数理解析研究所講究録
第 1941 巻 2015 年 66-73

2014 年度冬の LA シンポジウム [E-2]

項書換え系の停止性証明のための重み付き経路順序の抽象化

尾前 貴則 *　　草刈 圭一朗 †　　山田 晃久 ‡　　坂部 俊樹 §

1 はじめに

項書換え系 (term rewriting system; TRS) は，項の書換えにより計算を表現する計算モデルの一つであり，定理自動証明や代数的仕様記述，プログラム検証などに利用されている [1]．これらの応用においてTRS は，書換えが無限に続かないという性質，停止性を持つことが重要である．与えられた TRS が停止性を持つかどうか，という問題は一般には決定不能であるが，TRS の停止性を示す方法についての研究が進められている．

TRS の停止性を示す方法として，依存対法 [2] という手法が提案されている．これは，関数定義の依存関係を表す依存対と呼ばれる項の対を用いて再帰構造を解析し，全ての再帰構造が非循環的であることを示すことにより停止性を示す手法である．

この手法を用いる上で重要になるのが簡約化対と呼ばれる関係の対である．

簡約化対はより古典的な停止性証明法である簡約化順序に，引数切り落とし法を適用することで得られる [2]．簡約化順序としては Knuth-Bendix 順序 (Knuth-Bendix order; KBO) [3]，辞書式経路順序 (lexicographics path order; LPO) [4] など様々なものが提案されている．近年提案された重み付き経路順序 (weighted path order; WPO) [6] はこれらの代表的な簡約化順序の他にも幅広い簡約化順序を包含する簡約化順序である．WPO は簡約化順序であると同時に，引数切り落とし法を一般化した部分ステータスを用いることでより強力な簡約化対となることが示されている．

*名古屋大学大学院情報科学研究科
†岐阜大学工学部
‡独立行政法人産業技術総合研究所
§第 1 著者に同じ

本稿では WPO をさらに抽象化した，抽象重み付き経路順序 (abstract weighted path order; AWPO) を提案する．AWPO は二項関係 $\rhd$, 代数 $\mathcal{A}$，関係の対から関係の対への写像 F の 3 つから定まる関係の対である．AWPO は WPO を抽象化した関係の対であるため，様々な簡約化対を包含する汎用的な簡約化対であると言える．

しかし，AWPO は一般に簡約化対であるとは言えない．よって，AWPO が簡約化対となるために $\rhd$, $\mathcal{A}$, F が満たすべき十分条件を与える．十分条件を満たすような $\rhd$, $\mathcal{A}$, F を AWPO に与えることにより，新たな簡約化対を設計することが可能になる．本稿ではその例として，WPO を拡張した多重集合ステータス付き重み付き経路順序 (weighted path order with status; SWPO) を提案する．また，WPO で停止性を証明することができなかったが，SWPO を用いることで新たに証明できるようになった例題について確認する．

2 項書換え系

本節では，項書換え系 (TRS) について [1] に基づいて定義を与える．

関数記号の集合 $\mathcal{F}$，変数の集合 $\mathcal{V}$ から生成されるすべての項の集合を $\mathcal{T}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ とする．関数記号 f の引数個数を $arity(f)$ で表す．項 t 中に現れるすべての変数の集合を $\mathcal{V}ar(t)$ で表す．項 s と t が構造的に同一であることを $s \equiv t$ と記述する．項 $s \equiv f(s_1,\ldots,s_n)$ に対し，f を s の根記号と呼び，$root(s)$ で表す．ホール $\Box \notin \mathcal{F}$ を特別な定数記号とする．文脈とは，$\Box$ を一つだけ含む項である．文脈 $C[\,]$ 中のホール $\Box$ を項 t で置き換えることによって

得られる項を $C[t]$ と記す．項 t,u に対して $t \equiv C[u]$ となるような文脈 $C[\,]$ が存在するとき，u を t の部分項と呼ぶ．変数から項への写像を代入という．代入 θ の定義域を $\mathcal{D}om(\theta) = \{x \mid x \neq \theta(x)\}$ と定義する．項 t に対して，$\theta(t)$ を t のインスタンスと呼び，$t\theta$ と略記する．

書換え規則は，$root(l) \in \mathcal{F}$ かつ $\mathcal{V}(r) \subseteq \mathcal{V}(l)$ となる項の対であり，$l \to r$ で表される．項書換え系 (TRS) とは，書換え規則の集合で表される．TRS R に対し，$l \to r \in R$ と文脈 $C[\,]$，代入 θ が存在して，$s \equiv C[l\theta]$ かつ $t \equiv C[r\theta]$ のとき，$s \underset{R}{\to} t$ で表す．$s \underset{R}{\to} t$ を書換え関係と呼ぶ．TRS R が停止性を持つとは，無限系列 $t_0 \underset{R}{\to} t_1 \underset{R}{\to} \cdots$ となるような t_0 が存在しないことである．

