数理解析研究所講究録
第 1939 巻 2015 年 88-94

2回停止可能なラシアン・オプションに対する自由境界問題の非線形積分方程式

Nonlinear integral equation for the optimal double stopping boundary of Russian option

戸松匠 *1, 冨田享平 *1, 穴太克則 *2
*1:芝浦工業大学大学院 理工学研究科 システム理工学専攻 数理科学部門
*2:芝浦工業大学 システム理工学部 数理科学科

概要： 複数回権利行使可能なラシアン・オプションの最適停止問題の最適停止境界を分析する.

1. ラシアン・オプション

株価は以下の幾何ブラウン運動に従うとする.

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dB_t \ \ (S_0 = s). \tag{1}$$

$B = (B_t)_{t\geq 0}$ は $B_0 = 0$ の標準ブラウン運動, $T > 0$ は満期時刻, $r > 0$ は金利, $\sigma > 0$ はボラティリティとする. このとき裁定の起きないラシアン・オプションの価格は以下で定義される.

$$V^{[1]} = \sup_{0\leq\tau\leq T} \mathbb{E}[e^{-r\tau} M_\tau]. \tag{2}$$

ここで, τ は停止時刻であり, $M = (M_t)_{0\leq t\leq T}$ は以下の式で定義される.

$$M_t = \left(\max_{0\leq u\leq t} S_u\right) \vee m. \tag{3}$$

ただし, $m \geq s > 0$ で既知. M は以下のような経路となる.

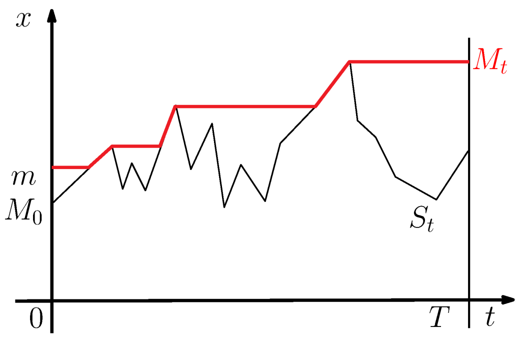

図 1: M_t の軌跡

$X_t = M_t/S_t, d\widetilde{P} = \exp\left\{\sigma \widetilde{B}_t - \sigma^2 t/2\right\} dP, \widetilde{B}_t = B_t - \sigma t$ と置き変数変換を行う. ただし, 割引率 $\lambda > 0$ を導入して M_τ を $e^{-\lambda\tau} M_\tau$ に置き換えてから測度変換を行う. すると (2) 式は以下の最適停止問題に帰着される. 尚, 「権利行使」のことを「停止」と呼ぶこととする.

$$V^{[1]} = s \sup_{0\leq\tau\leq T} \widetilde{\mathbb{E}}\left[e^{-\lambda\tau} X_\tau\right]. \tag{4}$$

X_t は以下の確率微分方程式を満たす.

$$dX_t = -rX_t dt - \sigma X_t d\widetilde{B}_t + dR_t. \tag{5}$$

ここで,

$$R_t = \int_0^t I(X_s = 1)\frac{dM_s}{S_s}. \tag{6}$$

X_t は $[1,\infty)$ で拡散過程となり, 以下の無限小生成作用素を持ち, 1 で直ちに反射する性質を持つ.

$$\mathbb{L}_X = -rx\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2}x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \text{in} \quad (1,\infty), \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0 \quad \text{at } 1+. \tag{8}$$

また, $s=1, m=x\geq 1$ としても一般性を失わない.

