

大きな提携の提携値が不明な協力ゲームの Shapley 値の公理化

大東文化大学・経営学部 梶屋 聡 (Satoshi Masuya)
Faculty of Business Administration, Daito Bunka University

1 はじめに

協力ゲーム理論は、協力して事業などを実施した場合の各プレイヤーの費用分担額や利益配分額、投票における影響力などの合理的な評価を行う際に有用となる。協力ゲームは、プレイヤー全体の集合とその部分集合に対して実数値を与える関数によって表現される。この関数は特性関数、プレイヤーの部分集合は提携と呼ばれ、関数値は提携値と呼ばれる。プレイヤー全員の集合は全体提携と呼ばれる。プレイヤーの数を n とすると、協力ゲームの解は、 n 次元実数ベクトルか、あるいは、その集合として与えられる。前者は値 (value) や一点解と呼ばれる。各 n 次元実数ベクトルは、各プレイヤーが分担する費用や受取る利得、各プレイヤーの影響力を示している。協力ゲームの代表的な解として、コア、Shapley 値 [3]、仁 [2] などが知られている。コアは、通常、 n 次元実数ベクトルの集合になるが、Shapley 値や仁は常に一つの n 次元実数ベクトルである。

von Neumann と Morgenstern[4] により与えられた通常の協力ゲーム理論では、すべての提携の提携値がわかっていると仮定してきた。しかし、現実にはいくつかの提携に対する提携値がわかっていないことが少なくない。このように不完備な特性関数をもつ協力ゲームに関する研究に、[5, 1] がある。これらの研究では、提携値が不明な提携に対する提携値は用いないで、Shapley 値を定義し、その公理化を行っている。しかし、これらの研究によって定義された Shapley 値は、通常の完備な特性関数をもつゲームで考えてみると、不明な提携値はゼロと見なして Shapley 値を定義していることと等しくなっている。これにより、これらの研究で用いられているゲームは、優加法性などの重要な性質を満たさない。

そこで、近年、梶屋と乾口 [7] によって、一部の提携値のみがわかっている不完備な優加法的な特性関数をもつ協力ゲームとその解について検討され始めた。

しかし、文献 [7] では、優加法性を仮定した下での上限ゲームや下限ゲームが一般的に定義されているものの、主要な部分である解概念の考察に対しては、個人提携と全体提携の提携値のみが分かっている場合、つまり最小限の情報がわかっている場合の考察に留まっている。したがって、他の場合や一般の場合の考察など、多くの未解決問題が残されている。

文献 [6, 8] では、文献 [7] に引き続き、個人提携と全体提携に加え、基数が $k(\geq n/2)$ 以下のすべての部分提携の提携値が分かっている優加法的ゲームとその Shapley 値について考察を行っている。この場合に、与えられた不完備ゲームに矛盾しない優加法的な完備ゲームの全体が凸多面体となることが示されている。さらに、優加法性を仮定した下での不完備ゲームから得られうる Shapley 値の全体集合を明らかにしている。さらに、不完備ゲームから得られうる Shapley 値の全体集合に対して、合理的な 1 つの解の選択方法について考察している。しかしながら、上記の研究においては、二種類の合理的な 1 点解の選択法が提案されているが、それらの解の公理化などの特徴づけは行われていない。

そこで本研究では、不完備ゲームから得られうる Shapley 値の全体集合から選定された、二種類の解の公理化を行う。

簡単のため、以下では、いくつかの提携値がわかっていない協力ゲームを“不完備ゲーム”と呼び、すべての提携値がわかっている協力ゲーム、すなわち、通常の協力ゲームを“完備ゲーム”と

呼ぶことにする。ここでは、特に個人提携と全体提携に加え、基数が $k(\geq n/2)$ 以下のすべての部分提携の提携値が分かっている場合を取り扱う。

2 協力ゲームの理論と Shapley 値

$N = \{1, 2, \dots, n\}$ をプレイヤーの集合とし、 v を $v(\emptyset) = 0$ を満たす 2^N から \mathbb{R} への関数とする。このとき、協力ゲームは対 (N, v) で与えられる。プレイヤーの集合 $S \subseteq N$ は提携と呼ばれ、関数値 $v(S) \in \mathbb{R}$ は提携 S が形成されたときに、 S が得る利得を表す。 $v(S)$ は S の提携値と呼ばれる。

次式 (1), (2), (3) を満たすとき、かつそのときに限り、それぞれ、 (N, v) は単調、優加法的、凸であるという。

$$v(T) \geq v(S), \forall S \subseteq T \subseteq N \quad (1)$$

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T), \forall S, T \subseteq N \text{ such that } S \cap T = \emptyset \quad (2)$$

$$v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T), \forall S, T \subseteq N \quad (3)$$

