数理解析研究所講究録
第1939巻 2015年 55-61

有向ネットワーク上の探索ゲームとその周辺

兵庫県立大学経営学部　菊田　健作
Kensaku KIKUTA
School of Business Administration
University of Hyogo

1. はじめに

hider と呼ばれる player が1個の静止目標物を有限有向ネットワーク上のノードのどれかに隠す．もう1人の探索者と呼ばれる player はネットワークの辺上を辺の向きにしたがって移動しながらノードにある静止目標物を探す．探索者がノードを調べるときに調査費用が，また辺上を移動するときに移動費用が発生する．探索者は有向ネットワークの辺の向きにしたがって移動せねばならないので，ネットワークの構造によってはすべてのノードに到達できるとは限らない．探索者は hider を見つけるまでの総費用が小さくなるようにノードを探索する順序を決めねばならない．一方，hider は総費用が大きくなるように目標物を隠すノードを選ぶ．このような状況が両 player の利得の和をゼロとして行列ゲームモデルとして表現される．

本稿の目的は，有限有向ネットワーク上で探索者の初期位置（ノード）が特定されていないような探索ゲームを扱った Baston/Kikuta [4] の内容を紹介し，かつ有向 grid ネットワーク上の探索ゲームの例を考えること，今後の課題を述べることである．Alpern/Gal [2] と Ruckle [11] は探索ゲームについて解説したテキストである．Gluss [6] はゲームではなく費用最小化問題を扱っているが，この分野の草分けの論文である．Itai et.al.[7] と Zamfirescu et. al.[12] は grid ネットワークを扱った論文である．Dagan/Gal[5] は探索領域がネットワーク上の任意の点で探索者の初期位置が指定されていなく移動費用のみの場合を扱っている．Kikuta[8,9] および Kikuta/Ruckle[10] は探索者の初期位置が指定され，かつ探索領域はノードであるようなモデルを扱っているが，Baston/Kikuta[3] は無向ネットワークで探索者の初期位置が指定されていない場合を扱っている．いづれも，移動費用と調査費用を想定している．Alpern[1] では探索者が進む向きによって移動費用が異なる場合を調べている．

2. 有向ネットワーク上の探索ゲーム

本節では，移動費用と調査費用を考慮した有限有向ネットワーク上の探索ゲームについてさらに詳しく述べる．$\mathcal{G}=(N,E)$ を弱連結な有限有向ネットワークとする．ここに $N=\{1,...,n\}, n\geq 2$, はノードの集合，$E\subseteq N\times N$ は有向辺の集合である．$i,j\in N$ に対し，$(i,j)\in E$ はノード i から j へ向かう有向辺があることを表す．有向辺に沿ったノードの列を有向歩道という．通るノードがすべて異なる有向歩道を有向パスという．

2人の player，つまり hider と探索者がおり，hider は N に含まれるノードのどれか1つを

選びそこに静止目標物を隠す．探索者は hider がどのノードを選んだかを知らずに任意のノードを選びそこを調べて目標物がないならば，そこから辺上を辺の向きにしたがって移動しながら各ノードを調べて行く．ノードを調べずに通過することもできる．ノードを通過するのに要する時間は，そのノードを調べても調べなくても同じで０である．静止目標物が見つかった時点で探索は終了する．探索者が静止目標物が存在するノードを調べたときその静止目標物を見逃す確率はどのノードについても０である．したがって探索者が同一のノードを２度以上調べることはない．ノード $i \in N$ を調べる費用は $c_i > 0$ である．$(i,j) \in E$ のとき，ノード i から j への移動費用は $d(i,j)$ である．$(i,j) \notin E$ かつ i から j への有向パスが存在するときは，有向パス上の有向辺の移動費用の和を考え，その最小値を $d(i,j)$ とする．$(i,j) \notin E$ かつ i から j への有向パスが存在しないきは，$d(i,j) = \infty$ とする．また，すべてのノード i に対し $d(i,i) = 0$ とする．

hider の（純粋）戦略はノード $i \in N$ を選ぶことである．探索者の（純粋）戦略は，探索を開始する前に，探索するノードの順序を決定することである．探索者の戦略を $\sigma \equiv [\sigma(1), \ldots, \sigma(n)]$ と表す．σ は N 上の置換である．探索者が探索を開始するノードが $\sigma(1)$ である．hider，探索者がそれぞれ i, σ を選んだとき，探索者が静止目標物を見つけた時点で探索は終了する．このときの探索費用は

$$\sum_{x=1}^{\sigma^{-1}(i)-1} [d(\sigma(x+1), \sigma(x)) + c_{\sigma(x+1)}] + c_{\sigma(1)}$$

