数理解析研究所講究録
第1941巻 2015年 37-40

Tangle と イデアルについて

群馬大学・理工学研究院 山崎 浩一
Faculty of Science and Technology, Gunma University

1 はじめに

本研究では, 台集合 X とその上の対称劣モジュラ関数 f に対して, (X,f) 上でイデアルを先ず定義する (2.3 参照). この (X,f) 上のイデアルはブール代数上のイデアルを模倣する形で定義されるが, 本質的には Oum と Seymour により導入された loose tangle と等しいものである [2]. ブール代数上の極大イデアルは二者択一的な公理で特徴付けられることが知られているが, 本研究で (X,f) 上の極大イデアルも二者択一的な公理で特徴付けられること (定理 3.1) を示す. ブール代数上の既知の結果と (X,f) 上での本研究結果を対比させると次のようになる:

[既知の結果] ブール代数 $(X,\cup,\cap)$ において, $\mathscr{I}\subseteq 2^X$ がイデアルとは, 次の 3 公理 (IU), (IH), および (IW) を満たすときをいう:

(IU) $A,B\in\mathscr{I} \implies A\cup B\in\mathscr{I}$
(IH) $B\in\mathscr{I}, A\subseteq B \implies A\in\mathscr{I}$
(IW) $X\notin\mathscr{I}$

このとき以下は良く知られた事実である, すなわち, イデアル $\mathscr{I}$ が以下の二者択一的な公理 (IE) を満たす $\stackrel{\text{iff}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathscr{I}$ は極大.

(IE): $\forall A\subseteq X$, either $(A\in\mathscr{I})$ or $(\overline{A}\in\mathscr{I})$.

[本研究の結果] (X,f) とある自然数 k において, $\mathscr{I}\subseteq 2^X$ がイデアルとは, 次の 4 公理 (TL), (TU), (TH), および (LL) を満たすときをいう:

(TU) $A,B\in\mathscr{I}$, $f(A\cup B)\le k \implies A\cup B\in\mathscr{I}$
(TH) $B\in\mathscr{I}$, $A\subseteq B$, $f(A)\le k \implies A\in\mathscr{I}$
(IW) $X\notin\mathscr{I}$
(LL) $\forall A\subseteq X$, $|A|\le 1$, and $f(A)\le k \implies A\in\mathscr{I}$

本研究では次を示した, すなわち, イデアル $\mathscr{I}$ が以下の二者択一的な公理 (TE) を満たす $\stackrel{\text{iff}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathscr{I}$ は極大.

(TE) $A\subseteq X, f(A)\le k \Rightarrow$ either $(A\in\mathscr{I})$ or $(\overline{A}\in\mathscr{I})$

本稿のタイトルに "tangle" という単語があるのは以下の理由からである. Tangle とは, グラフパラメータである branchwidth の双対概念であり, Robertson と Seymour により導入された [3]. 文献 [3] では明示的になされなかったが, tangle は対称劣モジュラ関数に対しても定義でき, 後に Geelen 等によって対称劣モジュラ関数に対しても明示的に定義された [1]. また (X,f) 上のイデアルに二者択一的な公理 (TE) を付すと, それが tangle と一致することが知られている [5]. この結果と今回の結果を合わせることで, (X,f) 上の極大イデアルが tangle と一致することわかった.

本結果は [3, 1, 2] の一連の研究を再考したに過ぎない. しかし本研究でブール代数上の結果や証明方法をなぞる形で tangle を再考することにより, tangle の理論を見通しよく展開できることが期待できる.

2 諸定義と既知の結果

X をある集合とし, $f:2^X\to\mathbf{N}$ をある関数とする.

2.1 対称劣モジュラ

関数 f が対称劣モジュラとは f が以下を満たすときをいう:

- $\forall A\subseteq X,\ f(A)=f(\overline{A})$.
- $\forall A,B\subseteq X,\ f(A)+f(B)\ge f(A\cap B)+f(A\cup B)$.

対称劣モジュラ関数のよく知られた例として, 与えられたグラフ $G=(V,E)$ と各 $A\subset V$ に対し, $|\{e\in E\mid e$ は A に属する頂点と属さない頂点の両方と接続している $\}|$ を値として返す関数 $f_\partial(A)$ が挙げられる. この例の頂点集合 V と辺集合 E を入換えたもの, すなわち各 $A\subset E$ に対し, 値として $|\{v\in V\mid v$ は A に属する辺と属さない辺の両方と隣接している $\}|$ を返す関数 $f_\Phi(A)$ も対称劣モジュラ関数である.