以上をまとめると, ラシアン・オプションを解くことは次の最適停止問題を解くことに帰着される.

$$V^{[1]}(t,x) = \sup_{0\leq\tau\leq T-t} \widetilde{\mathbb{E}}_{t,x}\left[e^{-\lambda\tau}X_{t+\tau}\right]. \tag{9}$$

ただし, $\widetilde{\mathbb{E}}_{t,x}$ は $\widetilde{P}_{t,x}$ の下での期待値であり, $(t,x)\in[0,T)\times[1,\infty)$ は既知. 上式の最適停止問題から以下の自由境界問題が導かれている (参考 [2]).

$$\begin{cases} V_t^{[1]} + \mathbb{L}_X V = \lambda V & \text{in } C^{[1]}, \\ V^{[1]}(t,x) = x & \text{for } x = b^{[1]}(t), \\ V_x^{[1]}(t,x) = 1 & \text{for } x = b^{[1]}(t) \text{ (smooth fit)}, \\ V_x^{[1]}(t,1+) = 0 & \text{(normal reflection)}, \\ V^{[1]}(t,x) > x & \text{in } C^{[1]}, \\ V^{[1]}(t,x) = x & \text{in } D^{[1]}. \end{cases}$$

ここで, $C^{[1]}$ は継続領域, $D^{[1]}$ は停止領域を表し, 以下である.

$$C^{[1]} = \left\{(t,x)\in[0,T)\times[1,\infty) : x < b^{[1]}(t)\right\}, \tag{10}$$

$$D^{[1]} = \left\{(t,x)\in[0,T]\times[1,\infty) : x \geq b^{[1]}(t)\right\}. \tag{11}$$

$b^{[1]}(t):[0,T]\mapsto\mathbb{R}$ は最適停止境界で, 最適停止時刻は

$$\tau^*_{b^{[1]}} = \inf\left\{0\leq s\leq T-t : X_{t+s}\geq b^{[1]}(t+s)\right\}, \tag{12}$$

となることが知られている (参考 [2]).

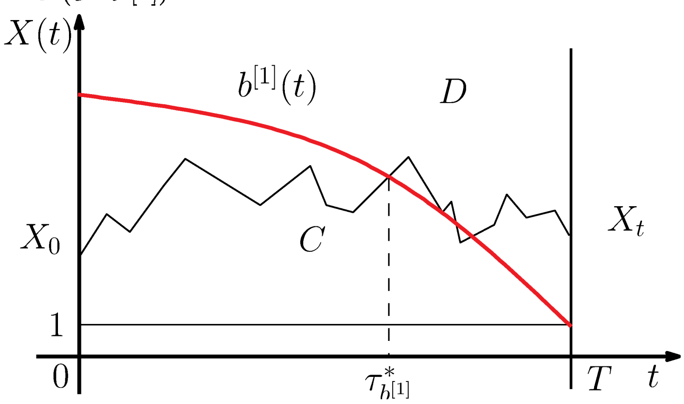

図 2: ラシアン・オプションの最適停止境界.

最適値関数 $V^{[1]}(t,x)$ は以下の性質を持つ.

補題 1

1. $x \mapsto V^{[1]}(t,x)$ は $[1,\infty)$ で増加で凸関数 .
2. $t \mapsto V^{[1]}(t,x)$ は $[0,T]$ で減少.
3. $(t,x) \mapsto V^{[1]}(t,x)$ は連続.
4. $V_x^{[1]}(t,1+) = 0$ (normal reflection).
5. $V_t^{[1]}(t,x) + \mathbb{L}_X V^{[1]}(t,x) = \lambda V^{[1]}(t,x)$ in $C^{[1]}$.

(証明) 略.

最適停止境界 $b^{[1]}(t)$ の性質として以下が成り立つ.

補題 2

1. $b^{[1]}(t)$ が存在する.
2. $b^{[1]}(t)$ は減少関数.
3. $b^{[1]}(t)$ は連続関数.
4. $b^{[1]}(t)$ は $[0,T)$ で値 1 を取らない.
5. $b^{[1]}(T-) = 1$.
6. $V_x^{[1]}(t,b^{[1]}(t)) = U_x^{[1]}(t,b^{[1]}(t))$ (smooth fit).

(証明) 略.