優加法的性は、より大きな提携を形成させる誘因を与える自然な性質である。また、優加法的な協力ゲームは単調である。凸性は優加法的性よりも強い性質であり、凸性は次のように表わすこともできる。

$$v(T) - v(T \setminus i) \geq v(S) - v(S \setminus i), \forall S \subseteq T \subseteq N \setminus i, \forall i \in N \quad (4)$$

ただし、簡単のため、 $S \setminus \{i\}$ を $S \setminus i$ と表している。式 (4) は、各プレイヤーの限界貢献度が提携の包含関係に関して単調であることと、協力ゲームが凸であることは同値であることを表している。

次に、協力ゲームにおける代表的な 1 点解である Shapley 値を紹介する。協力ゲーム理論では、全体提携 N が形成されると仮定され、得られる利得 $v(N)$ を各プレイヤー間でどのように分配するかが議論される。したがって、解は n 次元実数ベクトル $x = (x_1, \dots, x_n)$ 、あるいはその集合となる。ここで、 x_i はプレイヤー i の受取る配分利得を表すので、 x を利得ベクトルと呼ぶこともある。個人合理性 $x_i \geq v(\{i\})$, $\forall i \in N$, 全体合理性 $\sum_{i=1}^n x_i = v(N)$ を満たす x を配分と呼ぶ。また、提携合理性 $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$, $\forall S \subseteq N$ を満たす配分 x の集合をコアと呼ぶ。コアは合理的な解集合であるが、常に存在するとは限らない。

$G(N)$ を協力ゲーム (N, v) の全体とする。簡便のため、プレイヤーの集合は固定されているので、協力ゲーム (N, v) を単に v と表すことにする。協力ゲームに対して利得ベクトルを与える関数を $\pi: G(N) \rightarrow \mathbb{R}^n$ とする。 π の第 i 成分を π_i と表すことにする。

Shapley 値は、ナルプレイヤーのゼロ評価、対称性、効率性、加法性なる四公理により特徴付けられる。プレイヤー i を含む任意の提携 $S \subseteq N$ に対して、 $v(S) - v(S \setminus i) = 0$ となるとき、プレイヤー i をナルプレイヤーという。ナルプレイヤーのゼロ評価の公理とは、 i がナルプレイヤーであれば、 $\pi_i(v) = 0$ が成り立つことをいう。対称性公理とは、 $v(S \setminus i) = v(S \setminus j)$, $\forall S \subseteq N$ such that $\{i, j\} \subseteq S$ のとき、 $\pi_i(v) = \pi_j(v)$ が成り立つことをいう。効率性公理とは、 $\sum_{i \in N} \pi_i(v) = v(N)$ が成り立つことをいう。二つの協力ゲーム $v, w \in G(N)$ の和ゲーム $v+w \in G(N)$ を $(v+w)(S) = v(S) + w(S)$, $\forall S \subseteq N$ と定義すると、加法性公理は、 $\pi(v+w) = \pi(v) + \pi(w) \forall v, w \in G(N)$ を満たすことをいう。Shapley 値はこれら四公理を満たす唯一つの $\pi: G(N) \rightarrow \mathbb{R}^n$ であることが知られており [3]、これを ϕ で表すと、次のように表現される。

$$\phi_i(v) = \sum_{\substack{S \ni i \\ S \subseteq N}} \frac{(|S| - 1)!(n - |S|)!}{n!} (v(S) - v(S \setminus i)), \forall i \in N \quad (5)$$

ただし, ϕ_i は ϕ の第 i 成分を表し, $|S|$ は提携 S に帰属するプレイヤー数を表す.

協力ゲームが優加法的であれば, Shapley 値は配分となり, 凸であるときには, コアに含まれることが知られている.

3 提携値に関する情報が不完備な協力ゲーム

通常の協力ゲームでは, すべての提携値はわかっているものと仮定している. しかし, 現実には, いくつかの提携に対する提携値がわからないことが少なくない. 本節では, いくつかの提携値がわからない不完備情報協力ゲームに関する従来の一般的な成果 [7] を紹介する.