ある自然数 k に対し, 集合 $A \subset X$ が k **small**(または単に small) とは, $f(A) \leq k$ を満たすときをいう.

以下に対称劣モジュラ関数が満たす基本的な性質を挙げる. これらの性質は, 本稿の結果の証明で使われる.

補題 2.1 対称劣モジュラ関数 f は以下を満たす [1]:

1. $\forall A \subseteq X,\ f(A) \geq f(\emptyset)$,
2. $f(A) + f(B) \geq f(A \backslash B) + f(B \backslash A)$.

証明 (1) は以下により得られる.

$$\begin{aligned} f(A) + f(A) &= f(A) + f(\overline{A}) \\ &\geq f(A \cup \overline{A}) + f(A \cap \overline{A}) \\ &= f(X) + f(\emptyset) \\ &= f(\emptyset) + f(\emptyset). \end{aligned}$$

(2) は以下により得られる.

$$\begin{aligned} f(A) + f(B) &= f(A) + f(\overline{B}) \\ &\geq f(A \cup \overline{B}) + f(A \cap \overline{B}) \\ &= f(\overline{B \backslash A}) + f(A \backslash B) \\ &= f(B \backslash A) + f(A \backslash B). \end{aligned}$$

□

注意 1 上記補題の (1) より, $\forall A \subseteq X,\ f(A) \geq f(X)$ が成り立つ

2.2 ブール代数上のイデアル, 極大イデアル

ブール代数 $(X, \cup, \cap)$ において以下を満たす集合族 $\mathscr{I} \subseteq 2^X$ をイデアル[*1] と呼ぶ (cf. [4] 1 章 3 節):

(IU) $A, B \in \mathscr{I} \implies A \cup B \in \mathscr{I}$,

(IH) $B \in \mathscr{I}, A \subseteq B \implies A \in \mathscr{I}$,

(IW) $X \notin \mathscr{I}$.

イデアル $\mathscr{M}$ が極大であるとは, $\mathscr{M}$ を真に含むようなイデアル $\mathscr{I}$ が存在しないときをいう. 極大イデアルは次の特徴付け (二者択一) を持つことが知られている.

事実 1 イデアル $\mathscr{I} \subseteq 2^X$ が極大である必要十分条件は, $\mathscr{I}$ が以下の公理も満たすことである (cf. [4] 1 章 6 節):

(IE) $\forall A \subseteq X$, either $(A \in \mathscr{I})$ or $(\overline{A} \in \mathscr{I})$.

他の特徴付けとしては次が知られている. X が有限集合ならば, イデアル $\mathscr{I} \subset 2^X$ が極大である必要十分条件は, $\exists a \in X$ s.t. $[A \in \mathscr{I} \iff a \notin A]$ である. これら以外にも, モジュラ性や分割を使った特徴付けが知られている.

以下にブール代数上のイデアルとその極大性に関する命題およびその証明を示す. 本質的にこの証明と同じ方針で, (X, f) 上の極大イデアルの特徴付けを行う.

定義 X をある集合とする. $\mathscr{F} \subset 2^X$ が *finite union property (fup)* を満たすとは, 任意の有限族 $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{F}$ $(|\mathscr{E}| \geq 2)$ に対し, $\bigcup_{Z \in \mathscr{E}} Z \neq X$ を満たすときを言う.

命題 2.2 X をある集合とする. $\mathscr{F} \subset 2^X$ は fup を満たし, 極大のものとする. このとき, 任意の $Y \subseteq X$ に対し, $Y \in \mathscr{F}$ または $\overline{Y} \in \mathscr{F}$ のどちら一方が成り立つ.

証明 Fup の定義より両方成り立つことはない. よって, 両方成り立たないと仮定し、矛盾を導く. このとき, $\mathscr{F}$ の極大性より, ある $A_1^Y, \ldots, A_p^Y \in \mathscr{F}$ と $A_1^{\overline{Y}}, \ldots, A_q^{\overline{Y}} \in \mathscr{F}$ が存在し, $X = \bigcup_{1 \leq i \leq p} A_i^Y \cup Y = \bigcup_{1 \leq i \leq q} A_i^{\overline{Y}} \cup \overline{Y}$ とできる. よって,

$$\begin{aligned} X &= \left[\left(\bigcup_{1 \leq i \leq p} A_i^Y \cup \bigcup_{1 \leq i \leq q} A_i^{\overline{Y}}\right) \cup Y\right] \cap \\ &\quad \left[\left(\bigcup_{1 \leq i \leq q} A_i^Y \cup \bigcup_{1 \leq i \leq q} A_i^{\overline{Y}}\right) \cup \overline{Y}\right] \\ &= \left(\bigcup_{1 \leq i \leq p} A_i^Y \cup \bigcup_{1 \leq i \leq q} A_i^{\overline{Y}}\right) \cup (Y \cap \overline{Y}) \\ &= \bigcup_{1 \leq i \leq p} A_i^Y \cup \bigcup_{1 \leq i \leq q} A_i^{\overline{Y}} \\ &\subseteq \bigcup_{A \in \mathscr{F}} A. \end{aligned}$$