$b^{[1]}(t)$ は以下の非線形積分方程式を満たすことが証明されている (参考 [2]).

$$b^{[1]}(t) = e^{-\lambda(T-t)}F(T-t,b^{[1]}(t)) + (r+\lambda)\int_0^{T-t} e^{-\lambda u}G(u,b^{[1]}(u),b^{[1]}(t+u))du. \tag{13}$$

ここで, $t>0$ と $x,y \geq 1$ に対して,

$$F(t,x) = \widetilde{\mathbb{E}}_{0,x}[X_t] = \int_1^\infty \int_0^m \left(\frac{m \vee x}{s}\right) f(t,s,m)dsdm,$$

$$G(t,x,y) = \widetilde{\mathbb{E}}_{t,x}[X_t I(X_t \geq y)] = \int_1^\infty \int_0^m \left(\frac{m \vee x}{s}\right) I\left(\left(\frac{m \vee x}{s}\right) \geq y\right) f(t,s,m)dsdm,$$

$(s,m) \mapsto f(t,s,m)$ は (S_t, M_t) の同時確率密度関数である.

$$f(t,s,m) = \frac{2}{\sigma^3\sqrt{2\pi t^3}} \frac{\log\left(\frac{m^2}{s}\right)}{sm} \exp\left\{-\frac{\log^2\left(\frac{m^2}{s}\right)}{2\sigma^2 t} + \frac{\beta}{\sigma} + \log s - \frac{\beta^2}{2}t\right\}. \tag{14}$$

$0 < s \leq m$ と $m \geq 1$ で $\beta = r/\sigma + \sigma/2$ であり, $f(t,s,m)$ はそれ以外では 0 である.

2. 複数回権利行使可能ラシアン・オプション

複数回権利行使可能なラシアン・オプションの最適値関数を以下のように定める.

$$V^{[2]} = \sup_{0 \leq \tau_1 < \tau_2 \leq T} \mathbb{E}[e^{-r\tau_1}M_{\tau_1} + e^{-r\tau_2}M_{\tau_2}]. \tag{15}$$

$\tau_2 - \tau_1 \geq \delta > 0$ とする. τ_1 は 1 回目の停止時刻を, τ_2 は 2 回目の停止時刻を, δ は待機時間をあらわす. 待機時間とは, 1 回目の停止時刻の直後の権利行使をできない時間. この時間を導入し, 同時刻に 2 回の権利行使をできないようにする. 待機時間が 0 の場合, 1 回権利行使可能なラシアン・オプショ

ンを2つ持っていることと同値になり, したがって, 研究自体がさほど意味を持たなくなる. 1回停止可能なラシアン・オプションと同様に測度変換を行うと, 以下の最適停止問題が得られる.

$$V^{[2]}(t,x) = \sup_{0\le\tau_1<\tau_2\le T-t} \widetilde{\mathbb{E}}_{t,x}[e^{-\lambda\tau_1}X_{t+\tau_1} + e^{-\lambda\tau_2}X_{t+\tau_2}]. \tag{16}$$

最適値関数 $V^{[2]}(t,x)$ の性質として以下が成り立つ.

補題 3

1. $x \mapsto V^{[2]}(t,x)$ は $[1,\infty)$ で増加で凸関数.
2. $t \mapsto V^{[2]}(t,x)$ は $[0,T]$ で減少.
3. $V^{[2]}(t,x) \ge V^{[1]}(t,x)$.
4. $(t,x) \mapsto V^{[2]}(t,x)$ は連続.
5. $V_x^{[2]}(t,1+) = 0$ (normal reflection).

(証明) 紙面の都合上1,2,3の証明のみ記載. M_t, X_t の定義より $X_t = (M_t \vee x)/S_t$ さらに, $M_t \vee x = (x - M_t)^+ + M_t$, したがって

$$\begin{aligned}
V^{[2]}(t,x) &= \sup_{0\le\tau_1<\tau_2\le T-t} \widetilde{\mathbb{E}}_{t,x}[e^{-r\tau_1}X_{t+\tau_1} + e^{-r\tau_2}X_{t+\tau_2}] \\
&= \sup_{0\le\tau_1<\tau_2\le T-t} \widetilde{\mathbb{E}}_{t,x}\left[e^{-r\tau_1}\frac{(x-M_{\tau_1})^+ + M_{\tau_1}}{S_{\tau_1}} + e^{-r\tau_2}\frac{(x-M_{\tau_2})^+ + M_{\tau_2}}{S_{\tau_2}}\right]
\end{aligned} \tag{17}$$

したがって, 1,2,3が成り立つ.

