数理解析研究所講究録
第 1939 巻 2015 年 162-171

プロジェクト・リスクにおける汎用的フレームワークについて

金沢学院大学 経営情報学部　福田 裕一　(Hirokatsu Fukuda)
Faculty of Business Administration and Information Science,
Kanazawa Gakuin University
金沢学院大学 経営情報学部　桑野 裕昭　(Hiroaki Kuwano)
Faculty of Business Administration and Information Science,
Kanazawa Gakuin University

1　はじめに

プロジェクト・マネジメントの実務における標準的なガイドブックである PMBOK [9] では，プロジェクト・リスク・マネジメントについて次の様に述べられている．

> プロジェクト・リスク・マネジメントは，プロジェクトに関するリスクのマネジメントの計画，識別，分析，対応，監視コントロールの実務に関するプロセスからなる．これらのプロセスのほとんどは，プロジェクトを通して実行される．プロジェクト・リスク・マネジメントの目標は，プロジェクトに対してプラスとなる事象の確率と影響を増大させ，マイナスとなる事象の確率と影響を低減することである．$\cdots$ プロジェクト・リスクとは，もしそれが起きれば，時間，コスト，スコープ，品質などのプロジェクト目標にプラスやマイナスの影響を与える不確実な事象あるいは状態のことである．

つまり，プロジェクト・リスク・マネジメントとは時間やコストなどに関するプロジェクト目標に対してプラスもしくはマイナスの効果を与えるプロジェクト・リスクのマネジメントを行うプロセス全般を指し，具体的には，プロジェクトが予め定められた期限までに完了できるように事前に認識されているプロジェクト・リスクを解消するプロセスなどを意味している．そのため，プロジェクトの完了に要する時間に関して言えば，CPM や PERT などの数理的手法を用いた多くの研究 ([5, 6, 7] など) が行われてきているし，また，プロジェクト・リスクに限らずリスク全般についての研究 ([2, 3, 4, 8] など) も行われてきた．しかしながら，プロジェクトの完了に要する時間とプロジェクト・リスクとの関係性を取り扱う研究は十分に行われているとは言えず，実世界においてのプロジェクト・リスク・マネジメントの重要性からその研究は急務である．

そこで，本研究では，プロジェクトの完了に要する時間とプロジェクト・リスクの関係を表す数理モデルを提案し，そのモデルを用いてプロジェクト・リスク・マネジメントの実務における意思決定問題の定式化を試みる．さらに，いくつかの特殊な条件のもとで数理モデルを解析し，その特性を明らかにする．

2 目的

本研究の目的を明確に示すため，最初に用語の整理を行っておく．

プロジェクトとは何らかの順序性を持つ作業の集まりとし，作業はそれが遂行されるために必要な所要期間を持つ．プロジェクト完了時間とは最初の作業を開始した時刻からすべての作業が終了した時刻までの経過時間を指す．

プロジェクト・リスクの例としては，次のようなものが考えられる．

- 計画していた装置が故障のため利用できなくなった
- 予定した日時までに，所轄官庁の許認可が得られなかった
- 採用していた技術に欠陥が見つかった

これらのプロジェクト・リスクが生起することによって，プロジェクトに含まれる作業の所要期間が増加し，プロジェクト完了時間が変化する．このようにプロジェクト・リスクとはそれが起きれば，時間やコストなどのプロジェクト目標に影響を与える不確実な事象を意味していた．そこで，以下では，プロジェクト・リスクをある確率空間における事象とみなし，それを明示的に表すため，プロジェクト・リスク・イベント，特に混乱が無ければリスク・イベントと呼ぶことにする．また，リスク・イベントが生起した場合にそれがプロジェクトに与える効果，つまり所要期間の増加を影響と呼び，その増加量を影響度と呼ぶ．なお，以下では，個々のリスク・イベントについてその生起確率と，各作業に与える影響度は与えられているものとする．

以上の用語を用いて本研究の目的を述べると以下のようになる．

第一の目的はプロジェクト完了時間とリスク・イベントの関係を適切に表現するための数理モデルを構築することである．第二の目的はプロジェクト・リスク・マネジメントにおける対処すべきリスクの選択に関する意思決定問題を定式化することである．さらに第三の目的はこの数理モデルにいくつかの条件を追加し，プロジェクト完了時間とリスク・イベントの間の関係を解析し，その特性を明確化することである．