しかしこれはは $\mathscr{F}$ が fup を満たすことに矛盾. □

2.3 (X, f) 上のイデアル, 極大イデアル

X をある台集合とし, f を X 上の対称劣モジュラ関数とする. (X, f) において以下を満たす集合族 $\mathscr{I} \subseteq 2^X$ をイデアルと呼ぶ:

(TU) $A, B \in \mathscr{I},\ f(A \cup B) \leq k \implies A \cup B \in \mathscr{I}$,

(TH) $B \in \mathscr{I},\ A \subseteq B,\ f(A) \leq k \implies A \in \mathscr{I}$,

(IW) $X \notin \mathscr{I}$,

(LL) $\forall A \subseteq X, |A| \leq 1$, and $f(A) \leq k \implies A \in \mathscr{I}$.

公理 (LL) はイデアルの原始的な要素を規定している. イデアル $\mathscr{M}$ が極大であるとは, $\mathscr{M}$ を真に含むよ

[*1] 本研究では真部分イデアルのみを考える. そのため公理 (IW) が付加されている.

うなイデアル $\mathscr{I}$ が存在しないときをいう.

2.4 (対称劣モジュラ関数上の)Tangle

定義 $\mathscr{T} \subseteq 2^X$ が (f の) オーダー $k+1$ の **tangle** とは, 次を満たすときをいう[*2] [1]:

(TB) $\forall A \in \mathscr{T},\ f(A) \leq k$,

(TE) $A \subseteq X, f(A) \leq k \Rightarrow$ either $(A \in \mathscr{T})$ or $(\overline{A} \in \mathscr{T})$,

(TC) $A, B, C \in \mathscr{T} \implies A \cup B \cup C \neq X$,

(TL) $\forall a \in X,\ X \backslash \{a\} \notin \mathscr{T}$.

上記の別定義として, 公理 (TC) を以下の公理 (TH), (T3P) に置き換えてもよいことが知られている [1]:

(TH) $B \in \mathscr{T}, A \subseteq B, f(A) \leq k \implies A \in \mathscr{T}$,

(T3P) $\forall$ 分割 $(X_1, X_2, X_3), \exists 1 \leq i \leq 3$ s.t. $X_i \notin \mathscr{T}$.

さらに, 公理 (TC) は以下の公理 (TH), (TU) に置き換えてもよいことが知られている [5]:

(TH) $B \in \mathscr{T}, A \subseteq B, f(A) \leq k \implies A \in \mathscr{T}$,

(TU) $A, B \in \mathscr{T}, f(A \cup B) \leq k \implies A \cup B \in \mathscr{T}$.

オーダー k の tangle は, オーダー $k-1$ の tangle でもある. また, k が大きいと, オーダー k の tangle が存在できない. Tangle が存在できる最大の k を (X, f の)**tangle 数**と呼び, $tn_f(X)$ または単に $tn(X)$ で表す. f をあるグラフ $G = (V, E)$ から導出される (E 上の) 対称劣モジュラ関数とすると, この $tn_f(X)$ がグラフ G の branchwidth と一致する [3]. Tangle と同様の概念として以下の loose tangle [2] がある.

定義 $\mathscr{L} \subseteq 2^X$ がオーダー $k+1$ の **loose tangle** とは, 次を満たすときをいう.

(LL) $\forall A \subseteq X, |A| \leq 1$, and $f(A) \leq k \implies A \in \mathscr{L}$,

(TSU) $A, B \in \mathscr{L}$, $C \subseteq A \cup B$, and $f(C) \leq k \Rightarrow C \in \mathscr{L}$,

(IW) $X \notin \mathscr{L}$.

オーダー k の loose tangle が存在することとオーダー k の tangel が存在することが同値であることが知られている [2].

文献 [2] では明示的には述べられていないが, その中の定理 5 の証明 (および文献 [1]) を読むと, loose tangle の定義に公理 (TH) を追加しても, loose tangle の定義に影響しないことがわかる.

2.5 k-branched とイデアル

集合 $A = \{e_1, \ldots, e_m\} \subseteq X$ が **k-branched** とは, 以下を満たす部分枝分解木 (図 1 参照) が存在するときをいう.

