y) \in S \times I$ する同値関係の全体を $\Lambda(S \times I)$ と表すと, $\hat{R}_{S \times I}, \hat{R}_{f_i}, \hat{R}_{\Upsilon f_i} \in \Lambda(S \times I)$ が成り立つことに注意する。

さらに

$$\Lambda_F(S \times I) = \{R \in \Lambda(S \times I) \mid |\Sigma^* \times I^* / \hat{T}| < \infty\}$$

と定義する。また, $\Lambda(\Sigma^* \times I^*), \Lambda_F(\Sigma^* \times I^*)$ は右不変同値関係の全体, 指数有限右不変同値関係の全体を表す。

このとき、次のような、nd-smsdp によりある関数 h' を実現するための補題が成立する：

補題 1 (nd-smsdp による h' の実現)

各方策 $x \in \Sigma^*$ に対して、集合 $A(x)$ が対応しているとする。ただし、 $A(x) \subset A^n$, $|A| < \infty$ である。また各 $x \in \Sigma^*$ および各 $i \in A(x)$ に対して実数値 $h'_i(x)$ が与えられている。(すなわち $h'_{A(\cdot)}(\cdot) : \Sigma^* \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$; 集合値関数)。このとき、

$$\bar{h}_{q_0; Y(q_0; x)}(x) = h'_{A(x)}(x), \quad \forall x \in \Sigma^*, \quad (1)$$

をみたす nd-smsdp $\Pi = (M, h, \xi_0, \min)$ が存在するための必要十分条件は、条件 (i), (ii) が成り立つ $\hat{T} \in \Lambda_F(\Sigma^* \times I^*)$ が存在することである：

$$(i) \quad (x, i_x) \hat{T}(y, i_y) \wedge (h'_{i_x}(x) \leq h'_{i_y}(y)) \implies$$

$$h'_{i_x i_z j}(xz) = h'_{i_y i_z}(yz) \quad (\forall (z, i_z) \in \Sigma^* \times I^*)$$

$$(ii) \quad (x, i_x) \hat{T}(y, i_y) \wedge (h'_{i_x}(x) < h'_{i_y}(y)) \implies$$

$$h'_{i_x i_z j}(xz) < h'_{i_y i_z}(yz) \quad (\forall (z, i_z) \in \Sigma^* \times I^*)$$

ただし、等式 (1) は次の意味で成立する：

$$\forall \rho \in Y(q_0; x), \exists i \in A(x) \text{ s.t. } \bar{h}_{q_0; \rho}(x) = h'_i(x)$$

$$\forall i \in A(x), \exists \rho \in Y(q_0; x) \text{ s.t. } h'_i(x) = \bar{h}_{q_0; \rho}(x)$$

すなわち、対応： $\rho \in Y(q_0; x) \Rightarrow i \in A(x)$ は全単射である。

定義 4 (半順序) nd-ddp $\Upsilon = (\Sigma, S, f, A_F, \min)$, $f(x) = \text{Max}\{f_i(x) \mid i \in \bar{A}(x)\}$ において、 $S \times I = \cup_{x \in S} \{x\} \times \bar{A}(x)$ 上の半順序関係を次で定義する：

$$(x, i_x) \sqsubseteq_{\Upsilon_{f_i}} (y, i_y) \iff (x, i_x) \hat{R}_{S \times I}(y, i_y) \wedge ((x, i_x) \hat{R}_{\Upsilon_{f_i}}(y, i_y)) \\ \vee (\forall (xz, i_x i_z) \in S \times I) (f_{i_x i_z}(xz) < f_{i_y i_z}(yz))$$

命題 1 半順序関係 $\sqsubseteq_{\Upsilon_{f_i}}$ は右不変であり、さらに次の関係が成り立つ：

$$(x, i_x) \sqsubseteq_{\Upsilon_{f_i}} (y, i_y) \wedge (y, i_y) \sqsubseteq_{\Upsilon_{f_i}} (x, i_x) \iff (x, i_x) \hat{R}_{\Upsilon_{f_i}}(y, i_y)$$