3 依存対法

本節では文献 [2] に基づき，TRS の停止性証明法の一つである依存対法について紹介する．

TRS R を考える．関数記号 f が被定義記号であるとは，$root(l) = f$ となる規則 $l \to r \in R$ が存在することである．また，被定義記号の全体を $\mathcal{D}_R$ で表す．各 $f \in \mathcal{D}_R$ に対し印付き記号 $f^\#$ を用意し，項 $t = f(t_1,\ldots,t_n)$ の印付き項 $t^\#$ を $f^\#(t_1,\ldots,t_n)$ で定義する．印付き項の対 $\langle u^\#, v^\# \rangle$ が R の依存対であるとは，$root(v) \in \mathcal{D}_R$ となる規則 $u \to C[v] \in R$ が存在することである．また，$\langle u^\#, v^\# \rangle$ を $u^\# \to v^\#$ で表し，依存対の全体を $DP(R)$ で表す．

関係の対 $\langle \succsim, \succ \rangle$ が簡約化対であるとは，$\succsim^* \cdot \succ \cdot \succsim^*$ が整礎であり，$\succ$ が代入に閉じ，$\succsim$ は文脈と代入に閉じることである．ここで，$\sqsupset$ が整礎であるとは 無限減少列 $s_0 \sqsupset s_1 \sqsupset \cdots$ が存在しないことである．$\sqsupset$ が文脈に閉じるとは，任意の文脈 $C[\,]$ に対して $s \sqsupset t \Rightarrow C[s] \sqsupset C[t]$ となることであり，$\sqsupset$ が代入に閉じるとは，任意の代入 θ に対し，$s \sqsupset t \Rightarrow s\theta \sqsupset t\theta$ となることである．

以下の定理が成立する．

定理 3.1 ([2]) TRS R が停止性を持つことと，以下を満たすような簡約化対 $\langle \succsim, \succ \rangle$ が存在することは必要十分である．

- $\forall l \to r \in R.\ l \succsim r$
- $\forall u^\# \to v^\# \in DP(R).\ u^\# \succ v^\#$

よって，上記の性質を満たす簡約化対を設計することによって TRS R の停止性を証明することができる．しかし，簡約化対を設計するには様々な性質を持つように設計しなくてはならず，容易ではない．

4 抽象重み付き経路順序の提案

本稿では山田らによって提案された重み付き経路順序 (WPO) を抽象化した抽象重み付き経路順序 (AWPO)[6] を提案する．AWPO は二項関係 $\rhd$，代数 $\mathcal{A}$，関係の対から関係の対への写像 F から定まる関係の対である．しかし，一般的には AWPO は簡約化対であるとは言えない．そこで，$\rhd$，$\mathcal{A}$，F がどのような条件を満たせば AWPO が簡約化対となるのかを示す．

AWPO の簡約かつであるための十分条件を与えることにより，新たな簡約化対を設計する際には十分条件を満たすような $\rhd$，$\mathcal{A}$，F を設計するだけでよく，簡約化対の設計が容易となる．

4.1 重み付き経路順序

本節では WPO の定義を与える．WPO の定義を与えるにあたって，TRS の停止性証明に古くから用いられている手法の一つである解釈法について紹介する．ここでの定義は [7] に基づく．

定義 4.1 ($\mathcal{F}$–代数) $\mathcal{F}$ を関数記号の集合とする．$\mathcal{F}$–代数とは，台と呼ばれる集合 A と関数記号 f に解釈 $I(f) : A^{arity(f)} \to A$ を与える族 I の組であり，$\langle A, I \rangle$ で表される．

定義 4.2 (整礎代数) $\langle A, I \rangle$ が $\mathcal{F}$–代数かつ A 上の関係の対 $\langle \gtrsim, > \rangle$ が以下の性質を満たすとき，$\mathcal{A} = \langle A, I, \gtrsim, > \rangle$ を整礎代数と呼ぶ．

- $>$ は整礎な順序
- $\gtrsim$ は擬順序 (推移性と反射性を持つ)
- $> \subseteq \gtrsim$
- $\gtrsim \cdot > \cdot \gtrsim \subseteq >$

混乱のない場合，$\mathcal{F}$-代数を単に代数と呼び，$I(f)$ を $f_{\mathcal{A}}$ と書く．

定義 4.3 (項に対する解釈) $\mathcal{A}$ を整礎代数とする．写像 $\alpha : \mathcal{V} \to A$ を割り当てと呼び，拡張準同型 $\widehat{\alpha} : \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V}) \to A$ を以下のように定義する．

- $\widehat{\alpha}(x) = \alpha(x)$
- $\widehat{\alpha}(f(s_1, \ldots, s_n)) = f_{\mathcal{A}}(\widehat{\alpha}(s_1), \ldots, \widehat{\alpha}(s_n))$

また，項上の関係 $>_{\mathcal{A}}$ および $\gtrsim_{\mathcal{A}}$ は以下のように定義される．

$$s \underset{(\sim)}{>}_{\mathcal{A}} t \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall \alpha.\ \widehat{\alpha}(s) \underset{(\sim)}{>} \widehat{\alpha}(t)$$

定理 4.4 整礎代数 $\mathcal{A}$ に対し，$\gtrsim_{\mathcal{A}}$ が文脈に閉じるとする．このとき，$\langle \gtrsim_{\mathcal{A}}, >_{\mathcal{A}} \rangle$ は簡約化対となる．