- 葉に $\{e_1\}, \ldots, \{e_m\}, X \backslash A$ が割当てられていて,
- 各辺の幅が k 以下で抑えられている (従って $f(A) \leq k$).

k-branched 全体からなる集合族は ((X, f) 上の) イデアルとなる.

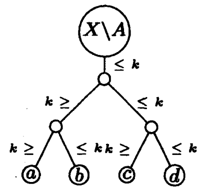

図 1 部分枝分解木の例 ($A = \{a, b, c, d\}$)

2.6 Tangle と極大イデアル

ここでは極端な場合を通して, tangle と極大イデアルの単純な関係を見てみる. 具体的にイメージし易いように, 次数 1 以下の頂点を持たないグラフ $G = (V, E)$ とそのグラフから導かれる $X = E$ 上の対称劣モジュラ関数 f_Φ について考える.

$k = 1$ とすると, $f(\{a\}) > k$ を満たすある元 $a \in X$ が存在する (実際, $\forall a \in X$, $f(\{a\}) > k$ となっている). このとき, 集合族 $\mathscr{I} = \{A \subset X \mid a \notin A\}$ は極大イデアルであるが, この $\mathscr{I}$ から k small な集合だけを取り出してしてできる集合族 $\mathscr{I}_{\leq k} = \{A \subset X \mid a \notin A, f(A) \leq k\}$ は tangle の公理をすべて満たし, よって tangle となることがわかる.

$k = |V|$ とすると, $\forall a \in X$, $f(\{a\}) \leq k$ となる (すなわちすべてが k small となる). また, tangle の公理 (TL) は ((TE) より) $\forall a \in X, f(\{a\}) \leq k \implies \{a\} \in \mathscr{T}$(つまり公理 (LL)) を意味しているので, $\forall a \in X$, $\{a\} \in \mathscr{T}$ となる. これを初期段階と考えて帰納法を展開することで, $k = |V|$ のときには tangle が存在できないことが示せる. 実際, tangle $\mathscr{T}$ が存在したと仮定し, 帰納段階として, $A, B \in \mathscr{T} \implies A \cup B \in \mathscr{T}$ (つまりイデアルの公理 (IU)) について考えるのだが, この帰納段階は成立つ. 帰納段階が成立つ理由は, $A \cup B \notin \mathscr{T}$ とすると, $A, B, \overline{A \cup B} \in \mathscr{T}$ となり, $X = A \cup B \cup C \notin \mathscr{T}$

[*2] 本定義のオーダーは, 文献 [1] の定義と 1 ずれている.

の (TC) に矛盾するからである．この帰納法より，すべての集合 $A \subseteq X$ が $\mathscr{T}$ に属することになり，特に $X \in \mathscr{T}$ となり，(TC) と矛盾する．

3 結果

2.2 節で述べたとおり，ブール代数上の極大イデアルは二者択一的な公理 (つまり事実 1) を満たす．本研究では (X, f) 上でも同様に事実 1 が成り立つことを示す．定理 3.1 の証明の流れは，命題 2.2 のそれと同じである．これらの証明の運び方は，二者択一的な特徴付けの証明の典型と言える．

3.1 極大イデアルと二者択一的特徴

定理 3.1 $\mathscr{M}$ を (X, f) 上の極大なイデアルとする．このとき，$f(Y) \leq k$ を満たす各 $Y \subseteq X$ に対し，$Y \in \mathscr{M}$ または $\overline{Y} \in \mathscr{M}$ のどちらか一方が成り立つ．

証明 $f(Y) \leq k$ だが Y も $\overline{Y}$ も両方とも $\mathscr{M}$ に属さないような $Y \subset X$ が存在すると仮定する．そのような Y のうち $f(Y)$ が最小になるものを選ぶ．$\mathscr{M}_Y$ を $\mathscr{M} \cup \{Y\}$ を含み，(TU), (TH), および (LL) を満たす極小の族とする．同様に，$\mathscr{M}_{\overline{Y}}$ を $\mathscr{M} \cup \overline{Y}$ を含み，(TU), (TH), および (LL) を満たす極小の族とする．

$\mathscr{M}$ の極大性より，$\mathscr{M}_Y$ および $\mathscr{M}_{\overline{Y}}$ の両方とも X を含む．したがって，$A_Y \in \mathscr{M}$ と $A_{\overline{A}} \in \mathscr{M}$ が存在し，$A_Y \cup Y = A_{\overline{Y}} \cup \overline{A} = X$ とできる．(ここで $\overline{A_Y} \subseteq Y$ および $\overline{A_{\overline{Y}}} \subseteq \overline{Y}$ であることに注意.)