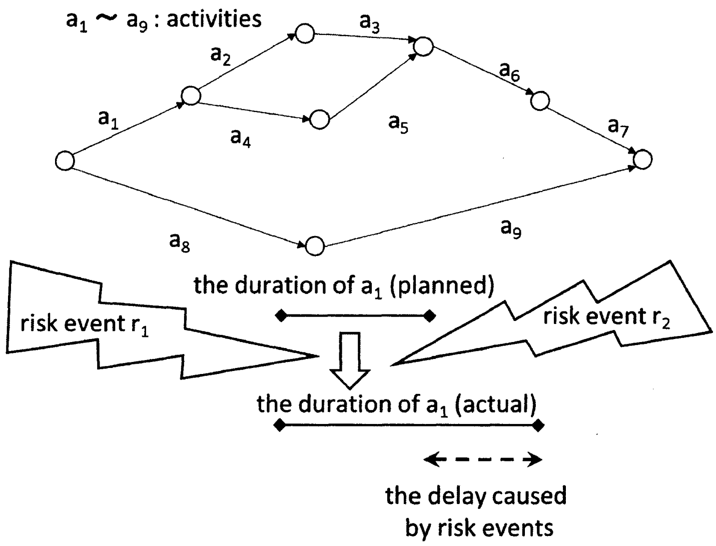


図 1: 所要期間とリスク・イベントの関係

3 数理モデルの構築

3.1 プロジェクト完了時間に関する数理モデルの構築

Kelley [5] に基づいて，プロジェクト完了時間に関する数理モデルを構築する．$V = \{v_0, v_1, \cdots, v_N\}$ とおき，$\prec$ を V の要素間の半順序とし，半順序集合 $(V, \prec)$ を定義する．ここで，V の要素 $v_0, v_1, \cdots, v_N$ をプロジェクト・イベントと呼ぶ．2 つのプロジェクト・イベント v_{n_1}, v_{n_2} の間に $v_{n_1} \prec v_{n_2}$ が成立するとき，v_{n_1} は v_{n_2} に先行すると表現する．以降，プロジェクト・イベント $v_0, v_1, \cdots, v_N$ は，$v_{n_1} \prec v_{n_2}$ の場合 $n_1 < n_2$ となるように並んでいるものとする．特に，v_0 を始点，v_N を終点と呼び，始点 v_0 は V に含まれる全てのプロジェクト・イベントに先行し，V に含まれる全てのプロジェクト・イベントは終点 v_N に先行する．

すべてのプロジェクト・イベント v_n に対して，$v_{n_1} \prec v_{n_2}$ ならば $t_{n_1} \le t_{n_2}$ となる非負の値 t_n を割り当て，v_n の開始時刻と呼び，$\mathbf{t} = (t_0, t_1, \cdots, t_N)$，$t_0 = 0$ とする．

$\alpha_{n_1 n_2} \in E \subset V \times V \ (n_1 < n_2)$ をアクティビティまたは作業と呼ぶ．このとき V と E によって定義される有向グラフを $G(V, E)$ と表す．E の要素の数を M とし，簡単のため，$E = \{a_1, a_2, \cdots, a_M\}$ とも表し，以下では $\alpha_{n_1 n_2}$ と同様に a_m もアクティビティと呼ぶ．アクティビティ $\alpha_{n_1 n_2}$ に非負の値 $\Delta_{n_1 n_2}$ を割り当てる．同様にアクティビティ a_m に非負の値 d_m を割り当て，$\Delta_{n_1 n_2}$ および d_m をアクティビティの所要期間と呼ぶ．$\mathbf{d} = (d_1, d_2, \cdots, d_M)$ とし，$(\mathbf{d}, \mathbf{t})$ をプロジェクト P のスケジュールと呼ぶ．さらに，スケジュール $(\mathbf{d}, \mathbf{t})$ が実行可能であるとは，$\Delta_{n_1 n_2} \le t_{n_2} - t_{n_1}$ を満足することである．

始点でも終点でもない任意のプロジェクト・イベント v_n について，アクティビティ $\alpha_{n_1\, n}$ および アクティビティ $\alpha_{n\, n_2}$ がともに E に含まれるようなプロジェクト・イベント v_{n_1}, v_{n_2} が V に存在する場合，$\mathbf{v} = (v_0, v_1, \cdots, v_N)$ と $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_M)$ の順序対 $(\mathbf{v}, \mathbf{a})$ をプロジェクト P と呼ぶ．