となる．双方が混合戦略をとったとき，目標物を発見するまでの期待探索費用が計算される．これを hider の利得と考え，探索者はこれをできるだけ小さく，hider はできるだけ大きくしたい，として２人有限ゼロ和ゲームモデル $\Gamma(\mathcal{G}, c, d)$ を得る．期待探索費用が ∞ となることもある．

3. ゲームの値

本節では，探索者がすべてのノードを調べることができるようなネットワークを定義し，ゲームの値の存在を述べる．

3.1. weakly starting-point connected ネットワーク上のゲーム

定義 1.　有向ネットワークの有向歩道がすべての点を通るとき，その有向歩道は comprehensive であるという．

定義 2.（Baston/Kikuta [4]）有向ネットワークにおいて comprehensive 有向歩道が存在するとき，その有向ネットワークは weakly starting-point connected であるという．

定義 3.　有向ネットワークにおいて comprehensive 有向歩道に沿ってノードを調べていくような探索者の戦略を comprehensive であるという．

定理 1.（Baston/Kikuta [4]）　有向ネットワーク $\mathcal{G}$ が weakly starting-point connected であるとする．このときゲーム $\Gamma(\mathcal{G}, c, d)$ の値が存在する．探索者、hider はそれぞれ最適戦略，ε-最適戦略を持つ．$\mathcal{G}$ が強連結であれば hider はすべての点に正の確率で隠れるような最適戦略を持つ．探索者の最適戦略において，正の確率でとられる純粋戦略はすべて comprehensive 戦略である．

3.2. 出次数が 0 のノードがあるとき

有向ネットワークにおいてあるノードへ向かう有向辺の本数をそのノードの入次数，ノードから出て行く有向辺の本数をそのノードの出次数という．

定義 4. comprehensive 有向歩道のうち有向辺の移動費用の和が最小であるようなものを efficient であるという．

定義 5. 有向ネットワークにおいて efficient 有向歩道に沿ってノードを調べていくような探索者の戦略を efficient であるという．

定理 2. (Baston/Kikuta [4]) weakly starting-point connected 有向ネットワークにおいて，出次数が 0 であるノードがあるとき，ゲームの値は $\tilde{L}+C$ である．ここに $\tilde{L}$ は efficient 有向歩道の長さであり，C はすべてのノードの調査費用の和である．探索者の最適戦略において，正の確率でとられる純粋戦略はすべて efficient 戦略である．

4. 有向 grid ネットワーク上のゲーム

本節では weakly starting-point connected であるような有向 grid ネットワークを扱う．ただし，本節で扱う有向 grid ネットワーク $\mathcal{G}=(N,E)$ は次のような条件を満たすものとする．

$$N=\{i_j : 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}, \tag{1}$$

各 $1 \le i \le m$ に対して,$(i_1, i_2) \in E$ と $(i_2, i_1) \in E$ のうちの 1 つのみが必ず成り立つ． (2)

各 $1 \le j \le n$ に対して,$(1_j, 2_j) \in E$ と $(2_j, 1_j) \in E$ のうちの 1 つのみが必ず成り立つ． (3)

各 $1 \le i \le m$ に対して, $(i_1, i_2) \in E \Longrightarrow (i_j, j_{j+1}) \in E$ for all $2 \le j \le n-1$. (4)

各 $1 \le i \le m$ に対して, $(i_2, i_1) \in E \Longrightarrow (i_{j+1}, j_j) \in E$ for all $2 \le j \le n-1$. (5)

各 $1 \le j \le n$ に対して, $(1_j, 2_j) \in E \Longrightarrow (i_j, (i+1)_j) \in E$ for all $2 \le i \le m-1$. (6)

各 $1 \le j \le n$ に対して, $(2_j, 1_j) \in E \Longrightarrow ((i+1)_j, i_j) \in E$ for all $2 \le i \le m-1$. (7)

条件 (4) と (5) は水平方向の辺の向きが各行ごとに同じでなければならないこと，条件 (6) と (7) は垂直方向の辺の向きが各列ごとに同じでなければならないことを述べている．次の図は条件 (2)-(7) を満たすような 4×5 grid ネットワークの例である．

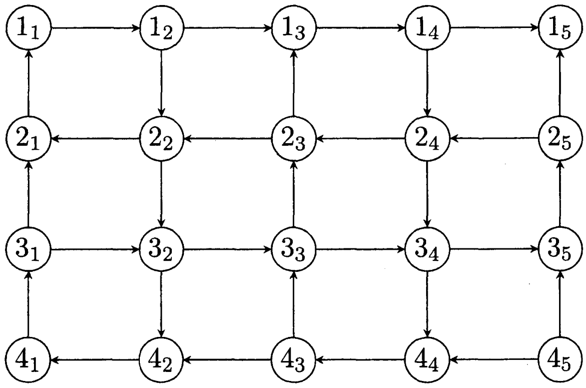


図1　有向 4×5 grid ネットワーク

性質 1.　有向 grid ネットワークにおいて入次数が 0 または出次数が 0 のノードは存在するならば四隅にある，つまりノード $1_1, 1_n, m_1, m_n$ のいずれかである．