同様に，WPO で用いられている部分ステータス，優先順位についても定義を与える．

定義 4.5 (部分ステータス) 部分ステータス σ とは，関数記号 $f \in \mathcal{F}$ に対して $arity(f)$ 以下の正整数からなるリスト $[i_1, \ldots, i_m]$ を返す関数である．$\sigma(f)$ を集合 $\{i_1, \ldots, i_m\}$ と見なす場合もある．$\sigma(f) = [i_1, \ldots, i_m]$ としたとき，リスト $[s_{i_1}, \ldots, s_{i_m}]$ を $[s_1, \ldots, s_n]^{\sigma(f)}$ で表す．

定義 4.6 (優先順位) 優先順位 $\gtrsim$ とは，推移性と反射性を持つ関数記号上の順序であり，$> = \gtrsim / \lesssim$ が整礎となる順序である．

また，本稿においては $\gtrsim \cap \lesssim$ を $\sim$ を用いて表す．

これらを用いて WPO は以下で定義される．

定義 4.7 (重み付き経路順序 (WPO)) $\mathcal{A}$ を整礎代数，σ を部分ステータス，$\gtrsim$ を優先順位とする．項上の関係 $\gtrsim_{\mathrm{WPO(A,\sigma)}}$ と $>_{\mathrm{WPO(A,\sigma)}}$ は以下のように定義される．

0. 任意の変数 x に対し，$x \gtrsim_{\mathrm{WPO(A,\sigma)}} x$.

以下を満たすとき $s \equiv f(s_1, \ldots, s_n) \underset{(\sim)}{>}_{\mathrm{WPO(A,\sigma)}} t$.

1. $s >_{\mathcal{A}} t$，または
2. $s \gtrsim_{\mathcal{A}} t$ かつ以下のいずれかが成立．
   (a) $\exists i \in \sigma(f).\ s_i \gtrsim_{\mathrm{WPO(A,\sigma)}} t$，または
   (b) $t \equiv g(t_1, \ldots, t_n)$ かつ $\forall j \in \sigma(g).$ $s >_{\mathrm{WPO(A,\sigma)}} t_j$ かつ以下のいずれかが成立．
      i. $f > g$，または
      ii. $f \sim g$ かつ $[s_1, \ldots, s_n]^{\sigma(f)} \underset{(\sim)}{>}{}^{lex}_{\mathrm{WPO(A,\sigma)}} [t_1, \ldots, t_m]^{\sigma(g)}$

ここで，$\succ^{lex}$ とは，$\succ$ の項上のリストへの辞書式拡張である．

定理 4.8 $\mathcal{A}$ を整礎代数とし，σ を部分ステータスとする．このとき，以下の性質を満たすとき，WPO は簡約化対となる．

- $\gtrsim_{\mathcal{A}}$ は文脈に閉じる
- $\forall f \in \mathcal{F}, i \in \sigma(f).\ f(s_1, \ldots, s_n) \gtrsim_{\mathcal{A}} s_i$

WPO の特徴としては様々な簡約化対を包含していることが挙げられる．その例としては Knuth-Bendix 順序 (KBO)[3] や辞書式経路順序 (LPO)[4]，などが挙げられる．

4.2 抽象重み付き経路順序

本節では WPO を抽象化した抽象重み付き経路順序 (AWPO) を提案する．様々な簡約化対を包含している WPO を抽象化することにより，AWPO は WPO が包含する簡約化対や WPO 自体を含む抽象的な簡約化対が得られる．

AWPO は二項関係 $\rhd$, 整礎代数 $\mathcal{A}$, および関係の対から関係の対への写像 F から定義される．以後，関係の対 $\langle \succsim, \succ \rangle$ に対し，$F(\langle \succsim, \succ \rangle)$ を $\langle \succsim^F, \succ^F \rangle$ で表す．また F に単調性を仮定する．ここで F が単調であるとは，$\gtrsim_1 \subseteq \gtrsim_2$ かつ $>_1 \subseteq >_2$ ならば $\gtrsim_1^F \subseteq \gtrsim_2^F$ かつ $>_1^F \subseteq >_2^F$ が成立することである．なお，この仮定により以下で与える抽象重み付き経路順序の定義の妥当性がタルスキーの不動点定理 [8] により保証される．

定義 4.9 (抽象重み付き経路順序 (AWPO)) $\rhd$ を項上の二項関係，$\mathcal{A}$ を整礎代数，F を関係の対から関係の対への単調写像とする．

このとき，関係の対 $\langle \gtrsim_{\mathrm{AWPO}(\rhd,\mathcal{A},F)}, >_{\mathrm{AWPO}(\rhd,\mathcal{A},F)} \rangle$ を以下のように定義する．

(AWPO0) 任意の項 s に対し，$s \gtrsim_{\mathrm{AWPO}(\rhd,\mathcal{A},F)} s$.

また以下を満たすとき $s \mathrel{\overset{}{(\gtrsim)}}_{\mathrm{AWPO}(\rhd,\mathcal{A},F)} t$.