次の条件を満たすサブ・グラフ $G(V', E') \subset G(V, E)$ をプロジェクト P の プロジェクト・パスと呼ぶ．

$$V' = \{v_{n_0}, v_{n_1}, \cdots, v_{n_J}\} \subset V,\ E' = \{\alpha_{n_0 n_1}, \alpha_{n_1 n_2}, \cdots, \alpha_{n_{J-1} n_J}\} \subset E,\ v_{n_0} = v_0,\ v_{n_J} = v_N.$$

Π をプロジェクト P に含まれる全てのプロジェクト・パスの集合とし，L をプロジェクト・パスの個数とする．

$$\Pi = \{\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_L\}$$

プロジェクト・パス π_l が決定すれば π_l を構成するプロジェクト・イベントの部分集合 $V'(\pi_l)$ およびアクティビティの部分集合 $E'(\pi_l)$ は一意的に決定できる．すべてのプロジェクト・パス π_l に対して，次の式によって長さを与えることができる．

$$\ell(\pi_l; (\mathbf{d}, \mathbf{t})) = \sum_{m \in \{m | a_m \in E'(\pi_l), \pi_l = G(V'(\pi_l), E'(\pi_l))\}} d_m$$

ここで，プロジェクト P および $\mathbf{d}$ を固定した場合，実行可能なスケジュール $(\mathbf{d}, \mathbf{t})$ を構成する任意の $\mathbf{t}$ に対して，$\ell(\pi_i; (\mathbf{d}, \mathbf{t}))$ は同じ値となる．よって，以降 $\mathbf{t}$ を省略し，プロジェクト・パス π_l の長さを $\ell(\pi_l; \mathbf{d})$ と表す．さらに，次の条件を満たすプロジェクト・パスをプロジェクト P のクリティカル・パス $\pi^* \in \Pi$ と呼び，$\ell(\pi^*; \mathbf{d})$ はプロジェクト完了時間を表す．

$$\ell(\pi^*; \mathbf{d}) = \max_{l=1,2,\cdots,L} \ell(\pi_l; \mathbf{d})$$

3.2 プロジェクト・リスクの数理モデルの構築

Kaplan および Garrick によって，シナリオを用いたリスクの概念が定義されている [4]．ここでは，その概念を用いて，プロジェクト完了時間とリスク・イベントに関する数理的なモデルを構築する．

確率空間 $(R_k, \mathcal{F}_k, P_k)$ を次のように定義する $(k = 1, 2, \cdots, K)$．

$$R_k = \{r_k, r_k^c\},\ \ \mathcal{F}_k = \{\phi, \{r_k\}, \{r_k^c\}, R_k\},$$
$$P_k(r_k) = p_k,\ \ P_k(r_k^c) = 1 - p_k\ ,\ 0 \leq p_k \leq 1.$$

r_k は「k 番目のリスク・イベントが生起した」という事象を表し，以下では r_k を k 番目のリスク・イベントと同一視する．M をプロジェクト P のアクティビティの個数とし，$\mathbf{X}_k$ を確率空間 $(R_k, \mathcal{F}_k, P_k)$ 上の，M 次元ベクトルの確率変数として定義する $(k = 1, 2, \cdots, K)$．

$$P_k(\mathbf{X}_k = (x_{k1}, x_{k2}, \cdots, x_{kM})) = p_k,\ \ P_k(\mathbf{X}_k = (0, \cdots, 0)) = 1 - p_k$$

ただし，x_{km} は非負の数とする．行列 X を次のように定義し，リスク影響度マトリクスと呼ぶ．

$$X \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1M} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2M} \\ & & \cdots & \\ x_{K1} & x_{K2} & \cdots & x_{KM} \end{pmatrix}$$

ここで，x_{km} はリスク・イベント r_k により，アクティビティ a_m の所要期間 d_m に加えられる影響を表す．次に R_k の直積 $\widehat{S}$ を定義する．

$$\widehat{S} = \prod_{k=1,2,\cdots,K} R_k \ = \{\widehat{\mathbf{s}}_1, \widehat{\mathbf{s}}_2, \cdots, \widehat{\mathbf{s}}_{2^K}\},$$
$$\widehat{\mathbf{s}}_i = (\widehat{r}_{i1}, \widehat{r}_{i2}, \cdots, \widehat{r}_{iK}),\ \widehat{r}_{ik} = r_k \text{ or } r_k^c.$$