証明： 条件 (4)-(7) により，四隅でないノードの入次数，出次数はともに 1 以上である．□

性質 2.　有向 grid ネットワークにおいて入次数が 0 のノードが 2 個以上あれば，weakly starting-point connected ではない．

証明： 入次数が 0 のノードから他の入次数が 0 のノードへの有向歩道は存在しない．□

有向 grid ネットワークが weakly starting-point connected であるかどうか調べるとき，入次数が 0 のノードがあるかどうかが重要である．性質 1 から，入次数が 0 のノードがあるかどうかを知るためにはそのネットワークの周，つまり $\{1_j : 1 \leq j \leq n\} \cup \{m_j : 1 \leq j \leq n\} \cup \{i_1 : 1 \leq i \leq m\} \cup \{i_n : 1 \leq i \leq m\}$ に含まれるノードを結ぶ辺の向きに注意すればよいことがわかる．また，性質 2 により，入次数が 0 のノードが 1 個以下の場合に注意すればよいことがわかる．有向 grid ネットワークは弱連結であるから，性質 2 より，weakly starting-point connected と弱連結は異なる概念であるということがわかる．さて，周に含まれるノードを結ぶ辺の向きのみに注意すると入次数が 0 のノードが 1 個以下の場合は次の図 2 の 7 通りが考えられる．破線は，有向辺が $m-1$ 個（垂直方向）あるいは $n-1$ 個（水平方向）同じ向きに連続していることを意味する（条件 (4)-(7)）．これから容易に次の性質を得る．

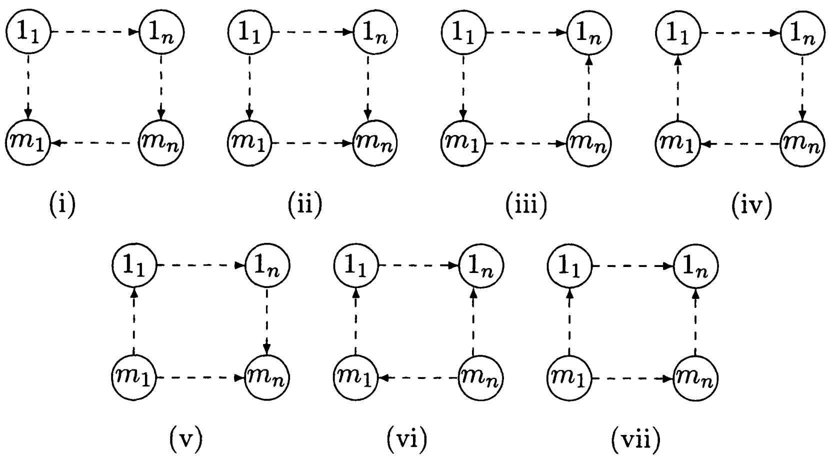


図2　周の可能性

性質 3.　有向 grid ネットワークにおいて入次数が 0 のノード個数が 1 個であることと出次数が 0 のノード個数が 1 個であることは同値である．

図 2 の 7 通りのうち，(i)，(iii)，(v)，および (vi) は破線の向きのパターンが同じであり，(ii) と (vii) も同じである．よって，(i)，(ii) および (iv) を調べることとする．以後，次の 2 条件 (8)，

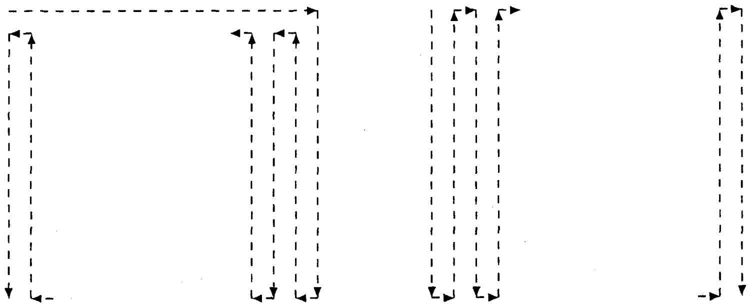
(9) を課す．図 1 のネットワークは条件 (8)，(9) を満たしている．

$$\text{各}\,1 \leq i \leq m-1\,\text{に対して}, (i_1, i_2) \in E \Longleftrightarrow ((i+1)_2, (i+1)_1) \in E. \tag{8}$$

$$\text{各}\,1 \leq j \leq n-1\,\text{に対して}, (1_j, 2_j) \in E \Longleftrightarrow (2_{j+1}, 1_{j+1}) \in E. \tag{9}$$

性質 4. (i) および (ii) は weakly starting-point connected である．

証明： (i) の場合，条件 (9) により図 3(i) のような有向パスが存在する．(ii) の場合も有向パス（図 3(ii)）を作ることができる．□



(i) (ii)