$U^{[1]}(t,x), U^{[2]}(t,x)$ を以下のように定義する. $U^{[1]}(t,x)$ は残り1回権利行使可能なとき $X_t = x$ で権利行使したときの利得をあらわす. $U^{[2]}(t,x)$ は残り2回権利行使可能なとき $X_t = x$ で権利行使したときの最大期待利得をあらわす.

$$U^{[1]}(t,x) = x. \tag{18}$$

$$U^{[2]}(t,x) = \begin{cases} U^{[1]}(t,x) + e^{-\lambda\delta}\widetilde{\mathbb{E}}_{t,x}\left[V^{[1]}(t+\delta, X_{t+\delta})\right] & t \in [0, T-\delta), \\ U^{[1]}(t,x) & t \in [T-\delta, T]. \end{cases} \tag{19}$$

ここで,

$$C^{[2]} = \left\{(t,x) \in [0,T) \times [1,\infty) : V^{[2]}(t,x) > U^2(t,x)\right\},$$
$$D^{[2]} = \left\{(t,x) \in [0,T] \times [1,\infty) : V^{[2]}(t,x) = U^{[2]}(t,x)\right\}.$$

このとき, 「ある境界 $b^{[2]}(t)$ が存在して, 最適継続領域 $C^{[2]}$, 最適停止領域 $D^{[2]}$, 最適停止時刻 τ_1^*, τ_2^* は以下のようにあらわすことができる」(未証明. まだ仮定).

$$C^{[2]} = \left\{(t,x) \in [0,T) \times [1,\infty) : x < b^{[2]}(t)\right\},$$
$$D^{[2]} = \left\{(t,x) \in [0,T] \times [1,\infty) : x \ge b^{[2]}(t)\right\},$$
$$\tau_1^* = \inf\{0 \le s \le T-(t+\delta) : X_{t+s} \ge b^{[2]}(t+s)\},$$
$$\tau_2^* = \inf\{\delta \le s \le T-t : X_{t+s} \ge b^{[1]}(t+s)\}.$$

境界 $b^{[2]}(t)$ の性質として以下が成り立つ.

補題 4

1. $b^{[2]}(t)$ は減少関数.
2. $b^{[2]}(t)$ は連続関数.
3. $b^{[2]}(t)$ は $[0, T-\delta)$ で値 1 を取らない.
4. $b^{[2]}((T-\delta)-) = 1$.
5. $V_x^{[2]}(t, b^{[2]}(t)) = U_x^{[2]}(t, b^{[2]}(t))$(smooth fit).
6. $b^{[2]}(t) \le b^{[1]}(t)$.
7. $b^{[2]}(t)$ は以下の非線形積分方程式を満たす.

$$\begin{aligned} b^{[2]}(t) =& e^{-\lambda(T-(t+\delta))}\widetilde{\mathbb{E}}_{t,b^{[2]}(t)}\left[V^{[2]}(T-\delta, X_{T-\delta})\right] \\ &-\widetilde{\mathbb{E}}_{t,b^{[2]}(t)}\left[\int_0^{T-(t+\delta)} e^{-\lambda u}\left(U_t^{[2]} + \mathbb{L}_X U^{[2]} - \lambda U^{[2]}\right)(t+u, X_{t+u})\mathbb{I}_{\{X_{t+u}\ge b^{[2]}(t+u)\}}du\right]. \end{aligned} \tag{20}$$

(証明) 紙面の都合上 2,6,7 のみ記載.