(AWPO1) $s >_{\mathcal{A}} t$，または

(AWPO2) $s \gtrsim_{\mathcal{A}} t$ かつ以下のいずれかが成立．

(AWPO2a) $\exists s' \lhd s.\ s' \gtrsim_{\mathrm{AWPO}(\rhd,\mathcal{A},F)} t$，または

(AWPO2b) $\forall t' \lhd t.\ s >_{\mathrm{AWPO}(\rhd,\mathcal{A},F)} t'$ かつ $s \mathrel{\overset{}{(\gtrsim)}}^F_{\mathrm{AWPO}(\rhd,\mathcal{A},F)} t$.

以降では $\mathrel{(\gtrsim)}_{\mathrm{AWPO}(\rhd,\mathcal{A},F)}$ を単に $\mathrel{(\gtrsim)}_{awpo}$ と記す．

4.3 抽象重み付き経路順序が簡約化対であるための十分条件

一般には AWPO は簡約化対であるとは言えない．よって，$\rhd$, $\mathcal{A}$, F がどのような条件を満たせば AWPO が簡約化対となるかを示す．

十分条件を議論するために必要な概念を定義する．

定義 4.10 集合 SN および $\overline{\mathrm{SN}}$ を以下で定義する．

- $t \in \mathrm{SN} \overset{\mathrm{def}}{\iff} t$ から始まる $\gtrsim_{awpo}^* \cdot >_{awpo} \cdot \gtrsim_{awpo}^*$ の無限系列が存在しない
- $t \in \overline{\mathrm{SN}} \overset{\mathrm{def}}{\iff}$ 任意の u に対し，$t >_{\mathcal{A}} u$ または $t \rhd u$ ならば $u \in \mathrm{SN}$ が成立

定義 4.11 項上の関係 $\sqsupset$ が $\langle s, t \rangle$ に対して代入に閉じるとは，$s \sqsupset t$ のとき，任意の代入 θ に対して $s\theta \sqsupset t\theta$ が成立することである．

AWPO が簡約化対であるための $\rhd$, $\mathcal{A}$, F の十分条件は以下の通りである．

- $\rhd$ の十分条件
  - ($\rhd$1) $\rhd$ は整礎
  - ($\rhd$2) $\rhd$ は代入に閉じる
  - ($\rhd$3) $f(\ldots,t,\ldots) \rhd u$ のとき，$t \equiv u$ もしくは任意の s に対して $f(\ldots,s,\ldots) \rhd u$
- $\mathcal{A}$ の十分条件
  - (A1) $\gtrsim_{\mathcal{A}}$ は文脈に閉じる
  - (A2) $\rhd \subseteq \gtrsim_{\mathcal{A}}$
- F の十分条件
  - (F1) 関係 $(\gtrsim_{awpo}^F)^* \cdot >_{awpo}^F$ は $\overline{\mathrm{SN}}$ 上で整礎
  - (F2) $s \gtrsim_{awpo} t$ のとき，$f(\ldots,s,\ldots) \gtrsim_{awpo}^F f(\ldots,t,\ldots)$
  - (F3) 任意の $\langle s', t' \rangle \lhd^{lex} \langle s, t \rangle$ に対し $\mathrel{(\gtrsim)}_{awpo}$ が代入に閉じているならば，$\langle s, t \rangle$ に対しても $\mathrel{(\gtrsim)}_{awpo}^F$ は代入に閉じている．

以下では，上記が $\langle \gtrsim_{awpo}, >_{awpo} \rangle$ が簡約化対となるための十分条件であることを示す．

補題 4.12 $\gtrsim_{awpo} \subseteq \gtrsim_{\mathcal{A}}$ かつ $>_{awpo} \subseteq \gtrsim_{\mathcal{A}}$

Proof. 定義より明らか． □

補題 4.13 $\overline{\mathrm{SN}} \ni t_0 \gtrsim_{awpo} \cdots \gtrsim_{awpo} t_n >_{awpo} t_{n+1}$ ならば $t_{n+1} \in \mathrm{SN}$.

Proof. 関係 $(\gtrsim^F_{awpo})^* \cdot >^F_{awpo}$ を $\overline{\mathrm{SN}}$ 上に制限した関係を $\gg$ で略記する．このとき，$\gg$ は性質 (F1) より整礎となる．$\gg, >, \rhd$ の辞書式結合を用いた (t_0, n, t_{n+1}) に関する帰納法で示す．