不完備ゲームは, プレイヤーの集合を $N = \{1, 2, \dots, n\}$, 提携値がわかっている提携の集合を $\mathcal{K} \subseteq 2^N$, 関数 $\nu: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ によって特徴づけることができる. すなわち, 不完備ゲームは 3 重対 (N, \mathcal{K}, ν) によって定められる. ただし, $\emptyset \in \mathcal{K}$ とし, $\nu(\emptyset) = 0$ と仮定する. また, 各プレイヤー 1 人からなる個人提携と全体提携に対する提携値は必ずわかっているものと仮定する. すなわち, $\{i\} \in \mathcal{K}, i = 1, 2, \dots, n$ と $N \in \mathcal{K}$ が成り立つものと仮定する. 本研究では, 単調で優加法的な協力ゲームを考えるので, 不完備ゲーム ν にも優加法性を仮定する. すなわち, 次が成り立つものと仮定する.

$$\begin{aligned} \nu(S) &\geq \sum_{i=1}^s \nu(T_i), \quad \forall S, T_i \in \mathcal{K}, i = 1, 2, \dots, s \\ \text{such that } &\bigcup_{i=1,2,\dots,s} T_i \subseteq S \text{ and } T_i, i = 1, 2, \dots, s \text{ are disjoint} \end{aligned} \quad (6)$$

任意の $j \in N$ について, $S = \{j\}, s = 1, T_1 = \emptyset$ とすると, $\nu(\{j\}) \geq 0$ となることに注意しよう. 本研究では, N と \mathcal{K} は固定して考えるので, 不完備ゲーム (N, \mathcal{K}, ν) を単に ν と記すこともある.

不完備ゲーム (N, \mathcal{K}, ν) に対して, 次の二つの完備ゲーム $(N, \underline{\nu}), (N, \bar{\nu})$ を考える.

$$\underline{\nu}(S) = \max_{\substack{T_i \in \mathcal{K}, i=1,2,\dots,s \\ \cup_i T_i \subseteq S, T_i \text{ are disjoint}}} \sum_{i=1}^s \nu(T_i) = \max_{T \in \mathcal{K}, T \subseteq S} (\nu(T) + \underline{\nu}(S \setminus T)) \quad (7)$$

$$\bar{\nu}(S) = \min_{\hat{S} \in \mathcal{K}, \hat{S} \supseteq S} (\nu(\hat{S}) - \underline{\nu}(\hat{S} \setminus S)) \quad (8)$$

ν の優加法性より, $\underline{\nu}(S) = \nu(S), \forall S \in \mathcal{K}$ が成り立つ. また, $\nu(\{i\}) \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$ となるとき, $\{i\} \in \mathcal{K}, i = 1, 2, \dots, n$ より,

$$\underline{\nu}(S) = \max_{\substack{T_i \in \mathcal{K}, i=1,2,\dots,s \\ \cup_i T_i = S, T_i \text{ are disjoint}}} \sum_{i=1}^s \nu(T_i) \quad (9)$$

と書ける. 容易にわかるように, $\underline{\nu}(S)$ は, 不完備ゲーム ν に関連する優加法的な完備ゲームが定める S の提携値の下限を示している. また, $\bar{\nu}(S)$ は, 不完備ゲーム ν に関連する完備ゲームが定める S の提携値の上限を示している. 実際, 式 (6) より, 任意の $\hat{S} \in \mathcal{K}$, 任意の $S \subseteq \hat{S}$ について,

$$\begin{aligned} \nu(\hat{S}) &\geq \max_{\substack{T_i \in \mathcal{K}, i=1,2,\dots,s \\ \cup_i T_i = \hat{S} \setminus S, T_i \text{ are disjoint}}} \sum_{i=1}^s \nu(T_i) + \max_{\substack{T_i \in \mathcal{K}, i=1,2,\dots,s \\ \cup_i T_i = S, T_i \text{ are disjoint}}} \sum_{i=1}^s \nu(T_i) \\ &= \underline{\nu}(\hat{S} \setminus S) + \underline{\nu}(S) \end{aligned} \quad (10)$$

が成立するので,

$$\bar{\nu}(S) \geq \underline{\nu}(S), \quad \forall S \subseteq N \quad (11)$$

となる.

これらの完備ゲームに関して次が成立する.

Theorem 1 ([7]) 不完備ゲーム (N, \mathcal{K}, ν) の下限ゲーム $(N, \underline{\nu})$ は単調で優加法的であり, 上限ゲーム $(N, \bar{\nu})$ は単調性を満たすが, 優加法的とは限らない.

不完備ゲーム ν に関連するすべての優加法的な完備ゲームの集合を $V(\nu)$ と書くことにする. ν に関して優加法性を仮定していることから, $V(\nu)$ は次のように表現できる.

$$V(\nu) = \{v : 2^N \rightarrow \mathbb{R} \mid v \text{ is superadditive and } v(S) = \nu(S), \forall S \in \mathcal{K}\} \quad (12)$$

4 大きな提携の提携値が不明な協力ゲーム

前節では, 提携値に関する情報が不完備な協力ゲームについて述べた. 前節で紹介した不完備ゲームに対する結果は, 任意の優加法的な協力ゲームおよび任意の \mathcal{K} に対して成り立つものである. ここでは, 不完備ゲーム (N, \mathcal{K}, ν) から得られうる優加法的な完備ゲームの集合 $V(\nu)$ について考察する. 一般の (N, \mathcal{K}, ν) に対して $V(\nu)$ を考察するのは困難であるので, 梶屋・乾口 [6] では, $\mathcal{K} \supseteq \{\{1\}, \dots, \{n\}, N\}$ となる \mathcal{K} に対する次の二つの仮定の下で, 不完備ゲーム (N, \mathcal{K}, ν) から得られうる優加法的な完備ゲームの集合 $V(\nu)$ について考察した.