(2 の証明) $b^{[2]}(t)$ は連続関数を示す. まず右連続を示す. $b^{[2]}(t)$ 次のような数列 $t_n \downarrow t (n \to \infty)$ を考えると

$$(t_n, b^{[2]}(t_n)) \in D^{[2]} \to (t, b^{[2]}(t+)) \in D^{[2]}. \tag{21}$$

$D^{[2]}$ の構造より $b^{[2]}(t+) \ge b^{[2]}(t)$. 一方, $b^{[2]}(t)$ 減少関数なので, $b^{[2]}(t) \ge b^{[2]}(t+)$ を得る. したがって $b^{[2]}(t+) = b^{[2]}(t)$.

次に $b^{[2]}(t)$ が左連続を示す. $b^{[2]}(t-) > b^{[2]}(t)$ となるような $t \in (0, T]$ が存在すると仮定する.

$$V^{[2]}(s,x) - U^{[2]}(s,x) = \int_x^{b^{[2]}(s)}\int_y^{b^{[2]}(s)} (V_{xx}^{[2]} - U_{xx}^{[2]})dzdy. \tag{22}$$

上式に $V_{xx}^{[2]} = (2/\sigma^2 x^2)(rV^{[2]}(t,x) - V_t^{[2]}(t,x) + V_x^{[2]}(t,x)) \ge c > 0$, $U_{xx}^{[2]}(t,x) = 0$, を用いて

$$V^{[2]}(s,x) - U^{[2]}(s,x) \ge \int_x^{b^{[2]}(s)}\int_x^{b^{[2]}(s)} c \;\; dzdy = \int_x^{b^{[2]}(s)} c(b^{[2]}(t) - y)dy, \tag{23}$$

を得る. ここで $s \uparrow t$ とすると

$$\begin{aligned} V^{[2]}(t,x) - U^{[2]}(t,x) &\ge \int_x^{b^{[2]}(t-)} c(b^{[2]}(t-) - y)dy, \\ &= \frac{c}{2}(b^{[2]}(t-) - x)^2 > 0. \end{aligned} \tag{24}$$

以上より左連続である. したがって, $b^{[2]}(t)$ は連続である.

(6 の証明) $b^{[2]}(t) \le b^{[1]}(t)$ を示す. $D^{[1]}$, $D^{[2]}$ は以下の式で定義された.

$$\begin{aligned} D^{[1]} &= \{(t,x) \in [0,T] \times [1,\infty) : V^{[1]}(t,x) = U^{[1]}(t,x)\}, \\ D^{[2]} &= \{(t,x) \in [0,T] \times [1,\infty) : V^{[2]}(t,x) = U^{[2]}(t,x)\}. \end{aligned}$$

また $V^{[1]}(t,x) \le V^{[2]}(t,x)$, $U^{[1]}(t,x) \le U^{[2]}(t,x)$ より, $D^{[1]} \subseteq D^{[2]}$ は明らか. したがって $b^{[2]}(t) \le b^{[1]}(t)$.

(7 の証明) まず F を割引最大期待利得とし, $F(t,x) = e^{-\lambda t}V^{[2]}(t,x)$ と定義する. $F(t,x)$ は次の 4 つの条件を満たす: (i)F は $C^{1,2}$ on $C^{[2]} \cup D^{[2]}$. (ii)$F_t + \mathbb{L}_X F$ は局所有界. (iii)$x \mapsto F(t,x)$ は凸関数.

(iv)$t \mapsto F_x(t, b(t)\pm)$ は連続. 伊藤の公式を $F(t,x)$ に適用すると,

$$e^{-\lambda s} V^{[2]}(t+s, X_{t+s}) = V^{[2]}(t,x) + \int_0^s (V_t^{[2]} + \mathbb{L}_X V^{[2]} - \lambda V^{[2]})(t+u, X_{t+u}) du + M_s, \tag{25}$$