補題 1 より、次の nd-smsdp による超強表現定理が導出される：

定理 1 (nd-smsdp の超強表現定理)

非決定性離散的決定過程 $\Upsilon = (\Sigma, S, f, \min)$ が、非決定性逐次決定過程 $\text{nd-smsdp } \Pi = (M, h, \xi_0, \min)$ により超強表現されるための必要十分条件は次の (i),(ii) を満たす $\hat{T} \in \Lambda_F(S \times I)$ が存在することである：

- (i) $(\forall (x, i_x), (y, i_y) \in S \times I)((x, i_x)(\hat{T} \wedge \hat{R}_{f_i})(y, i_y) \implies (x, i_x)\hat{R}_{\Upsilon_{f_i}}(y, i_y))$
- (ii) $(x, i_x), (y, i_y) \in C_i \times I_i \in \Sigma^* \times I^*/\hat{T} \implies (x, i_x) \sqsubseteq_{\Upsilon_{f_i}} (y, i_y) \text{ or } (y, i_y) \sqsubseteq_{\Upsilon_{f_i}} (x, i_x)$

例 6 例 1 で述べた卵落とし問題 (卵 3 個所有、3 階建てビルの場合) を再考する。この問題はまず非決定性離散的決定過程 $\Upsilon_{\min} = (\Sigma, S, f, \min)$ に定式化できることに注意する (図 2 参照)。ただし、 $\Sigma = \{1, 2, 3\}$, $S = \{3, 12, 21, 11, 111, 121, 311\}$, $f(3) = f(12) = f(11) = \infty$, $f(21) = 2$, $f(111) = f(121) = f(311) = 3$, $\min\{f(x)|x \in S\} = 2$ である。

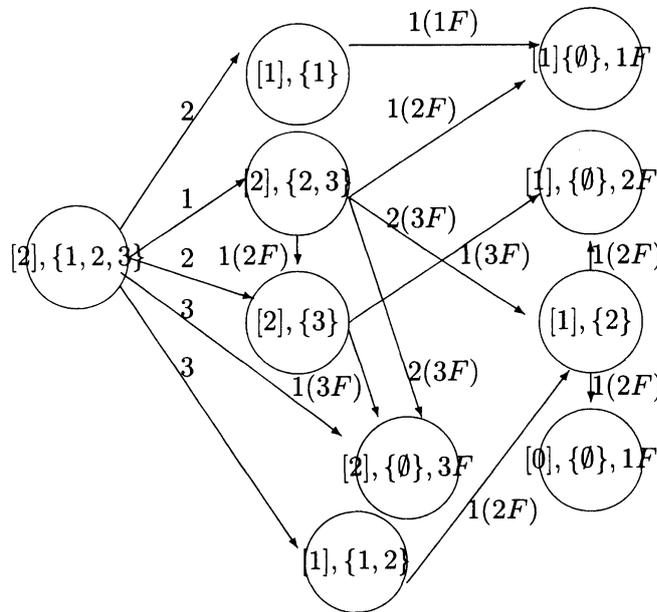


図 2. nd-ddp としての卵落とし問題：卵 2 個所有、3 階建て

これに対して、同値関係 \hat{T} を、

$$(x, i_x)\hat{T}(y, i_y) \iff i_x = i_1 i_2 \cdots i \in A(x), i_y = j'_1 j'_2 \cdots i \in A(y)$$

と定義すると、 $\hat{T} \in \Lambda_F(S \times I)$ が成り立ち、さらに超強表現定理の仮定 (i),(ii) を満たす。従って、同定理より、 Υ を超強表現する非決定性逐次決定過程が存在することがわかる

が、次に述べる $\text{nd-smsdp } \Pi = (M(Q, \Sigma, q_0, ST, Q_F), h, \xi_0, \min)$ が超強表現している：

$$\begin{aligned}
 Q &= \{([m'], \{j_1, j_2, \dots, j_n\})\} \\
 q_0 &= ([2], \{1, 2, 3\}), \quad Q_F = \{([m'], \{\emptyset\}) \mid m' = 0, 1, 2\} \\
 h(\xi, q, r, j) &= \xi + 1, \quad \xi_0 = 0
 \end{aligned}$$