- $t_0 \gtrsim^*_{awpo} t_n$ 中に (AWPO0) により導出されている箇所が存在する場合．このとき，該当箇所を削除することにより $t_0 \gtrsim^{n'}_{awpo} t_n >_{awpo} t_{n+1}$ となる n' $(< n)$ が存在する．よって，帰納法の仮定より $t_{n+1} \in \mathrm{SN}$.
- $t_0 \gtrsim^*_{awpo} t_n >_{awpo} t_{n+1}$ 中に (AWPO1) により導出されている箇所が存在する場合．このとき，補題 4.12 を考えて $t_0 >_{\mathcal{A}} t_{n+1}$ となる．よって，$t_0 \in \overline{\mathrm{SN}}$ より $t_{n+1} \in \mathrm{SN}$.
- ある i $(< n)$ で $t_i \gtrsim_{awpo} t_{i+1}$ が (AWPO2a) により導出されている場合．このとき，$t_0 \gtrsim^*_{awpo} t_i >_{awpo} t_{i+1}$ でもあるので，帰納法の仮定より $t_{i+1} \in \mathrm{SN}$. よって，$t_{n+1} \in \mathrm{SN}$.
- $n = 0$ かつ $t_0 >_{awpo} t_{n+1}$ が (AWPO2a) により導出されている場合．このとき，ある t'_0 が存在して $t_0 \rhd t'_0 \gtrsim_{awpo} t_{n+1}$. よって，$t_0 \in \overline{\mathrm{SN}}$ より $t'_0 \in \mathrm{SN}$ となり，$t_{n+1} \in \mathrm{SN}$ となる．
- $n > 0$ かつ $t_0 \gtrsim^*_{awpo} t_n$ が全て (AWPO2b) に導出されていて，$t_n >_{awpo} t_{n+1}$ が (AWPO2a) により導出されている場合．このとき，$t_{n-1} \gtrsim_{awpo} t_n$ が (AWPO2b) により導出されているので，ある $t'_n \lhd t_n$ が存在して $t_0 \gtrsim^*_{awpo} t_{n-1} >_{awpo} t'_n \gtrsim_{awpo} t_{n+1}$. 帰納法の仮定より $t'_n \in \mathrm{SN}$. よって，$t_{n+1} \in \mathrm{SN}$.
- $t_0 \gtrsim^*_{awpo} t_n >_{awpo} t_{n+1}$ が全て (AWPO2b) により導出されている場合．最初に，全ての i で $t_i \in \overline{\mathrm{SN}}$ となっている事を示す．これを示すと，$t_0 \gg t_{n+1}$ が示される．$i = 0$ のときは明らか．$i > 0$ とする．
  - $t_i >_{\mathcal{A}} t'_i$ となる任意の t'_i を考える．このとき，補題 4.12 を考えて $t_0 \gtrsim_{\mathcal{A}} t_i >_{\mathcal{A}} t'_i$ となる．よって，$t_0 \in \overline{\mathrm{SN}}$ より $t'_i \in \mathrm{SN}$.
  - 各 i $(\le n)$ で $t_i \rhd t'_i$ となる任意の t'_i を考える．$t_{i-1} \gtrsim_{awpo} t_i$ は (AWPO2b) により導出されているので $t_0 \gtrsim^*_{awpo} t_{i-1} >_{awpo} t'_i$. 帰納法の仮定より $t'_i \in \mathrm{SN}$.
  - $t_{n+1} \rhd t'_{n+1}$ となる任意の t'_{n+1} を考える．$t_n >_{awpo} t_{n+1}$ は (AWPO2b) により導出されているので $t_0 \gtrsim^*_{awpo} t_n >_{awpo} t'_{n+1}$. 帰納法の仮定より $t'_{n+1} \in \mathrm{SN}$.

  $t_{n+1} \gtrsim^*_{awpo} >_{awpo} u' \gtrsim^*_{awpo} u$ となる任意の u', u を考える．今，$t_0 \gg t_{n+1}$ であるので，帰納法の仮定より $u' \in \mathrm{SN}$. よって，$u \in \mathrm{SN}$. u は任意なので $t_{n+1} \in \mathrm{SN}$. □

補題 4.14 $\gtrsim^*_{awpo} \cdot >_{awpo} \cdot \gtrsim^*_{awpo}$ は整礎である．

Proof. 任意の t で $t \in \mathrm{SN}$ となることを $>_{\mathcal{A}}$ と $\rhd$ の辞書式結合を用いた t に関する帰納法で示す．性質 (A2) を考えて，帰納法の仮定より $t \in \overline{\mathrm{SN}}$. $t \gtrsim^*_{awpo} >_{awpo} u \gtrsim^*_{awpo} s$ となる任意の u, s を考える．補題 4.13 より，$u \in \mathrm{SN}$. よって，$s \in \mathrm{SN}$. s は任意なので $t \in \mathrm{SN}$. □

補題 4.15 $\gtrsim_{awpo}$ は文脈に閉じている．

Proof. $s \gtrsim_{awpo} t$ とし，$s' \equiv f(\ldots, s, \ldots) \gtrsim_{awpo} f(\ldots, t, \ldots) \equiv t'$ となることを示す．

$s \gtrsim_{awpo} t$ が (AWPO0) により順序付けられている場合，すなわち $s \equiv t$ の場合は (AWPO0) により $s' \gtrsim_{awpo} t'$. これ以外の場合は，(AWPO2b) によって $s' \gtrsim_{awpo} t'$ となることを示す．

補題 4.12 より $s \gtrsim_{\mathcal{A}} t$. よって，性質 (A1) より $s' \gtrsim_{\mathcal{A}} t'$ となり，性質 (F2) より $s' \gtrsim^F_{awpo} t'$ となる．よって，任意の $u \lhd t'$ に対し，$s' >_{awpo} u$ を示せば充分．性質 (A1) と (A2) より $s' \gtrsim_{\mathcal{A}} t' \gtrsim_{\mathcal{A}} u$ となるので $s' \gtrsim_{\mathcal{A}} u$. 性質 ($\rhd$3) より，以下の場合を考えれば充分．

- $t \equiv u$ の場合．仮定より $s \gtrsim_{awpo} u$ なので，(AWPO2a) より $s' \gtrsim_{awpo} u$.