図 3：comprehensive path

性質 4 および図 3 より，(i) 及び (ii) は定理 2 の仮定を満たす．したがって，ゲームの値が存在する．

性質 5. (iv) は Hamilton 閉路が存在する唯一の場合である．

証明： Hamilton 閉路が存在すれば出次数 0，入次数 0 のノードは存在しない．したがって (iv) でないといけない．一方，(iv) ならば図 4 のように Hamilton 閉路が存在する．□

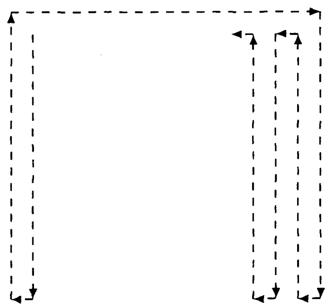


図 4 Hamilton 閉路

有向 grid ネットワークに限らず，Hamilton 閉路が存在するならばネットワークは強連結である．したがって，定理 1 の適用対象となる．次の性質 6 も有向 grid ネットワークに限らず Hamilton 閉路が存在するならば成立する．

性質 6. (iv) においてすべての有向辺の移動費用が 1 であると仮定する．ノードの名前をつけ直してノードの集合を簡単に $N = \{1, 2, \ldots, \ell\}$ とする．すべての $i \in N$ に対し $b_i = 1 + c_i$ と

おく．

$$v \equiv \frac{\sum_{j\in N}(b_j)^2 + \sum_{i,j\in N:i<j} b_i b_j - \sum_{j\in N} b_j}{\sum_{j\in N} b_j}$$

はゲームの値の上限である．

証明：性質5によりHamilton閉路が存在する．すべての有向辺の移動費用が1であるからすべてのHamilton閉路がefficientである．Hamilton閉路の一つを$\mathcal{H}$とする．各$i \in N$を確率$\frac{b_i}{\sum_{j\in N} b_j}$で選びそこを調べた後Hamilton閉路$\mathcal{H}$にしたがって移動しながら調査していくような探索者の混合戦略を考える．すると，hiderの任意の純粋戦略$i \in N$に対し期待費用はvとなる．□

5. おわりに

本稿ではBaston/Kikuta[4]の一部を紹介した後，交通流の一方通行をイメージしながら有向ネットワークの例としてgridネットワークを考えた．似たようなネットワークとして蜘蛛の巣状ネットワークを考えることも興味がある．

gridネットワークに関する今後の課題として次のような点がある．

- 条件(8), (9)を課さない場合に簡単に性質を導けるような有向gridネットワークを検討すること．条件(8), (9)のうち1つのみを課す場合でもよい．図2(iv)のネットワークは条件(8), (9)を課さなくとも，強連結である．
- 図2(i)および(ii)の場合にefficient 有向歩道を見つけること．
- 図2(iv)のネットワークにおいてすべての有向辺の移動費用が1であるという条件をはずしてゲームを解くこと．

参考文献

[1] S. Alpern (2010), Search games on trees with asymmetric travel times. *SIAM Journal of Control and Optimization.* Vol. 48, pp.5547-5563.

[2] S. Alpern and S.Gal (2003), *The theory of search games and rendezvous.* Kluwer's INTERNATIONAL SERIES.

[3] V. Baston and K.Kikuta(2013), Search games on networks with travelling and seacrch costs and with arbitrary searcher starting points. *Networks*, Vol. 62, pp. 72-79.

[4] V. Baston and K.Kikuta(2014), Search games on a network with travelling and search costs. *International Journal of Game Theory.* DOI 10.1007/s00182-014-0432-z,Online .

[5] A. Dagan and S. Gal(2008), Network search games, with arbitrary searcher starting points. *Networks*, Vol. 52, pp. 156-161.

[6] B.Gluss (1961), Approximately optimal one-dimensional search policies in which search costs vary through time. *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. 8, pp. 277-283.

[7] A.Itai, C.Papadimitriou and J.Szwarcfiter (1982), Hamilton paths in grid graphs. *SIAM Journal on Computation*,Vol.11, pp.676-686.

[8] K.Kikuta (1995), A search game with traveling cost on a tree. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol.38, pp.70-88.

[9] K.Kikuta (2004), A search game on a cyclic graph. *Naval Research Logistics*, Vol.51, pp.977-993.

[10] K.Kikuta and W.Ruckle (1994), Initial point search on weighted trees. *Naval Research Logistics*, Vol.41, pp.821-831.

[11] W. Ruckle (1983), *Geometric games and their applications*, Pitman Research Notes in Mathematics 82, Boston.

[12] C.Zamfirescu and T.Zamfirescu (1992),Hamiltonian properties of grid graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, Vol.5, pp.564-570.