$\widehat{\mathbf{s}}_i$ は，$\{r_k, r_k^c\}$ の直積であり，リスク・シナリオと呼ぶ．リスク・シナリオ $\widehat{\mathbf{s}}_{\mathrm{i}}$ の k 番目の要素が $\widehat{r}_{ik} = r_k$ の場合，アクティビティ a_m の所要期間 d_m に x_{km} が加えられる．$\widehat{r}_{ik}$ を用いて，確率空間 $(S, \mathcal{F}^S, P^S)$ を次の様に定義する．

$$S = \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \cdots, \mathbf{s}_{2^K}\},\ \ \mathcal{F}^S = 2^S,$$
$$P^S(\mathbf{s}_i) = \prod_{k=1,\cdots,K} \{(1 - p_k) + (2p_k - 1)\mathbf{s}_i \mathbf{1}_k\} \quad i = 1, 2, \cdots, 2^K,$$
$$\mathbf{s}_i = (\check{r}_{i1}, \check{r}_{i2}, \cdots, \check{r}_{iK}),$$
$$\check{r}_{ik} = \begin{cases} 1 \text{ if } \widehat{r}_{ik} = r_k, \\ 0 \text{ if } \widehat{r}_{ik} = r_k^c, \end{cases}$$
$$\mathbf{1}_k = {}^t(\delta_{k1}, \delta_{k2}, \cdots, \delta_{kK}),$$
$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1 \text{ if } j = k, \\ 0 \text{ if } j \neq k. \end{cases}$$

$\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \cdots, Y_M)$ を確率空間 $(S, \mathcal{F}^S, P^S)$ 上の M 次元ベクトルの確率変数として定義し，遅延行列と呼ぶ．

$$P^S(\mathbf{Y} = \mathbf{s}_i X) = P^S(\mathbf{s}_i) \quad i = 1, 2, \cdots, 2^K$$

3.3 プロジェクト・リスク・マネジメントの実務における意思決定問題の定式化

実務では，重要と思われるリスク・イベントから順にリスク対策を実施して，プロジェクト完了時間が目標値以下となるよう，プロジェクト・リスク・マネジメントを行っている．ここでは，いずれか一つのリスク・イベントを選択し，このリスク・イベントに対してリスク対策を実施し，リスク・イベントを回避することが可能であるとし,「プロジェクト完了時間が目標値以下となる確率を最大化するために回避すべきリスクを選択する」ことをプロジェクト・リスク・マネジメントの実務における意思決定問題と考える．スケジュール $(\mathbf{d},\mathbf{t})$ のプロジェクト P に対して，遅延行列 $\mathbf{Y}$ で定義される遅延が発生した場合の，クリティカル・パスの長さを $\mathbf{Z}$ とする．

$$P^S\left(\mathbf{Z}=\max_{l=1,2,\cdots,L}\ell(\pi_l;\mathbf{d}+\mathbf{s}_iX)\right)=P^S(\mathbf{s}_i)\quad i=1,2,\cdots,2^K$$

さらに，確率空間 $(S,\mathcal{F}^S,P^S_{-k})$ を次のように定義する $(k=1,2,\cdots,K\ ,\quad i=1,2,\cdots,2^K)$.

$$P^S_{-k}(\mathbf{s}_i)=\prod_{k'=1,\cdots,K}\{(1-p'_{k'})+(2p'_{k'}-1)\mathbf{s}_i\mathbf{1}_{k'}\},$$
$$p'_{k'}=\begin{cases}p_{k'} & \text{if } k'\neq k,\\ 0 & \text{if } k'=k.\end{cases}$$

$\mathbf{Y}_{-k}$ を確率空間 $(S,\mathcal{F}^S,P^S_{-k})$ 上の M 次元ベクトルの確率変数として定義する．

$$P^S_{-k}(\mathbf{Y}_{-k}=\mathbf{s}_iX)=P^S_{-k}(\mathbf{s}_i)\quad i=1,2,\cdots,2^K$$

リスク・イベント r_k を回避した場合の，クリティカル・パスの長さを $\mathbf{Z}_{-k}$ とする．

$$P^S_{-k}\left(\mathbf{Z}_{-k}=\max_{l=1,2,\cdots,L}\ell(\pi_l;\mathbf{d}+\mathbf{s}_iX)\right)=P^S_{-k}(\mathbf{s}_i)\quad i=1,2,\cdots,2^K$$

上記の準備により，プロジェクト・リスク・マネジメントにおける意思決定問題は，次のように定式化される．

$$(\mathrm{P}(\lambda))\quad \text{Find } \bar{k}\ \text{ such that }\ \bar{k}=\mathop{\arg\max}_{k=1,2,\cdots,K}P^S_{-k}(\mathbf{Z}_{-k}\leq\lambda).$$