- 任意の v に対し，$f(\ldots,v,\ldots) \rhd u$ となる場合．このとき，$s' \rhd u$ が成り立つ．(AWPO0) より $u \gtrsim_{awpo} u$ なので，(AWPO2a) より $s' \gtrsim_{awpo} u$．

□

補題 4.16 $\gtrsim_{awpo}$ と $>_{awpo}$ は代入に閉じている．

Proof. $s \mathrel{{}_{(}{\gtrsim}_{)}}_{awpo} t$ のとき，任意の代入 θ に対し $s\theta \mathrel{{}_{(}{\gtrsim}_{)}}_{awpo} t\theta$ となることを $\rhd^{lex}$ を用いた $\langle s,t \rangle$ に関する帰納法で示す．この帰納法の正当性は ($\rhd$1) によって保証される．ここで，補題 4.12 より $s \gtrsim_{\mathcal{A}} t$ であるので，明らかに $s\theta \gtrsim_{\mathcal{A}} t\theta$．$s \mathrel{{}_{(}{\gtrsim}_{)}}_{awpo} t$ の導出により，以下の 4 つの場合に分けて考える．

- (AWPO0) によって $s \gtrsim_{awpo} t$ が導出された場合，すなわち $s \equiv t$ の場合は，明らかに (AWPO0) により $s\theta \gtrsim_{awpo} t\theta$ となる．
- (AWPO1) によって導出された場合．$s\theta >_{\mathcal{A}} t\theta$ となることから，(AWPO1) より $s\theta \mathrel{{}_{(}{\gtrsim}_{)}}_{awpo} t\theta$．
- (AWPO2a) によって導出された場合．このとき，ある $s' \lhd s$ が存在して $s' \gtrsim_{awpo} t$．帰納法の仮定より $s'\theta \gtrsim_{awpo} t\theta$．さらに，性質 ($\rhd$2) より $s\theta \rhd s'\theta$ なので，(AWPO2a) より $s\theta \mathrel{{}_{(}{\gtrsim}_{)}}_{awpo} t\theta$．
- (AWPO2b) によって導出された場合．帰納法の仮定より任意の $t' \lhd t$ で $s\theta >_{awpo} t'\theta$．また，帰納法の仮定と性質 (F3) より $s\theta \mathrel{{}_{(}{\gtrsim}_{)}}^{F}_{awpo} t\theta$．さらに，性質 ($\rhd$3) より $t\theta \rhd t'\theta$ なので，(AWPO2b) より $s\theta \mathrel{{}_{(}{\gtrsim}_{)}}_{awpo} t\theta$．

□

補題 4.14, 4.15, 4.16 より直ちに次の定理を得る．

定理 4.17 $\rhd$，$\mathcal{A}$，F がそれぞれ AWPO が簡約化対であるための十分条件を満たしているとする．このとき，$\langle \gtrsim_{awpo}, >_{awpo} \rangle$ は簡約化対である．

5 抽象重み付き経路順序の活用

AWPO は新たな簡約化対の設計に役立てることができる．これは，AWPO が簡約化対であるための十分条件を与えたことにより，その十分条件を満たすような $\mathcal{A}$，$\rhd$，F を与えることによって簡約化対を設計することができるためである．

本節ではその例として多重集合ステータス付き重み付き経路順序 (SWPO) を提案する．

5.1 多重集合ステータス付き WPO

$\gtrsim$ を優先順位，σ を部分ステータス，$stat$ を関数記号から {lex,mul} への関数とする．二項関係 $\rhd_{ps}$ を以下で定義する：

$$f(s_1,\ldots,s_m) \rhd_{ps} s_i \overset{\text{def}}{\iff} i \in \sigma(f)$$

関係の対から関係の対への写像 F_S を以下のように定義する：以下のいずれかを満たすとき，$f(s_1,\ldots,s_m) \mathrel{{}_{(}{\gtrsim}_{)}}^{F_S} g(t_1,\ldots,t_n)$．

- $f > g$，
- $f \sim g$ かつ $stat(f) = \text{lex}$ かつ $[s_1,\ldots,s_n]^{\sigma(f)} \mathrel{{}_{(}{\gtrsim}_{)}}^{lex} [t_1,\ldots,t_n]^{\sigma(g)}$，
- $f \sim g$ かつ $stat(f) = \text{mul}$ かつ $\{s_k \mid k \in \sigma(f)\} \mathrel{{}_{(}{\gtrsim}_{)}}^{mul} \{t_l \mid l \in \sigma(g)\}$．

整礎代数 $\mathcal{A}$，$\rhd_{ps}$，F_S をパラメータとして定義される AWPO を考える．

定義 5.1 (多重集合ステータス付き WPO) $\mathcal{A}$ を整礎代数，σ を部分ステータス，$\gtrsim$ を優先順位とする．また，$stat$ を関数記号を入力して lex, mul のいずれかを返す関数とする．