Assumption 1 (プレイヤーに関する対称性) $i \in N, j \in N$ に対して, $S \ni i, S \not\ni j$ なる $S \subseteq N$, および S において i を j と交換した提携 S' , すなわち, $S' = S \cup \{j\} \setminus \{i\}$ を考える. このとき, $S \in \mathcal{K}$ ならば $S' \in \mathcal{K}$ が成立する.

Assumption 1 は, i, j が任意であるので, $S \in \mathcal{K}$ であれば, S と同じ基数をもつ任意の提携 T についても $T \in \mathcal{K}$ となることを要請している. これは, 既知提携集合 \mathcal{K} がプレイヤーに関して対称であることを意味するので, 不完備ゲームの解が情報欠損によりあるプレイヤーに不利 (もしくは有利) になってしまうことは無いことを示している.

Assumption 2 (小提携の帰属可能性) ある $S \subset N (S \neq N)$ について $S \in \mathcal{K}$ ならば, すべての $T \subset S$ について, $T \in \mathcal{K}$ が成り立つ.

生産計画ゲームやスパニングツリーゲームを考えれば明らかなように, 小さい提携の方が大きい提携より提携値が算出しやすい. この観点から, Assumption 2 では, ある提携の値が与えられているならば, その部分提携の値も与えられているということを要請している.

\mathcal{K} が Assumption 1, 2 を満たすとき, ある適当な k ($1 \leq k \leq n-1$) を用いて $\mathcal{K} = \{S \subseteq N \mid |S| \leq k\} \cup \{N\}$ と表せる. 実際, $k = \max\{|S| \mid S \in \mathcal{K}, S \neq N\}$ と定めることができる. このことから, Assumption 1, 2 を満たす不完備ゲーム (N, \mathcal{K}, ν) を (N, k) -不完備ゲームと記す. $1 \leq k \leq n-1$ となり, $k = n-1$ のときは, (N, \mathcal{K}, ν) は通常の (完備な) 協力ゲーム, $k = 1$ のときは, 個人提携と全体提携のみ提携値がわかっている不完備ゲームとなる.

さて, (N, k) -不完備ゲームから得られうる優加法的な完備ゲームの集合 $V(\nu)$ について考察しよう. はじめに, 提携値情報が最も多く得られている (N, k) -不完備ゲーム, すなわち, $k = n-2$ である $(N, n-2)$ -不完備ゲームを考察しよう. この場合, 提携値情報が不明な提携は, その基数が $n-1$ となるもののみであり, 最も単純な場合となる.

プレイヤー集合 $T \subseteq N$ に依存して, 基数 $n-1$ の提携 S の提携値が $(N, n-2)$ -不完備ゲームの上限ゲームの値か下限ゲームの値をとる次の完備ゲーム (N, v^T) を考える.

$$v^T(S) = \begin{cases} \bar{\nu}(S), & \text{if } |S| = n-1 \text{ and } S \supseteq T, \\ \underline{\nu}(S), & \text{if } |S| = n-1 \text{ and } S \not\supseteq T, \\ \nu(S), & \text{otherwise} \end{cases} \quad (13)$$

式 (13) で定められる完備ゲーム (N, v^T) は、提携値が既知の提携、すなわち、基数が $n-2$ 以下の提携に対してはその値を、提携値が未知の提携、すなわち、基数が $n-1$ である提携に対しては、 T 内のすべてのプレイヤーがその提携に帰属すれば、上限ゲームの値をとり、そうでなければ下限ゲームの値をとる完備ゲームである。見方を変えれば、完備ゲーム (N, v^T) は、 $(N, n-2)$ -不完備ゲーム ν から得られうる完備ゲームの中で、 T のプレイヤー全員が揃って提携に参加する場合に提携値が最も高くなる完備ゲームである。完備ゲーム (N, v^T) は 2^n 個あり、 $T = N$ のとき下限ゲーム、 $T = \emptyset$ のとき上限ゲームと一致する。

次の捕題が成り立つ。

Lemma 1 ([6]) $(N, n-2)$ -不完備ゲーム ν を考える。任意の $T \subseteq N$ に対して、完備ゲーム (N, v^T) は優加法性をもつ。