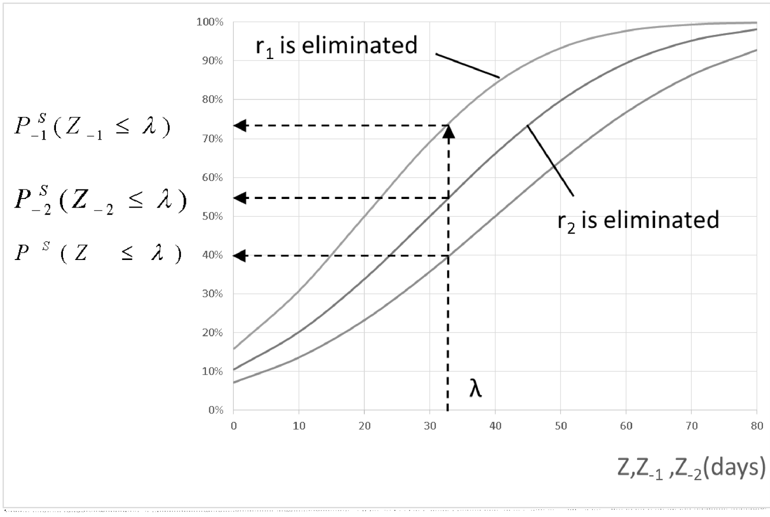


図 2: 回避すべきリスク・イベントを選択する

4 特殊な条件のもとでの解析

数理モデルの特徴を把握するため，いくつかの特殊なの条件のもとで解析的に分析する．まず，いずれのリスク・イベントが生起してもクリティカル・パスが変化しないという条件 (A) を仮定する．

条件

(A) $\exists \pi_w \in \Pi$ such that

$$\ell(\pi_w; \mathbf{d}) = \max_{l=1,2,\cdots,L} \ell(\pi_l; \mathbf{d}) \text{ and}$$
$$\ell(\pi_w; \mathbf{d} + \mathbf{s}_i X) = \max_{l=1,2,\cdots,L} \ell(\pi_l; \mathbf{d} + \mathbf{s}_i X) \text{ for } i = 1, 2, \cdots, 2^K.$$

$$\pi_w = G(V'(\pi_w), E'(\pi_w)) \subset G(V, E)$$
$$P^S(\mathbf{Z} = \max_{l=1,2,\cdots,L} \ell(\pi_l; \mathbf{d} + \mathbf{s}_i X)) = P^S(\mathbf{Z} = \ell(\pi_w; \mathbf{d} + \mathbf{s}_i X)) \quad i = 1, 2, \cdots, 2^K$$

条件 (A) のもとでは，クリティカル・パス π_w に含まれるアクティビティに対して遅延を発生させるリスク・イベントのみによって，プロジェクト完了時間 $\mathbf{Z}$ が決定される．以降，条件 (A) を満たすクリティカル・パス π_w が存在し，π_w に含まれるアクティビティに遅延を発生させるリスク・イベントを $r_1, r_2, \cdots, r_K$ とする．

条件

(B) $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_K$ かつ $\exists\, k^*$ s.t. $\lambda = \sum_{i=K-k^*+1}^{K} x_i$ $(k^* = 1, 2, \cdots, K-1)$

条件 (B) は，プロジェクト完了時間の目標値 λ を $K - k^* + 1$ 番目以降のリスク・イベントの影響度の和で表現できることを意味する．

条件

(C)　条件 (B) に加えて，次の条件が成立する．

$$\sum_{i=K-k+1}^{K} x_i \leq \sum_{i=1}^{k+1} x_i \quad \text{for } k = 1, 2, \cdots, k^*$$

条件 (C) は，$k = 1, 2, \cdots, k^*$ の k について，$k+1$ 個のリスク・イベントの影響度の合計は，k 個のリスク・イベントの影響度の合計以上であることを意味する．