項上の関係の対 $\langle \gtrsim_{\mathrm{SWPO(A,\sigma)}}, >_{\mathrm{SWPO(A,\sigma)}} \rangle$ を以下で定義する．

(SWPO0) 任意の項 s に対し，$s \gtrsim_{\mathrm{SWPO(A,\sigma)}} s$．

また，以下を満たすとき $s \mathrel{{}_{(}{\gtrsim}_{)}}_{\mathrm{SWPO(A,\sigma)}} t$．

(SWPO1) $s >_{\mathcal{A}} t$，もしくは

(SWPO2) $s \gtrsim_{\mathcal{A}} t$ かつ以下のいずれかを満たす．

(SWPO2a) $s \equiv f(s_1,\ldots,s_m)$ かつ $\exists i \in \sigma(f)$．$s_i \gtrsim_{\mathrm{SWPO(A,\sigma)}} t$，または

(SWPO2b) $t \equiv g(t_1,\ldots,t_n)$ かつ $\forall j \in \sigma(g)$. $s >_{\mathrm{SWPO(A,\sigma)}} t_j$ かつ以下のいずれかを満たす．

(SWPO2bI) $f >_\Sigma g$, または

(SWPO2bII) $f \sim_\Sigma g$ かつ $stat(f) = \mathsf{lex}$ かつ

$[s_1,\ldots,s_m]^{\sigma(f)} \mathrel{\underset{(\sim)\mathrm{SWPO(A,\sigma)}}{\gtrsim}^{lex}} [t_1,\ldots,t_n]^{\sigma(g)}$, または

(SWPO2bIII) $f \sim_\Sigma g$ かつ $stat(f) = \mathsf{mul}$ かつ

$\{s_k \mid k \in \sigma(f)\} \mathrel{\underset{(\sim)\mathrm{SWPO(A,\sigma)}}{\gtrsim}^{mul}} \{t_l \mid l \in \sigma(g)\}$.

ここで，$\succ^{mul}$ とは，$\succ$ の項上の多重集合への多重集合拡張である．

SWPO は WPO に多重集合拡張の概念を加えた関係の対となっている．

5.2 SWPO が簡約化対であることの証明

以下では $\underset{(\sim)}{\gtrsim}_{\mathrm{SWPO(A,\sigma)}}$ を単に $\underset{(\sim)}{\gtrsim}_{swpo}$ と表す．

SWPO が簡約化対であるための $stat$ の十分条件は以下の通りである．

$$f \sim g \Longrightarrow stat(f) = stat(g)$$

このとき，(A1)，(A2) を満たすような整礎代数 $\mathcal{A}$ を与えたとき，SWPO が簡約化対であることを，AWPO が簡約化対であるための十分条件を用いて証明する．

補題 5.2 $\rhd_{ps}$ は ($\rhd$1)，($\rhd$2)，($\rhd$3) を満たす．

Proof. 部分項関係と部分ステータスの定義を考えると，($\rhd$1)，($\rhd$2)，($\rhd$3) を満たすことは明らか．□

補題 5.3 関係 $(\gtrsim^{Fs}_{swpo})^* \cdot >^{Fs}_{swpo}$ は $\overline{\mathrm{SN}}$ 上で整礎

Proof. 関係 $(\gtrsim^{Fs}_{swpo})^* \cdot >^{Fs}_{swpo}$ を $\gg$ で略記する．

無限減少列 $s_0 \gg s_1 \gg \cdots$ が存在したと仮定する．このとき，$>$ の整礎性より，ある i 番目以降では (SWPO2bII) の繰り返し適用となる．このとき，$stat(root(s_i))$ による場合分けを行う．

- $stat(root(s_i)) = \mathsf{lex}$ のとき， 辞書式拡張の定義より $s_i|_k \gg \cdots$ という無限減少列が存在することとなる．また，$s_i \rhd_{ps} s_i|_k$ が成り立つことから，これは $s_i \in \overline{\mathrm{SN}}$ に矛盾．
- $stat(root(s_i)) = \mathsf{mul}$ のとき，$stat(root(s_i)) = \mathsf{lex}$ のときと同様の議論により $s_i \in \overline{\mathrm{SN}}$ に矛盾．

以上より，関係 $(\gtrsim^{Fs}_{swpo})^* \cdot >^{Fs}_{swpo}$ は $\overline{\mathrm{SN}}$ 上で整礎である．□

補題 5.4 $s \gtrsim_{swpo} t$ のとき，$f(\ldots,s,\ldots) \gtrsim^{Fs}_{swpo} f(\ldots,t,\ldots)$

Proof. 定義より明らか．□

補題 5.5 任意の $\langle s',t'\rangle \lhd^{lex}_{ps} \langle s,t\rangle$ に対し $\underset{(\sim)}{\gtrsim}_{swpo}$ が代入に閉じているならば，$\langle s,t\rangle$ に対し $\underset{(\sim)}{\gtrsim}^{Fs}_{swpo}$ は代入に閉じている．