さらに、 $(N, n-2)$ -不完備ゲームから得られる優加法的な完備ゲームの集合に関する次の定理を得る。

Theorem 2 ([6]) $(N, n-2)$ -不完備ゲーム ν を考える。 ν から得られる優加法的ゲームの全体 $V(\nu)$ は、 $v^T, \forall T \subseteq N$ を端点とする凸多面体となる。つまり、次式が成り立つ。

$$V(\nu) = \left\{ v : 2^N \rightarrow \mathbb{R} \mid v = \sum_{T \subseteq N} k_T v^T, \sum_{T \subseteq N} k_T = 1, k_T \geq 0, \forall T \subseteq N \right\} \quad (14)$$

Theorem 2 は、 $v^T, \forall T \subseteq N$ は、 ν から得られる優加法的な完備ゲームの集合 $V(\nu)$ の頂点になっていること、およびそれらの凸結合としてすべての優加法的な完備ゲームが得られることを示している。

以下では、より一般の (N, k) -不完備ゲーム ν について、 ν から得られる優加法的な完備ゲームの集合 $V(\nu)$ を考察する。

互いに包含関係が成立しない、基数が $k+1$ 以上の有限個の提携の集合 $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_m\}$ を考える。すなわち、 $T_p \in \mathcal{T}$ に対して、 $|T_p| \geq k+1$ となり、任意の $T_p, T_s \in \mathcal{T}$ ($p \neq s$) に対して $T_p \not\subseteq T_s$ かつ $T_s \not\subseteq T_p$ が成立する提携の集合 \mathcal{T} を考える。 \mathcal{T} 内の T_p の個数 m は一定でなく、 \mathcal{T} に応じて変化することに注意する。このような集合 \mathcal{T} は数多く存在するが有限であり、それらの集まりを $\Gamma(N, k+1)$ と記す。式 (13) に対応して、 $\mathcal{T} \in \Gamma(N, k+1)$ に依存する完備ゲームを次のように定義する。

$$v^{\mathcal{T}}(S) = \begin{cases} \bar{\nu}(S), & \text{if } n > |S| > k \text{ and } \exists T \in \mathcal{T}, S \supseteq T, \\ \underline{\nu}(S), & \text{if } n > |S| > k \text{ and } \forall T \in \mathcal{T}, S \not\supseteq T, \\ \nu(S), & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (15)$$

完備ゲーム $v^{\mathcal{T}}$ は提携値が既知の提携、すなわち、基数が k 以下の提携に対してはその値を、提携値が未知の提携、すなわち、基数が k より大きい提携に対しては、 \mathcal{T} 内のいずれかの提携を包含すれば、上限ゲームの値を、 \mathcal{T} 内のいずれの提携も包含しなければ、下限ゲームの値をとる完備ゲームである。言い換えれば、完備ゲーム $(N, v^{\mathcal{T}})$ は、 \mathcal{T} 内のいずれかの提携 T のプレイヤー全員が揃って参加している提携の提携値が最も高く定められる完備ゲームであり、いわば、 \mathcal{T} は力を発揮する提携のリストとなっている。

完備ゲーム $v^{\mathcal{T}}$ は $(N, n-2)$ -不完備ゲームの完備ゲーム v^T を直接拡張したものではないが、実質的には拡張となる。実際、 $k = n-2$ のとき、ある v^T を構成する \mathcal{T} を考えると、 $\mathcal{T} = \bigcap T$ と定めれ

ば, $v^T = v^T$ となる. 逆に, ある v^T を構成する T が与えられれば, $\mathcal{T} = \{T_p \mid |T_p| = n-1, T_p \supseteq T\}$ と定めれば, $v^T = v^T$ となる.

因みに, $T_p \in \mathcal{T}$ に対して $|T_p| = n-1$ となり, $T_p, T_s \in \mathcal{T}$ ($p \neq s$) に対して $T_p \neq T_s$ となることに注意する. 後半の性質より, $T_p, T_s, T_r \in \mathcal{T}$ (p, s, r は異なる) に対して $|T_p \cap T_s| = |T_p \cap T_r| = |T_s \cap T_r| = n-2$, $|T_p \cap T_s \cap T_r| = n-3$ と \cap を 1 回施すたびにその共通集合の基数は 1 だけ小さくなる. 上述の T の基数と \mathcal{T} の基数の間には, $|\mathcal{T}| = n - |T|$ が成立する. ただし, \mathcal{T} の基数は, \mathcal{T} 内の提携の数を示している.

次の補題が得られる.

Lemma 2 ([6]) ν を $k \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ を満たす (N, k) -不完備ゲームとする. このとき, 完備ゲーム (N, v^T) , $\forall T \in \Gamma(N, k+1)$ は優加法的である.

上の補題より, 次の定理を得る.