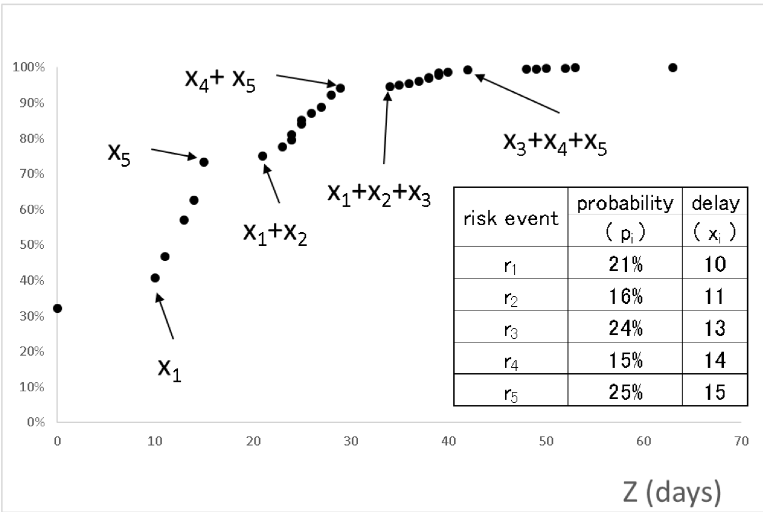
なお，条件 (C) が成立することは，次の条件が成立することと同値である．

$$\exists\, k^* \text{ s.t. } \lambda = \sum_{i=K-k^*+1}^{K} x_i \text{ and } x_1 \geq \sum_{i=1}^{k^*} \sum_{j=i+2}^{K-i+1} (x_j - x_{j-1}).$$

条件 (C) より，$x_0 = 0$ とすると，

$$\begin{aligned} x_1 \geq \sum_{i=K-k+1}^{K} x_i - \sum_{i=2}^{k+1} x_i &= \sum_{i=1}^{k} x_{K-k+i} - \sum_{i=1}^{k} x_{i+1} = \sum_{i=1}^{k} x_{K-k+i} - \sum_{i=1}^{k} x_{k+2-i} \\ &= \sum_{i=1}^{k} (x_{K-k+i} - x_{k+2-i}) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i+2}^{K-i+1} (x_j - x_{j-1}) \end{aligned}$$

である．よって，$x_1 \geq \sum_{i=1}^{k^*} \sum_{j=i+2}^{K-i+1} (x_j - x_{j-1})$ が成立する．逆に，$x_1 \geq \sum_{i=1}^{k^*} \sum_{j=i+2}^{K-i+1} (x_j - x_{j-1})$ が成立する場合，$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_K$ より $k = 1, 2, \cdots, k^*$ に対して，$x_1 \geq \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i+2}^{K-i+1} (x_j - x_{j-1})$ が成立し，条件 (c) が成立する．



risk event	probability (p_i)	delay (x_i)
r_1	21%	10
r_2	16%	11
r_3	24%	13
r_4	15%	14
r_5	25%	15

図 3: 条件 (A)，(B)，(C) を満足する $\mathbf{Z}$ の分布の例

条件 (A)，(B)，(C) が成立する場合，次の命題 4.1，4.2，4.3 が成立する．

命題 4.1. 条件 *(A)*，*(B)*，*(C)* かつ，$i = 1, 2, \cdots, K$ について $x_i = x$，$p_i = p$ の場合，どのリスク・イベント r_k を回避しても，プロジェクト完了時間 $\mathbf{Z}$ が目標値 λ 以下となる確率は等しい．

証明
$\lambda = k^* x$ より

$$P^S(\mathbf{Z} \leq \lambda) = \sum_{i=0}^{k^*} {}_K\mathrm{C}_i\ p^i(1-p)^{K-i},\quad P^S_{-k}(\mathbf{Z}_{-k} \leq \lambda) = \sum_{i=0}^{k^*} {}_{K-1}\mathrm{C}_i\ p^i(1-p)^{K-i-1}$$

となり，どのリスク・イベント r_k を回避しても，プロジェクト完了時間 $\mathbf{Z}$ が目標値 λ 以下となる確率は等しい. □

命題 4.2. 条件 *(A)*, *(B)*, *(C)* かつ， $i = 1, 2, \cdots, K$ について $x_i = x$ である場合,

$$p_k \geq p_{k'} \text{ ならば } P^S_{-k}(\mathbf{Z}_{-k} \leq \lambda) \geq P^S_{-k'}(\mathbf{Z}_{-k'} \leq \lambda)$$

である．よって， p_k が最大のリスク・イベント r_k を回避すべきである.