Proof. $s \underset{(\sim)}{\gtrsim}^{Fs}_{swpo} t$ のとき，$s\theta \underset{(\sim)}{\gtrsim}^{Fs}_{swpo} t\theta$ となることを示す．$\underset{(\sim)}{\gtrsim}^{Fs}_{swpo}$ の定義を考えて，$s \equiv f(s_1,\ldots,s_m), t \equiv g(t_1,\ldots,t_m)$ とする．$s \underset{(\sim)}{\gtrsim}^{Fs}_{swpo} t$ が (SWPO2bI) によって導出される場合は明らか．(SWPO2bII)，(SWPO2bIII) のいずれかにより導出される場合を考える．このとき，$f \sim_\Sigma g$ が成立．

- (SWPO2bII) により導出されたとき．$[s_1,\ldots,s_m]^{\sigma(f)} \underset{(\sim)}{\gtrsim}^{\mathsf{lex}}_{swpo} [t_1,\ldots,t_n]^{\sigma(g)}$ である．

  任意の $s' \in [s_1,\ldots,s_m]^{\sigma(f)}$ について，定義より $s \rhd_{ps} s'$ であり，仮定より $s' \underset{(\sim)}{\gtrsim}_{swpo} t' \Longrightarrow s'\theta \underset{(\sim)}{\gtrsim}_{swpo} t'\theta$．したがって，

  $$[s_1\theta,\ldots,s_m\theta]^{\sigma(f)} \underset{(\sim)}{\gtrsim}^{\mathsf{lex}}_{swpo} [t_1\theta,\ldots,t_n\theta]^{\sigma(g)}$$

  が導かれ，(SWPO2bII) より $s\theta \underset{(\sim)}{\gtrsim}^{Fs}_{swpo} t\theta$.
- (SWPO2bIII) により導出されたとき．同様の議論により (SWPO2bIII) より $s\theta \underset{(\sim)}{\gtrsim}^{Fs}_{swpo} t\theta$. □

これらの補題により直ちに以下の定理が得られる．

定理 5.6 $\mathcal{A}$ を (A1)，(A2) を満たすような整礎代数とする．このとき，SWPO($\mathcal{A},\sigma$) は簡約化対である．

本節の各証明は比較的簡潔であり，AWPO の枠組みを用いることにより新たな簡約化対の設計が容易になることが期待できる．

5.3 SWPO の有効性

本節では，SWPO が WPO の拡張であることを示す．以下の TRS R を考える．

$$R = \begin{cases} g(x) & \rightarrow & x & \cdots(1) \\ f(g(x)) & \rightarrow & g(f(f(x))) & \cdots(2) \\ h(f(x), f(y)) & \rightarrow & h(f(y), x) & \cdots(3) \end{cases}$$

この TRS R から以下の依存対が得られる．

$$h^{\#}(f(x), f(y)) \rightarrow h^{\#}(f(y), x) \qquad (3')$$

(1) および (2) より，$f(x) =_{\mathcal{A}} x$ が導かれることが [9, Example 4.14] に示されている．したがって $(3')$ は (左辺) $>_{\mathcal{A}}$ (右辺) と出来ず，また $[f(x), f(y)] >^{lex}_{wpo} [f(y), x]$ ともなり得ない．

一方，$\sigma(f) = [1]$ とすれば $\{f(x), f(y)\} >^{mul}_{wpo} \{f(y), x\}$ は成立する．よって，SWPO は WPO より真に広い範囲で TRS の停止性を証明することができることが分かる．また，この拡張により，WPO では包含していなかった再帰経路順序 (RPO) [5] を包含するようになった．

6 終わりに

本稿では，WPO を抽象化した AWPO を提案し，AWPO が簡約化対であるための十分条件を示した．また AWPO の具体例として，本稿では SWPO を提案した．そして，SWPO が WPO の改良となっていることを例で示した．

今後の課題としては，停止性証明の state-of-the-art を進めるような AWPO の具体例を探すことが挙げられる．また，本研究を高階書換え系や AC 書換え系などの体系に拡張することも検討していく．

参考文献

[1] Terese, Term Rewriting Systems, Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, Vol.55, Cambridge University Press, 2003.

[2] T. Arts and J. Giesl. Termination of term rewriting using dependency pairs. Theoretical Computer Science , 236(1-2):133–178, 2000.

[3] D.E. Knuth and P. Bendix. Simple word problems in universal algebras. In Computational Problems in Abstract Algebra, pages 263–297. Pergamon Press, New York, 1970.

[4] S. Kamin, J.-J. Lévy. Two generalizations of the recursive path ordering, 1980. Unpublished note.

[5] N. Dershowitz. Orderings for term-rewriting systems. Theoretical Computer Science, 17(3):297-301, 1982.

[6] A. Yamada, K.Kusakari, T. Sakabe. A Unified Ordering for Termination Proving, Science of Computer Programming, 2014.

[7] J. Endrullis and J. Waldmann and H. Zantema. Matrix Interpretations for Proving Termination of Term Rewriting, Journal of Automated Reasoning, 40(2-3):195-220, 2008.

[8] A. Tarski, A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications, Pacific Jounal of Mathematics 5(2):285–309, 1955.

[9] A. Yamada. The Weighted Path Order for Termination of Term Rewriting, Ph.D. Thesis, Nagoya University, 2014.