を得る. ここで, $M_s = \int_0^s e^{-\lambda u} V_x^{[2]}(t+u, X_{t+u}) \sigma X_{t+u} d\widehat{B}_{t+u}$ でありマルチンゲール. $s = T - (t+\delta)$ として期待値を取ると,

$$\begin{aligned} V^{[2]}(t,x) &= e^{-\lambda(T-(t+\delta))} \widetilde{\mathbb{E}}_{t,x}\left[V^{[2]}(T-\delta, X_{T-\delta})\right] \\ &-\widetilde{\mathbb{E}}_{t,x}\left[\int_0^{T-(t+\delta)} e^{-\lambda u}\left(U_t^{[2]} + \mathbb{L}_X U^{[2]} - \lambda U^{[2]}\right)(t+u, X_{t+u}) \mathbb{I}_{\{X_{t+u} \geq b^{[2]}(t+u)\}} du\right]. \end{aligned} \tag{26}$$

$x = b^{[2]}(t)$ を (26) に代入すると, $b^{[2]}(t)$ は以下を満たす.

$$\begin{aligned} V^{[2]}(t, b^{[2]}(t)) &= e^{-\lambda(T-(t+\delta))} \widetilde{\mathbb{E}}_{t,b^{[2]}(t)}\left[V^{[2]}(T-\delta, X_{T-\delta})\right] \\ &-\widetilde{\mathbb{E}}_{t,b^{[2]}(t)}\left[\int_0^{T-(t+\delta)} e^{-\lambda u}\left(U_t^{[2]} + \mathbb{L}_X U^{[2]} - \lambda U^{[2]}\right)(t+u, X_{t+u}) \mathbb{I}_{\{X_{t+u} \geq b^{[2]}(t+u)\}} du\right]. \end{aligned}$$

□

以上より, 次の残り 2 回権利行使可能な場合に対するラシアン・オプションの自由境界問題が導かれる.

$$\begin{cases} V_t^{[2]} + \mathbb{L}_X V^{[2]} = \lambda V^{[2]} & \text{in } C^{[2]}, \\ V^{[2]}(t,x) = U^{[2]}(t,x) & \text{for } x = b^{[2]}(t), \\ V_x^{[2]}(t,x) = U_x^{[2]}(t,x) & \text{for } x = b^{[2]}(t) \text{ (smooth fit)}, \\ V_x^{[2]}(t, 1+) = 0 & \text{(normal reflection)}, \\ V^{[2]}(t,x) > U_x^{[2]}(t,x) & \text{in } C^{[2]}, \\ V^{[2]}(t,x) = U_x^{[2]}(t,x) & \text{in } D^{[2]}. \end{cases}$$

Verification Theorem

複数回権利行使可能なラシアン・オプションの価格関数と最適停止境界は一意の解を持つ.

$$\begin{cases} V_t^{[2]} + \mathbb{L}_X V^{[2]} = \lambda V^{[2]} & \text{in } C^{[2]}, \\ V^{[2]}(t,x) = U^{[2]}(t,x) & \text{for } x = b^{[2]}(t), \\ V_x^{[2]}(t,x) = U_x^{[2]}(t,x) & \text{for } x = b^{[2]}(t) \text{ (smooth fit)}, \\ V_x^{[2]}(t, 1+) = 0 & \text{(normal reflection)}, \\ V^{[2]}(t,x) > U^{[2]}(t,x) & \text{in } C^{[2]}, \\ V^{[2]}(t,x) = U^{[2]}(t,x) & \text{in } D^{[2]}. \end{cases}$$

(証明) ここでは, 境界の一意性のみを示す. 別の境界 $c^{[2]}(t)$ が存在すると仮定する.

$$\begin{aligned} W^c(t,x) =& e^{-\lambda(T-(t+\delta))} \widetilde{\mathbb{E}}_{t,x}\left[V^{[2]}(T-\delta, X_{T-\delta})\right] \\ &- \widetilde{\mathbb{E}}_{t,x}\left[\int_0^{T-(t+\delta)} e^{-\lambda u}\left(U_t^{[2]} + \mathbb{L}_X U^{[2]} - \lambda U^{[2]}\right)(t+u, X_{t+u}) \mathbb{I}_{\{X_{t+u \geq c^{[2]}(t+u)}\}} du\right]. \end{aligned} \tag{27}$$

V^c を以下で定義する.

$$V^c(t,x) = \begin{cases} W^c(t,x), & x < c^{[2]}(t), \\ U^{[2]}(t,x), & x \geq c^{[2]}(t). \end{cases}$$