文献 [1] の 3.4.4. の手法を用いて，各 $\overline{A_Y} \subseteq B \subseteq Y$ に対して $f(Y) \leq f(B)$ が成り立つことが示せる．実際，$f(B) < f(Y)$ なる B が存在すると仮定すると，$f(Y)$ の最小性より，B または $\overline{B}$ が $\mathscr{M}$ に属するはずである．$B \in \mathscr{M}$ の場合，$\overline{A_Y} \subseteq B \subseteq Y$ かつ $f(\overline{A_Y}) \leq k$ より，$\overline{A_Y} \in \mathscr{M}$ を得るが，であれば $X = A_Y \cup \overline{A_Y} \in \mathscr{M}$ となり矛盾を得る．逆に $\overline{B} \in \mathscr{M}$ の場合，$\overline{Y} \subseteq \overline{B}$ かつ $f(\overline{Y}) \leq k$ より，$\overline{Y} \in \mathscr{M}$ をえるが，これは Y の選び方に矛盾する．同様の議論で，各 $\overline{A_{\overline{Y}}} \subseteq B \subseteq \overline{Y}$ に対し，$f(\overline{Y}) \leq f(B)$ が示せる．

文献 [2] の定理 5 の手法を用いて，$A_Y \backslash Y \in \mathscr{M}$ が成り立つことを示す (cf. 文献 [1] の補題 2.5.)．$\overline{A_Y} \subseteq Y$ であるので $Y \backslash A_Y = \overline{A_Y}$ となり，(上記で示したように $\overline{A_Y} \subseteq B \subseteq Y \implies f(Y) \leq f(B)$ より) $f(Y \backslash A_Y) \geq f(Y)$ が成り立つ．よって，$f(A_Y) + f(Y) \geq f(A_Y \backslash Y) + f(Y \backslash A_r)$ から，$f(A_Y \backslash Y) \leq f(A_Y) \leq k$ を得る．したがって，$A_Y \in \mathscr{M}$, $A_Y \backslash Y \subseteq A_Y$, および $f(A_Y \backslash Y) \leq k$ より，$A_Y \backslash Y \in \mathscr{M}$ が成り立つ．同様に，$A_{\overline{Y}} \backslash \overline{Y} \in \mathscr{M}$ を示すことができる．

$A_Y \cup Y = A_{\overline{Y}} \cup \overline{A} = X$ であったことを思い出すと，$(A_Y \backslash Y) \cup Y = X = (A_{\overline{Y}} \backslash \overline{Y}) \cup \overline{Y}$ より，

$$
\begin{aligned}
X =& \left[\Big((A_Y \backslash Y) \cup (A_{\overline{Y}} \backslash \overline{Y})\Big) \cup Y\right] \cap \\
& \left[\Big((A_Y \backslash Y) \cup (A_{\overline{Y}} \backslash \overline{Y})\Big) \cup \overline{Y}\right] \\
=& \Big((A_Y \backslash Y) \cup (A_{\overline{Y}} \backslash \overline{Y})\Big) \cup (Y \cap \overline{Y}) \\
=& (A_Y \backslash Y) \cup (A_{\overline{Y}} \backslash \overline{Y})
\end{aligned}
$$

となる，しかしこれは $X \notin \mathscr{M}$ に矛盾する． □

4 今後の課題

今後の課題として以下が挙げられる．

- 本研究では f として対称劣モジュラ関数を考えたが，関数 f がどのような性質を満たせば同様な結果が得られるのか?
- $G = (V, E)$ を branchwidth が高々 k であるグラフの集合のある禁止グラフとする．(E, f_Φ) 上の極大イデアルは何か特別な性質を満たすか?

謝辞 本研究は科研費 (24500007) の助成を受けたものである．

参考文献

[1] Jim Geelen, Bert Gerards, Neil Robertson, and Geoff Whittle. Obstructions to branch-decomposition of matroids. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, Vol. 96, No. 4, pp. 560–570, 2006.

[2] Sang-il Oum and Paul Seymour. Testing branch-width. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, Vol. 97, No. 3, pp. 385–393, 2007.

[3] Neil Robertson and Paul D Seymour. Graph minors. X. Obstructions to tree-decomposition. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, Vol. 52, No. 2, pp. 153–190, 1991.

[4] Roman Sikorski. *Boolean algebras*, Vol. 3. Springer, 1969.

[5] 山崎浩一. Tangle と 極大イデアル. 冬の LA シンポジウム 2013, 2013.