証明
$\lambda = k^* x$ より

$$P^S(\mathbf{Z} \leq \lambda) = p_k P^S_{-k}(\mathbf{Z}_{-k} \leq (k^*-1)x) + (1-p_k) P^S_{-k}(\mathbf{Z}_{-k} \leq k^* x)$$

確率空間 $(S, \mathcal{F}^S, P^S_{-k})$ 上の確率変数 $\mathbf{Z}_{-k}$ と同様に，リスク・イベント r_k, $r_{k'}$ を回避した確率空間 $(S, \mathcal{F}^S, P^S_{-(k,k')})$ および確率変数 $\mathbf{Z}_{-(k,k')}$ を導入すると $(k = 1, 2, \cdots, K,\ k' = 1, 2, \cdots, K)$,

$$\begin{aligned}
&P^S_{-k}(\mathbf{Z}_{-k} \leq \lambda)\\
&= p_{k'} P^S_{-(k,k')}(\mathbf{Z}_{-(k,k')} \leq (k^*-1)x) + (1-p_{k'}) P^S_{-(k,k')}(\mathbf{Z}_{-(k,k')} \leq k^* x)\\
&= p_{k'} (P^S_{-(k,k')}(\mathbf{Z}_{-(k,k')} \leq (k^*-1)x) - P^S_{-(k,k')}(\mathbf{Z}_{-(k,k')} \leq k^* x)) + P^S_{-(k,k')}(\mathbf{Z}_{-(k,k')} \leq k^* x)
\end{aligned}$$

である．ここで， $P^S_{-(k,k')}(\mathbf{Z}_{-(k,k')} \leq (k^*-1)x) \leq P^S_{-(k,k')}(\mathbf{Z}_{-(k,k')} \leq k^* x)$ より,

$$p_k \geq p_{k'} \text{ ならば } P^S_{-k}(\mathbf{Z}_{-k} \leq \lambda) \geq P^S_{-k'}(\mathbf{Z}_{-k'} \leq \lambda)$$

である．よって， $P^S_{-k}(\mathbf{Z}_{-k} \leq \lambda)$ を最大化するためには，p_k が最大のリスク・イベント r_k を回避すべきである. □

命題 4.3.
条件 (A)， (B)， (C) かつ $i = 1, 2, \cdots, K$ について $p_i = p$ であるとき,

$$P^S_{-k}(\mathbf{Z}_{-k} \leq \lambda) = \sum_{i=0}^{k^*} {}_{K-1}\mathrm{C}_i\ p^i(1-p)^{K-i-1}.$$

が成立し，どのリスク・イベント r_k を回避しても，プロジェクト完了時間 $\mathbf{Z}$ が目標値 λ 以下となる確率は等しい.

証明
$U \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2, \cdots, K\}$, $\mathcal{U}_l \stackrel{\text{def}}{=} \{\{j_1, j_2, \cdots, j_l\} \mid \{j_1, j_2, \cdots, j_l\} \subset U\}$ $\ l = 1, 2, \cdots, K$, $\widehat{U} \in \mathcal{U}_l$ と定義する． $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_K$ より,

$$\max_{\widehat{U} \in \mathcal{U}_l} \sum_{i \in \widehat{U}} x_i = \sum_{i=K-l+1}^{K} x_i,\quad \min_{\widehat{U} \in \mathcal{U}_{l+1}} \sum_{i \in \widehat{U}} x_i = \sum_{i=1}^{l+1} x_i$$

である．さらに条件 (C) より， $k=1,2,\cdots,K,\ l=1,2,\cdots,k^*$ について，

$$\max_{\substack{\widehat{U}\subset U\setminus\{k\}\\ \widehat{U}\in\mathcal{U}_l}}\sum_{i\in\widehat{U}}x_i \le \max_{\widehat{U}\in\mathcal{U}_l}\sum_{i\in\widehat{U}}x_i \le \min_{\widehat{U}\in\mathcal{U}_{l+1}}\sum_{i\in\widehat{U}}x_i \le \min_{\substack{\widehat{U}\subset U\setminus\{k\}\\ \widehat{U}\in\mathcal{U}_{l+1}}}\sum_{i\in\widehat{U}}x_i$$

である．よって， $l=k^*$ を代入すると，

$$\max_{\substack{\widehat{U}\subset U\setminus\{k\}\\ \widehat{U}\in\mathcal{U}_{k^*}}}\sum_{i\in\widehat{U}}x_i \le \max_{\widehat{U}\in\mathcal{U}_{k^*}}\sum_{i\in\widehat{U}}x_i = \lambda \le \min_{\substack{\widehat{U}\subset U\setminus\{k\}\\ \widehat{U}\in\mathcal{U}_{k^*+1}}}\sum_{i\in\widehat{U}}x_i$$