Theorem 3 ([6]) ν を $k \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ を満たす (N, k) -不完備ゲームとする. このとき, ν から得られうる優加法的な完備ゲームの集合 $V(\nu)$ は (15) で定義された $v^T, \forall T \in \Gamma(N, k+1)$ を頂点とする凸多面体となる. つまり, 次式が成り立つ.

$$V(\nu) = \left\{ v : 2^N \rightarrow \mathbb{R} \mid v = \sum_{T \in \Gamma(N, k+1)} c_T v^T, \sum_{T \in \Gamma(N, k+1)} c_T = 1, c_T \geq 0, \forall T \in \Gamma(N, k+1) \right\}. \quad (16)$$

Theorem 3 は, $k \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ の場合, 大まかに言い換えれば, 過半数のプレイヤーが参加する提携の提携値が未知で他が既知の場合, $v^T, \forall T \in \Gamma(N, k+1)$ は, ν から得られる優加法的な完備ゲームの全体 $V(\nu)$ の頂点になっていること, およびそれらの凸結合として任意の優加法的な完備ゲームが得られることを示している.

先に述べた v^T と v^T との関係から, Theorem 2 は Theorem 3 の特別な場合となっていることになる.

5 合理的な 1 つの Shapley 値の選定とその公理化

本節では, $k \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ であるような (N, k) -不完備ゲームに対する Shapley 値について考察する. はじめに, (N, k) -不完備ゲームから得られうるすべての Shapley 値の集合を求める. その後, (N, k) -不完備ゲームに対して, 得られうるすべての Shapley 値の集合の中から, 1 つの解を選定する方法について述べる [8].

Shapley 値は線形性を満たすことから, Theorem 3 を用いると, $k \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ であるような一般の (N, k) -不完備ゲーム ν から得られうるすべての Shapley 値の集合は, $\phi(v^T), \forall T \in \Gamma(N, k+1)$ を頂点とするような凸多面体となることがわかる.

不完備ゲームの応用を考えると, すべての得られうる Shapley 値の集合から, 何らかの意味で合理的な唯一つの Shapley 値を選択することが必要となることも少なくない. 以下では, (N, k) -不完備ゲームに対して, すべての得られうる Shapley 値の集合 $\Phi(\nu)$ からの一つの解の選定方法を二つ述べ, その公理化を行う.

一つ目の選定方法は, 重心法である. 不完備ゲーム ν から得られうる Shapley 値の全体集合は凸多面体となっていることから, その重心を ν の Shapley 値 $\check{\phi}(\nu)$ とする. つまり,

$$\check{\phi}(\nu) = \frac{\sum_{T \in \Gamma(N, k+1)} \phi(v^T)}{|\Gamma(N, k+1)|} \quad (17)$$

とする。

二つ目の選定方法は、プレイヤーの最大不満の最小化を行う方法である。これは、仁の考え方を適用するものである。具体的には、各プレイヤーの得られる最大 Shapley 値と最小 Shapley 値の midpoint とプレイヤーの得る利得の差を不満と定義し、最大不満の最小化を行う利得ベクトルを解としようとするものである。

不完備ゲーム ν について、プレイヤーの利得ベクトルを $x = (x_1, \dots, x_n)$ とする。プレイヤー i の得られる最大の Shapley 値を $\bar{\phi}_i(\nu)$ 、最小の Shapley 値を $\underline{\phi}_i(\nu)$ とする。この時、

$$e_i(x) = \frac{\bar{\phi}_i(\nu) + \underline{\phi}_i(\nu)}{2} - x_i \quad (18)$$

を i の x に対する不満と呼ぶことにする。そして、各 i に対する $e_i(x)$ を大きい順に並べたものを $\theta(x)$ とする。

このとき、二つの利得ベクトル x, y が、次式を満たすとき、 x は y よりも辞書式に小さいという：

$$\begin{aligned} &\theta_1(x) < \theta_1(y), \text{ or} \\ &\exists h \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ such that} \\ &\theta_i(x) = \theta_i(y), \forall i < h \text{ and } \theta_h(x) < \theta_h(y) \end{aligned} \quad (19)$$

そして、不満 $\theta(x)$ を辞書式に最小化するような Shapley 値を最大不満最小化 Shapley 値と呼び、 $\hat{\phi}(\nu)$ とする。

このとき、次の定理が得られた。

Theorem 4 ([8]) 不完備ゲーム ν を $k \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ を満たす (N, k) -不完備ゲームとする。プレイヤー i の得られる最大の Shapley 値を、 $\bar{\phi}_i(\nu)$ 、最小の Shapley 値を $\underline{\phi}_i(\nu)$ と記す。このとき最大不満最小化 Shapley 値 $\hat{\phi}_i(\nu)$ は以下で与えられる。

$$\hat{\phi}_i(\nu) = \frac{\bar{\phi}_i(\nu) + \underline{\phi}_i(\nu)}{2} - \frac{\sum_{i \in N} \{\bar{\phi}_i(\nu) + \underline{\phi}_i(\nu)\} - 2\nu(N)}{2n} \quad \forall i \in N. \quad (20)$$