実際、下図3が非決定性逐次決定過程 sd-smsdp である。

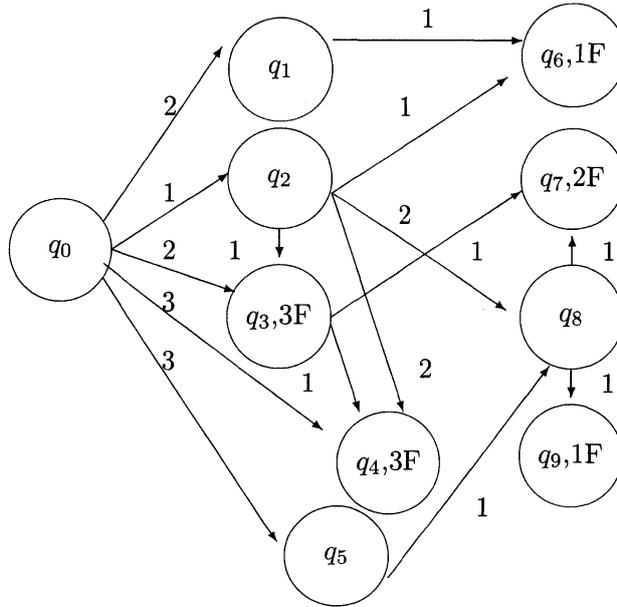


図3. nd-smsdp としての卵落とし問題：卵2個所有，3階建て

また、 $F(\Pi) = \{x = 3, 12, 21, 11, 111, 121, 311\}$, $\bar{h}(3) = \bar{h}(12) = \bar{h}(11) = \infty$, $\bar{h}(21) = 2$, $\bar{h}(111) = \bar{h}(121) = \bar{h}(311) = 3$, $\min\{\bar{h}(x) \mid x \in F(\Pi)\} = 2$ であることに注意する。

定義5 (同値関係 D_{Υ, f_i}°) $\text{nd-ddp } \Upsilon = (\Sigma, S, f, A_F, \min)$, $f(x) = \text{Max}\{f_i(x) \mid i \in \bar{A}(x)\}$ において、 $S \times I = \cup_{x \in S} \{x\} \times \bar{A}(x)$ 上の同値関係を次で定義する：

$$\begin{aligned}
 (x, i_x) D_{\Upsilon, f_i}^\circ (y, i_y) &\iff (x, i_x) \hat{R}_{S \times I} (y, i_y) \wedge (\forall (xw, i_x i_w), (xz, i_x i_z) \in S \times I) \\
 &\quad (f_{i_x i_w}(xw) \circ f_{i_y i_w}(yw)^{-1} = f_{i_x i_z}(xz) \circ f_{i_y i_z}(yz)^{-1})
 \end{aligned}$$

ここで、 Υ が nd-ddp であれば $D_{\Upsilon, f_i}^\circ \in \Lambda(S \times I)$ であることに注意する。

定理 2 (nd-assdp の超強表現定理)

非決定性離散的決定過程 nd-ddp $\Upsilon = (\Sigma, S, f, \min)$ が, 非決定性結合型過程 nd-assdp $\Pi = (M, h, \xi_0, \min)$ により超強表現されるための必要十分条件は

$$D_{\Upsilon, f_i}^{\circ} \in \Lambda_F(S \times I)$$

が成り立つことである。

参考文献

- [1] Ibaraki, T. (1972), Representation theorems for equivalent optimization problems, *Information and Control* **21**, 397-435.
- [2] Ibaraki, T. (1978), Finite automata having cost functions: Nondeterministic models, *Information and Control* **37**, 40-69.
- [3] Karp, R. M. and Held, M. (1967), Finite-state processes and dynamic programming, *SIAM J. Appl. Math.* **15**, 693-718.
- [4] Lew, A. (2001), Nondeterministic dynamic programming on a parallel coprocessing system, *Applied Math. Comp.* **120**, 139-147.
- [5] Maruyama, Y. (2012), 非決定性オートマトンと非決定性動的計画法について, *RIMS Kôkyurôku* **1802**, 146-152.