となる．また，

$$0=\max_{\substack{\widehat{U}\subset U\setminus\{k\}\\ \widehat{U}\in\mathcal{U}_0}}\sum_{i\in\widehat{U}}x_i \le \max_{\substack{\widehat{U}\subset U\setminus\{k\}\\ \widehat{U}\in\mathcal{U}_1}}\sum_{i\in\widehat{U}}x_i \le \cdots \le \max_{\substack{\widehat{U}\subset U\setminus\{k\}\\ \widehat{U}\in\mathcal{U}_{k^*-1}}}\sum_{i\in\widehat{U}}x_i \le \max_{\substack{\widehat{U}\subset U\setminus\{k\}\\ \widehat{U}\in\mathcal{U}_{k^*}}}\sum_{i\in\widehat{U}}x_i$$

$$P^S_{-k}\left(\max_{\substack{\widehat{U}\subset U\setminus\{k\}\\ \widehat{U}\in\mathcal{U}_{l-1}}}\sum_{i\in\widehat{U}}x_i < \mathbf{Z}_{-k} \le \max_{\substack{\widehat{U}\subset U\setminus\{k\}\\ \widehat{U}\in\mathcal{U}_l}}\sum_{i\in\widehat{U}}x_i\right) = {}_{K-1}\mathrm{C}_l\ p^l(1-p)^{K-l-1}$$

より，

$$P^S_{-k}(\mathbf{Z}_{-k}\le\lambda)=\sum_{i=0}^{k^*}{}_{K-1}\mathrm{C}_i\ p^i(1-p)^{K-i-1}$$

が成立し，どのリスク・イベント r_k を回避しても，プロジェクト完了時間 $\mathbf{Z}$ が目標値 λ 以下となる確率は等しい． □

このように，条件 (A)，(B)，(C) のもとで回避すべきリスク・イベントは，リスク・イベントの生起確率と影響度により，次のように特徴づけられることがわかった．

- (命題 4.1) 生起確率および影響度が等しい場合，いずれのリスク・イベントを回避しても同じである
- (命題 4.2) 影響度が等しい場合，生起確率が最大のリスク・イベントを回避すべきである
- (命題 4.3) 生起確率が等しい場合，いずれのリスク・イベントを回避しても同じである

しかし，リスク・イベントの生起確率と影響度が一般的な値をとる場合，解析的に十分な結果を得られていない．

5 まとめと課題

本研究では，第一に，プロジェクト完了時間とリスク・イベントの関係を表すための新たな数理モデルを構築した．第二に，この数理モデルを用いて，プロジェクト・リスク・マネジメントの実務における対処すべきリスク・イベントの選択に関する意思決定問題を定式化した．第三に，この数理モデルにいくつかの条件を追加し，プロジェクト完了時間とリスク・イベントの関係を解析的に分析した．

今後の研究においては，より一般的な条件のもとでプロジェクト完了時間とリスク・イベントの関係を解析的に分析する必要がある．さらに実務的には，コンピュータを使用して，この数理モデルにリスク・イベントに関する情報（生起確率と影響度）を与えることにより，プロジェクト完了時間の分布を求めることが可能となると考えられ，より効率的なアルゴリズムの研究に取り組む必要がある．

参考文献

[1] Bajis Dodin, Determining the K Most Critical Paths in PERT Networks, *Operations Research*, Vol. 32, No. 4, pp.859-877, 1984.

[2] Yacov Y. Haimes, On the Complex Definition of Risk:A Systems-Based Approach, *Risk Analysis, Vol. 29, No. 12, 2009*, Vol. 29, No. 12, pp.1647–1654, 2009.

[3] Stanley Kaplan, The Words of Risk Analysis, *Risk Analysis, Vol. 29, No. 12, 2009*, Vol. 17, No. 4, pp.407–417, 1997.

[4] Stanley Kaplan and B. John Garrick, The Quantitative Definition of Risk, *Risk Analysis*, Volume 1(1), pp.11–27, 1981.

[5] James E. Kelley Jr, Critical-Path Planning and Scheduling: Mathematical Basis, *Operations Research*, Vol. 9(3), pp.296-320, 1961.

[6] Kenneth R. MacCrimmon and Charles A. Ryavec, An Analytical Study of the PERT Assumptions, *Operations Research*, Vol. 12, No. 1, pp.16-37, 1964.

[7] J. O. Mayhugh, On the Mathematical Theory of Schedules, *Management Science*, Vol. 11, No. 2, pp.289-307, 1964.

[8] K. D. Wall, The Kaplan and Garrick Definition of Risk and its Application to Managerial Decision Problems , http://www.nps.edu/Academics/Centers/DRMI/docs/DRMI%20Working%20Paper%2011-3.pdf, 2011.

[9] Project Management Institute, Inc., A Guide to the Project Management Body of Knowledge (PMBOK Guide) Fifth Edition, 2013.