Theorem 4 により、最大不満最小化 Shapley 値は容易に計算できることがわかる。

次に、重心法によって得られる解 $\check{\phi}(\nu)$ の公理化を行う。

Definition 1 不完備ゲーム ν を $k \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ を満たす (N, k) -不完備ゲームとする。このとき、 $|S| \leq k-1$ であるような、任意の $S \subseteq N \setminus \{i, j\}$ と $i, j \in N$ を考える。このとき、 $\nu(S \cup i)$ 、 $\nu(S \cup j)$ は既知であり、 $\nu(S \cup i) = \nu(S \cup j) \quad \forall |S| \leq k-1$ のとき、プレイヤー i, j は ν において対称とよぶ。

Axiom 1 $k \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ を満たす (N, k) -不完備ゲーム ν を考える。また、プレイヤー $i, j \in N$ について、 i, j は ν において対称であるとする。このとき ν から得られうる完備ゲームの Shapley 値 π について、

$$\pi_i(\nu) = \pi_j(\nu) \quad (21)$$

であるとき、 π は、 ν -consistent symmetry を満たすという。

Axiom1 は、不完備ゲームにおいて提携値情報がわかっている範囲で2人のプレイヤーが対称ならば、そこから得られるゲームにおいてもその2人のプレイヤーは対称であると考え、値が等しいということを表している。

このとき、次の定理が得られた。

Theorem 5 重心解 $\check{\phi}(\nu)$ は、Axiom1 を満たす唯一つの $\Phi(\nu)$ 上の解である。

この定理により、重心解が公理化された。

最後に、次の定理が得られた。

Theorem 6 $k \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ を満たす (N, k) -不完備ゲーム ν を考える。このとき、

$$\check{\phi}(\nu) = \hat{\phi}(\nu) \quad (22)$$

が成立する。

定理6は、理論的に興味深い性質であるが、応用上も重要な役割を果たす。重心解を計算するときに、重心解の定義からそのまま計算しようとする、凸多面体の全ての端点ゲームの Shapley 値を計算しなければならないが、最大不満最小化解を計算する場合は、各プレイヤーの上限 Shapley 値と下限 Shapley 値を計算すればよい。上限 Shapley 値と下限 Shapley 値に対応するゲームは、それぞれ凸多面体の、ある端点ゲームに対応している。まず、プレイヤー i の上限 Shapley 値に対応するゲームは、 T に含まれる提携の全体を、基数 $k+1$ でプレイヤー i を含む提携の全体とすることによって求められる。また、同様にプレイヤー i の下限 Shapley 値に対応するゲームは、 T に含まれる提携の全体を、基数 $k+1$ でプレイヤー i を含まない提携の全体とすることによって求められる。

Example 1 プレイヤーの集合を $N = \{1, 2, 3, 4\}$ 、値のわかっている提携の全体集合を $\mathcal{K} = \{S \subseteq N \mid |S| \leq 2\} \cup \{\{1, 2, 3, 4\}\}$ とする。このとき、 T の全体集合 $\Gamma(N, k+1)$ は、 $\Gamma(N, k+1) = \{T \subseteq 2^N \mid |T| = 3, \forall T \in \mathcal{T}\} \cup \{N\}$ となる。そして、不完備ゲーム $\nu: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} \nu(\{1\}) &= 8, \nu(\{2\}) = 7, \nu(\{3\}) = 3, \\ \nu(\{4\}) &= 1, \\ \nu(\{1, 2\}) &= 18, \nu(\{1, 3\}) = 16, \nu(\{1, 4\}) = 10, \\ \nu(\{2, 3\}) &= 14, \nu(\{2, 4\}) = 12, \nu(\{3, 4\}) = 9, \\ \nu(\{1, 2, 3, 4\}) &= 30. \end{aligned}$$

このゲームは、 $k \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ を満たす (N, k) -不完備ゲームである。すると、下限ゲーム $\underline{\nu}$ と上限ゲーム $\bar{\nu}$ が次のように得られる。

$$\begin{aligned} \underline{\nu}(\{1\}) &= 8, \underline{\nu}(\{2\}) = 7, \underline{\nu}(\{3\}) = 3, \underline{\nu}(\{4\}) = 1, \\ \underline{\nu}(\{1, 2, 3, 4\}) &= 30, \\ \underline{\nu}(\{1, 2\}) &= 18, \underline{\nu}(\{1, 3\}) = 16, \underline{\nu}(\{1, 4\}) = 10, \\ \underline{\nu}(\{2, 3\}) &= 14, \underline{\nu}(\{2, 4\}) = 12, \underline{\nu}(\{3, 4\}) = 9, \\ \underline{\nu}(\{1, 2, 3\}) &= 23, \underline{\nu}(\{1, 2, 4\}) = 20, \\ \underline{\nu}(\{1, 3, 4\}) &= 17, \underline{\nu}(\{2, 3, 4\}) = 16, \end{aligned}$$