伊藤の公式を $V^c(t,x), V^{[2]}(t,x)$ に適用すると,

$$\begin{aligned} &e^{-\lambda s}V^c(t+s, X_{t+s}) \\ &\quad = V^c(t,x) + \int_0^s e^{-\lambda u}(U_t^{[2]} + \mathbb{L}_X U^{[2]} - \lambda U^{[2]})(t+u, X_{t+u})\mathbb{I}_{\{X_{t+u} \geq c^{[2]}(t+u)\}}du + \widetilde{M}_s^{c^{[2]}}, \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} &e^{-\lambda s}V^{[2]}(t+s, X_{t+s}) \\ &\quad = V^{[2]}(t,x) + \int_0^s e^{-\lambda u}(U_t^{[2]} + \mathbb{L}_X U^{[2]} - \lambda U^{[2]})(t+u, X_{t+u})\mathbb{I}_{\{X_{t+u} \geq b^{[2]}(t+u)\}}du + \widetilde{M}_s^{b^{[2]}}. \end{aligned} \tag{29}$$

ここで, $\widetilde{M}_s^{c^{[2]}}, \widetilde{M}_s^{b^{[2]}}$ は $\widetilde{P}_{t,x}$ の下でマルチンゲール.

次の停止時刻について考える. $\tau_{c^{[2]}} := \inf\{0 \leq s \leq T-(t+\delta) : X_{t+s} \geq c^{[2]}(t+s)\}$. (28) 式において, $s = \tau_{c^{[2]}}$ を代入すると,

$$V^{c^{[2]}}(t,x) \leq V^{[2]}(t,x). \tag{30}$$

さらに, 次の停止時刻について考える. $\sigma_{b^{[2]}} := \inf\{0 \leq s \leq T-(t+\delta) : X_{t+\delta} \leq b^{[2]}(t+s)\}$. (28), (29) 式で $s = \sigma_{b^{[2]}}, x > b^{[2]}(t) \vee c^{[2]}(t)$ として期待値を取ると,

$$b^{[2]}(t) \leq c^{[2]}(t).$$

最後に, 次の停止時刻について考える. $\tau_{b^{[2]}} := \inf\{0 \leq s \leq T-(t+\delta) : X_{t+s} \geq b^{[2]}(t+s)\}$. (28), (29) 式において $s = \tau_{b^{[2]}}$ として期待値をとると,

$$b^{[2]}(t) = c^{[2]}(t).$$

以上より最適停止境界 $b^{[2]}(t)$ の一意性が言えた. □

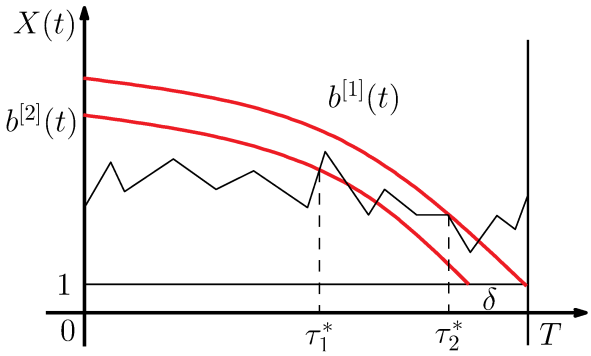

図 3: 複数回権利行使可能なラシアン・オプションの最適停止境界

参考文献

[1] 穴太克則, (2014), "講義ノート: 数理ファイナンス", 芝浦工業大学大学院理工学研究科 システム理工学専攻 数理科学部門.

[2] G. Peskir and A. N. Shiryaev, (2006), *Optimal Stopping and Free-Boundary Problems*, Lectures in Mathematics, ETH Zurich, Birkhauser.

[3] L. Shepp and A. N. Shiryaev, (1998), The Russian Option: Redeced Regret, AT&T Bell Laboratories, Murray Hill, New Jersey.

[4] S. E. Shreve, (2004), *Stochastic Calculus for Finance II, Continuous-Time Models*, Springer.