Table 1: 各プレイヤーの最大・最小 Shapley 値

Player	$\underline{\phi}_i(\nu)$	$\bar{\phi}_i(\nu)$	$\bar{\phi}_i(\nu) - \underline{\phi}_i(\nu)$
1	8.83	11.92	3.08
2	8.17	11.00	2.83
3	4.75	8.00	3.25
4	2.00	4.58	2.58

Table 2: 各プレイヤーの最大 Shapley 値と最小 Shapley 値の中点

Player	$\underline{\phi}_i(\nu)$ と $\bar{\phi}_i(\nu)$ の中点
1	10.38
2	9.58
3	6.38
4	3.29

$$\begin{aligned} \bar{v}(\{1\}) &= 8, \bar{v}(\{2\}) = 7, \bar{v}(\{3\}) = 3, \bar{v}(\{4\}) = 1, \\ \bar{v}(\{1, 2, 3, 4\}) &= 30, \\ \bar{v}(\{1, 2\}) &= 18, \bar{v}(\{1, 3\}) = 16, \bar{v}(\{1, 4\}) = 10, \\ \bar{v}(\{2, 3\}) &= 14, \bar{v}(\{2, 4\}) = 12, \bar{v}(\{3, 4\}) = 9, \\ \bar{v}(\{1, 2, 3\}) &= 29, \bar{v}(\{1, 2, 4\}) = 27, \\ \bar{v}(\{1, 3, 4\}) &= 23, \bar{v}(\{2, 3, 4\}) = 22, \end{aligned}$$

この不完備ゲーム ν に対して、各プレイヤーの得られる最大 Shapley 値 $\bar{\phi}_i(\nu)$ 、最小 Shapley 値 $\underline{\phi}_i(\nu)$ を求めると、Table 1 のようになる。

そして、重心法で ν に対する Shapley 値 $\check{\phi}(\nu)$ を求めると、次のようになる。

$$\check{\phi}(\nu) = (10.47, 9.68, 6.47, 3.39).$$

次に、最大不満最小化解を、定理 4 を用いて求める。まず、各プレイヤー i の $\underline{\phi}_i(\nu)$ と $\bar{\phi}_i(\nu)$ の中点を求めると、Table 2 のようになる。

これより、各プレイヤーの最大不満最小化 Shapley 値 $\hat{\phi}(\nu)$ は、次のようになる。

$$\hat{\phi}(\nu) = (10.47, 9.68, 6.47, 3.39).$$

重心法によって選定した Shapley 値と最大不満最小化によって選定した Shapley 値は、一致していることがわかる。

6 結論と今後の課題

本研究では、大きな提携の提携値が不明な協力ゲームから得られうる Shapley 値の全体集合からの 1 点解の公理化を行った。1 点解の選定方法として、重心法と最大不満最小化法の二つの方法があるが、これら二つの解が一致するということを示した。

今後の課題としては、このようなゲームにおける仁に関する考察が挙げられる。さらに、 $k < \lceil \frac{n}{2} \rceil$ の場合の (N, k) -不完備ゲームとその解に関する考察が挙げられる。

References

- [1] D. Housman. Linear and symmetric allocation methods for partially defined cooperative games. *International Journal of Game Theory*, 30:377–404, 2001.
- [2] D. Schmeidler. The nucleolus of a characteristic function game. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 17:1163–1170, 1969.
- [3] L.S. Shapley. A value for n -person games. In H. Kuhn and A. Tucker, editors, *Contributions to the theory of games II*, pages 307–317. Princeton, 1953.
- [4] J. Von Neumann and O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, 1944.
- [5] S.J. Willson. A value for partially defined cooperative games. *International Journal of Game Theory*, 21:371–384, 1993.
- [6] 榎屋・乾口. 大きな提携の提携値が不明な協力ゲームとその Shapley 値の考察. **京都大学数理解析研究所講究録**, 1734:46–53, 2011.
- [7] 榎屋・乾口. 不完備情報の下での協力ゲームの基礎的考察. **知能と情報**, 24:601–615, 2012.
- [8] 榎屋・乾口. 大きな提携の提携値が不明な協力ゲームの 1 点解の選定. **京都大学数理解析研究所講究録**, 1912:163–171, 2014.